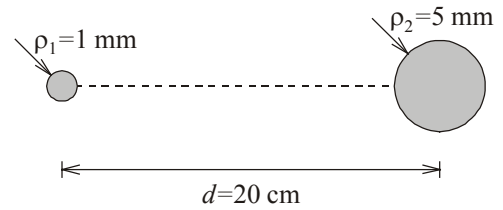


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

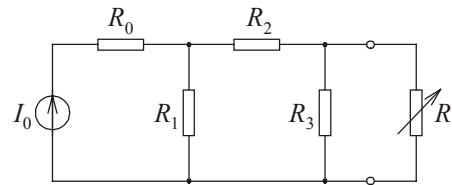
izpit, 28. januar 2003

1. Dva dolga vzporedna vodnika polmerov 1 mm in 5 mm sta električno povezana, kontaktirana (predstavljata eno telo) in ležita na medosni razdalji 20 cm. Ko to sestavljeno prevodno telo naelektrimo, se naboj razdeli med oba vodnika. Koliko odstotkov celotnega naboja je na debelejšem vodniku? (Ekscentričnost zanemarite.)



2. Pod katerim kotom mora iz zraka »vstopati« homogeno električno polje v izolacijski listič z relativno dielektričnostjo $\epsilon_r = 2$, da bo gostota energije povsod (pred, v in za lističem) enaka!
3. Določite razmerje $r = C_1 / C_2$ kapacitivnosti dveh kondenzatorjev, da bosta nadomestni kapacitivnosti njune vzporedne oz. zaporedne vezave v razmerju 5!
4. Vzdolž 5 m dolgega bakrenega vodnika preseka 10 mm^2 se njegova temperatura linearno spreminja. Na začetku vodnika je temperatura $0 \text{ }^\circ\text{C}$, na koncu pa $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Kolikšna je njegova električna upornost, če je specifična prevodnost bakra 56 MS/m , temperaturni koeficient bakra pa je 0.004 K^{-1} ?

5. Kolikšna je maksimalna moč na spremenljivem uporu? Vrednosti elementov vezja so: $R_0 = R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ in $I_0 = 4 \text{ mA}$.



Rešitve so objavljene na: <http://torina.fe.uni-lj.si/oe>.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

izpit, 28. januar 2003

Rešitve

1. Ker sta vodnika električno povezana, sta na istem potencialu: $V_1 = V_2$. Vzdolžno gostoto naboja na prvem vodniku označimo z q_1 , na drugem pa z q_2 . Potenciala vodnikov zapišemo s superpozicijo prispevkov obeh nabojev: $V_1 \doteq \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\rho_1} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} + C$ in $V_2 \doteq \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\rho_2} + C$. Po izenačitvi obeh izrazov sledi:

$$q_1 \ln 1/\rho_1 + q_2 \ln 1/d \doteq q_1 \ln 1/d + q_2 \ln 1/\rho_2 \Rightarrow q_1 \ln d/\rho_1 \doteq q_2 \ln d/\rho_2 \Rightarrow q_1 \doteq q_2 \frac{\ln d/\rho_2}{\ln d/\rho_1} \doteq 0.696q_2.$$

Razmerje med množino naboja na debelejšem (drugem) vodniku in celotno množino naboja je:

$$\frac{q_2}{q_1 + q_2} \doteq \frac{q_2}{0.696q_2 + q_2} \doteq \frac{1}{1.696} \doteq \boxed{59\%}.$$

2. Tangencialna komponenta vektorja električne poljske jakosti, ter normalna komponenta vektorja gostote električnega pretoka (vektorja \vec{D}) prehajata mejo zrak-izolator zvezno: $E_{0t} = E_0 \cos \alpha = E_{1t}$ in

$$\epsilon_0 E_{0n} = \epsilon_0 E_0 \sin \alpha = 2\epsilon_0 E_{1n} \Rightarrow E_{1n} = E_0 \frac{\sin \alpha}{2}.$$

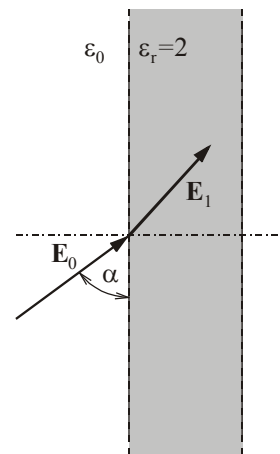
Gostota električne energije v zraku je $w_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$, v izolacijskem lističu pa

$$w_1 = \frac{1}{2} 2\epsilon_0 E_1^2 = \epsilon_0 (E_{1t}^2 + E_{1n}^2) = \epsilon_0 E_0^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right).$$

Iz zahteve po enakosti gostote energije v zraku in v lističu sledi:

$$\epsilon_0 E_0^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\sin^2 \alpha = 2/3 \Rightarrow \alpha \doteq 54.7^\circ$. Da bo gostota energije povsod enaka, mora električno polje vstopati iz zraka v listič pod kotom $\boxed{\alpha \doteq 54.7^\circ}$.



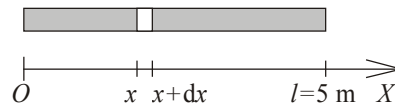
3. Nadomestno kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev označimo z $C_V = C_1 + C_2$, zaporedne vezave pa z $C_Z = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Razmerje obeh nadomestnih kapacitivnosti je enako 5:

$$\frac{C_V}{C_Z} = \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1 C_2} = 5 \Rightarrow C_1^2 + 2C_1 C_2 + C_2^2 = 5C_1 C_2. \text{ To enačbo delimo z } C_2^2 \text{ in upoštevajmo}$$

$$\text{okrajšavo } r = C_1/C_2 : r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \doteq \left(\begin{array}{l} 2.62 \\ 0.382 \end{array} \right). \text{ Izračunani vrednosti}$$

razmerja kapacitivnosti sta si inverzni ($r_1 = 1/r_2$), saj imata kondenzatorja simetrično vlogo v zaporedni ali vzporedni vezavi.

4. Vodnik razdelimo na diferencialno kratke segmente. Upornost vodnika je enaka integralu diferencialnih upornosti teh segmentov: $R = \int_{x=0}^{x=l} dR$, $dR = \frac{\rho(x)dx}{A}$, kjer je



$A = 10 \text{ mm}^2$ presek vodnika, $\rho(x)$ pa specifična upornost diferencialnega segmenta pri koordinati x . Ta specifična upornost je temperaturno odvisna: $\rho(x) = \rho_0(1 + \alpha(\vartheta(x) - \vartheta_0))$, kjer je $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$ sobna temperatura, $\rho_0 = \frac{1}{56 \text{ MS/m}}$ je specifična upornost bakra pri sobni temperaturi, $\alpha = 0.004 \text{ K}^{-1}$ je temperaturni koeficient bakra in $\vartheta(x)$ je temperatura vodnika pri koordinati x . Ta temperatura je sorazmerna koordinati x : $\vartheta(x) = \frac{100^\circ\text{C}}{5 \text{ m}}x$. Upornost vodnika je tako:

$$R = \int_0^l \frac{\rho_0}{A} \left(1 + \alpha \left(\frac{100^\circ\text{C}}{5 \text{ m}}x - \vartheta_0 \right) \right) dx = \frac{\rho_0}{A} \left(l + \alpha \left(\frac{100^\circ\text{C}}{l} \frac{l^2}{2} - \vartheta_0 l \right) \right) = \frac{\rho_0 l}{A} \left(1 + \alpha (100^\circ\text{C}/2 - \vartheta_0) \right)$$

$$R = \boxed{0.01 \Omega}.$$

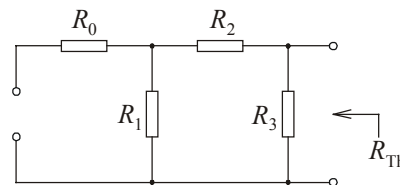
Ker se temperatura linearno spreminja vzdolž vodnika, se lahko izognemo integraciji in skrajšamo izračun tako, da računamo s srednjo vrednostjo temperature na celi dolžini vodnika:

$$R = \rho_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{100^\circ\text{C} + 0^\circ\text{C}}{2} - \vartheta_0 \right) \right) \frac{l}{A} = 0.01 \Omega.$$

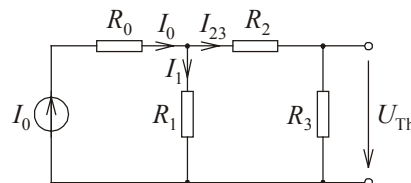
5. Najprej določimo Theveninov nadomestni vir za del vezja levo od sponk spremenljivega upora.

Pri določanju Theveninove upornosti deaktiviramo tokovni vir (nadomestimo ga z odprtimi sponkami):

$$R_{\text{Th}} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + (R_1 + R_2)} = 4/3 \text{ k}\Omega.$$



Theveninova napetost je napetost med (odprtima) sponkama, med katerima se v originalnem vezju nahaja spremenljiv upor. Tok I_0 se razdeli na toka I_1 , ki teče skozi upor R_1 , in I_{23} , ki teče skozi zaporedno vezavo uporov R_2 in R_3 . Ker je $R_1 = R_2 + R_3 = 3 \text{ k}\Omega$, sta toka I_1 in I_{23} enaka: $I_1 = I_{23} = I_0/2 = 2 \text{ mA}$. Theveninova napetost je enaka napetosti na tretjem uporu: $U_{\text{Th}} = R_3 I_{23} = 4 \text{ V}$.



Maksimalna moč na spremenljivem uporu je: $P_{\text{max.}} = \frac{U_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{Th}}} = \boxed{3 \text{ mW}}$.