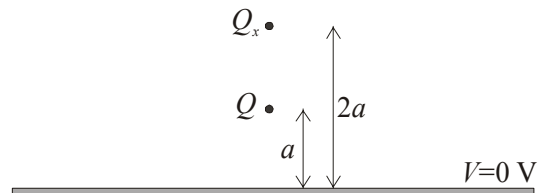
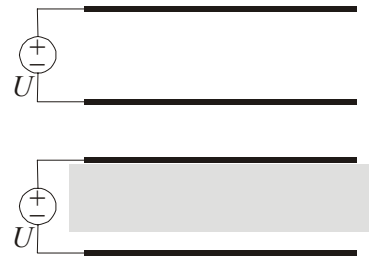


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
izpit, 27. januarja 2004

1. Majhna kroglica z nabojem Q se nahaja na oddaljenosti a od ozemljene prevodne plošče. Na oddaljenosti $2a$ od plošče je postavljena druga kroglica z nabojem Q_x . Kolikšen naj je ta naboj, da bo električna sila nanj enaka nič?

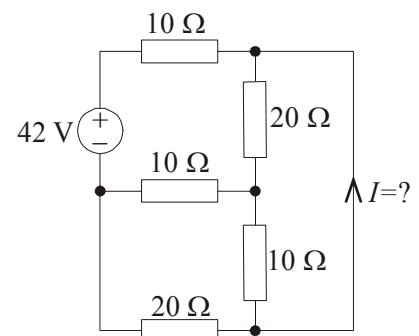


2. Med razsežni plošči zračnega ploščnega kondenzatorja je priključen vir z napetostjo U . Vzporedno med plošči vstavimo karton električne susceptibilnosti $\chi_e = 9$, ki zapolni 80 % prostora med ploščama. Določite faktor povečanja električne poljske jakosti v preostali zračni špranji glede na poljsko jakost med ploščama pred vstavitvijo kartona!



3. Naelektrena kovinska krogla polmera $r_0 = 4\text{ cm}$ je ovita z izolacijskim omotom relativne dielektričnosti 5. Pri kateri debelini d omota bosta akumulirani električni energiji v omotu in izven njega enaki?
4. Med vzporednima bakrenima ploščama površine S in medsebojnega razmaka d je uporovna snov. Tej se specifična električna upornost spreminja linearno od vrednosti ρ_1 ob eni plošči do vrednosti ρ_2 ob drugi plošči. Izrazite električno upornost uporovnega kvadra med ploščama!

5. Izračunajte tok I !



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
izpit, 27. januarja 2004, REŠITVE

1. Ker se kroglici nahajata nad prevodno podlago, moramo pri izračunu upoštevati še zrcalna naboja, naboja $-Q$ in $-Q_x$. Vsota vseh treh sil na naboj Q_x mora biti enaka nič:

$$Q_x \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} + Q_x \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (3a)^2} + Q_x \frac{-Q_x}{4\pi\epsilon_0 (4a)^2} = 0 \Rightarrow \frac{Q_x}{16} = Q - \frac{Q}{9} \Rightarrow Q_x \cong \underline{\underline{14,22 Q}}$$

2. Ker je električno polje med ploščama homogeno, je poljska jakost med ploščama v prvem primeru (brez dielektrika) kar $E = U/d$, kjer je d razdalja med ploščama. Po vstavitvi kartona seštejemo padca napetosti v kartonu in špranji $U = E_k(0,8d) + E_z(0,2d)$ ter upoštevamo mejni pogoj med dielektrikoma in dobimo:

$$10 \epsilon_0 E_k = \epsilon_0 E_z \Rightarrow E_k = E_z/10 \Rightarrow U = 0,08 E_z d + 0,2 E_z d \Rightarrow E_z = \frac{U/d}{0,28}$$

Določiti moramo le še razmerje električnih poljskih jakosti:

$$\frac{E_z}{E} = \frac{1}{0,28} \cong \underline{\underline{3,57}}$$

3. Do rešitve lahko pridemo na dva načina: z uporabo izrazov za kapacitivnost dveh sferičnih kondenzatorjev ali z integracijo gostote energije, $w = \epsilon E^2 / 2$. Izbrali bomo drugi način. Električno poljsko jakost v okolici naelektrene krogle dobimo z uporabo Gaussovega zakona: $E = Q / 4\pi\epsilon r^2$, kjer je ϵ dielektričnost dotičnega medija. Z integracijo gostote energije od r_0 do $r_0 + d$ dobimo energijo v omotu:

$$W_{\text{omota}} = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_0+d} \epsilon \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + d} \right),$$

z integracijo od $r_0 + d$ do ∞ pa energijo izven omota:

$$W_{\text{izven}} = \frac{1}{2} \int_{r_0+d}^{\infty} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0 + d} \right).$$

Iz izenačitve energij sledi debelina omota:

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + d} \right) = \frac{1}{r_0 + d} \Rightarrow d = 5r_0 = \underline{\underline{20\text{cm}}}$$

4. Os X naj je pravokotna na bakreni plošči; izhodišče naj ima na eni plošči in naj bo usmerjena k drugi. Linearno spreminjajočo specifično upornost uporabne mase določa izraz

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{d} x, \text{ saj je } \rho(0) = \rho_1 \text{ in } \rho(d) = \rho_2.$$

Upornost med ploščama je integral diferencialnih upornosti diferencialno tankih rezin,

$$dR = \frac{\rho(x)}{S} dx \Rightarrow R = \frac{1}{S} \int_0^d \rho(x) dx = \frac{1}{S} \int_0^d \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{d} x \right) dx = \underline{\underline{\frac{\rho_2 + \rho_1}{2S} d}}$$

Ker gre za linearno spreminjanje specifične upornosti, bi enak rezultat dobili tudi z upoštevanjem povprečne vrednosti specifične upornosti, torej brez integracije.

5. Nalogo moremo rešiti na več načinov. Tu bomo zapisali tri zanke enačbe (tretjo za zankni tok, ki je enak iskanemu toku I). Dobimo sistem treh enačb, ki jih rešimo z uporabo determinant:

$$40 \Omega J_1 - 20 \Omega I - 10 \Omega J_2 + 42 \text{ V} = 0$$

$$40 \Omega J_2 - 10 \Omega I - 10 \Omega J_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$30 \Omega I - 20 \Omega J_1 - 10 \Omega J_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,2 \text{ A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$D = 4(3 \cdot 4 - 1) + 1(-1 \cdot 3 - 2) - 2(1 + 8) = 21, D_3 = -4,2 \text{ A} (1 + 8) = -37,8 \text{ A} \Rightarrow I = \frac{D_3}{D} = \underline{\underline{-1,8 \text{ A}}}$$

