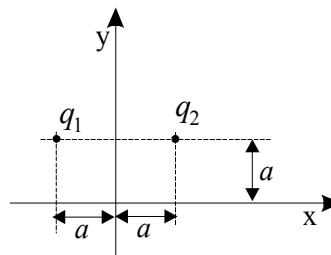


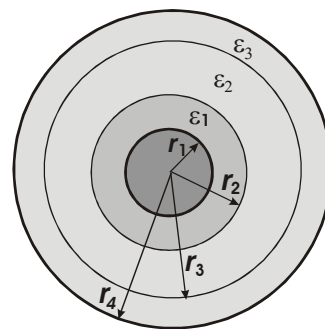
OSNOV ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
Izpit 5. 6. 2002

1. Vzporedni daljnovidni vrvi z elektrinama q_1 in q_2 sta položeni kot je prikazano na sliki. Kam moramo postaviti točkasto elektrino Q_3 , da bo vektor električne poljske jakosti v izhodišču koordinatnega sistema enak nič?
($q_1=q_2=1 \mu\text{C/m}$, $Q_3 = -2 \mu\text{C}$, $a=16 \text{ m}$)

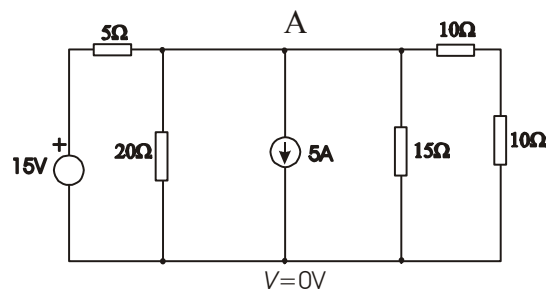


2. Izpeljite izraza za električno poljsko jakost in električni potencial v splošni točki na osi z za tanek obroč polmera R , ki leži v ravnini $z=0$ in je enakomerno naelektrjen z elektrino Q !

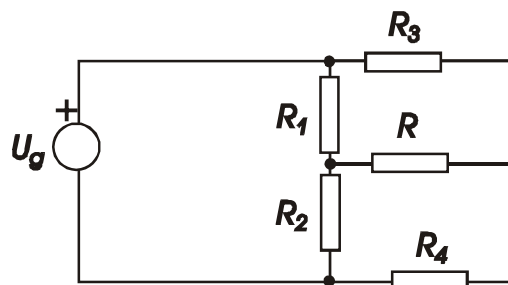
3. Koliko električne energije je shranjene v srednjem dielektriku triplastne izolacije koaksialnega kabla na dolžini 1 m, če je med zunanjo plaščem in notranjo žilo pritisnjena napetost 2 kV?
($r_1 = 0.5 \text{ mm}$, $r_2 = 1 \text{ mm}$, $r_3 = 2 \text{ mm}$, $r_4 = 4 \text{ mm}$,
 $\epsilon_{r1} = 1$, $\epsilon_{r2} = 2$, $\epsilon_{r3} = 4$)



4. Določite potencial spojišča A in moči, s katerima obratujeta generatorja!



5. Določite upornost R tako, da bo na njem največja moč ter izračunajte to moč!
 $U_g = 12 \text{ V}$, $R_1 = R_4 = 20 \Omega$, $R_2 = R_3 = 40 \Omega$



OSNOV ELEKTROTEHNIKE I (UNI), rešitve
Izpit 5. 6. 2002

1. Q_3 mora ležati na pozitivnem delu y osi:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$$

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -\vec{i}_y \cdot 2 \cdot \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0 a \cdot \sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ - \vec{i}_y \cdot \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 y^2} = \vec{0}$$

$$y = \sqrt{\frac{a \cdot (-Q_3)}{2 \cdot q_1}} = \underline{\underline{4 \text{ m}}}$$

2. Določimo del električne poljske jakosti, ki jo na osi z povzroča del elektrine na obroču ter integriramo prispevke. Upoštevamo le projekcijo el. poljske jakosti na z os, ker se komponente v ostalih smereh izničijo:

$$d\vec{E} = \vec{i}_z dE_z = \vec{i}_z \cdot \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r}, \text{ kjer je } dQ = q \cdot dl = \frac{Q}{2\pi R} R \cdot d\varphi \text{ in } r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$d\vec{E} = \vec{i}_z \cdot \frac{\frac{Q}{2\pi} z d\varphi}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \vec{i}_z \cdot \frac{Qz \cdot d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \vec{i}_z \int_0^{2\pi} \frac{Qz \cdot d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \underline{\underline{\vec{i}_z \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}}}$$

$$V = -\int_{\infty}^z \vec{E} \cdot d\vec{z} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}}}$$

Komentar: Nalogo lahko rešimo tudi tako, da najprej izpeljemo izraz za potencial (z nastavkom $dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$) in nato z odvajanjem ($\vec{E} = -\text{grad}V$) še električno poljsko jakost.

3. Energijo v drugem dielektriku lahko izračunamo na dva načina: kot energijo shranjeno v drugem zaporedno vezanem kondenzatorju, ali pa direktno iz gostote energije. V drugem primeru velja:

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{D^2}{2\epsilon}, D = \frac{q}{2\pi r}$$

$$W_2 = \int_{V_2} w_2 dV = \int_{r_2}^{r_3} \frac{D^2}{2\epsilon_2} 2\pi r l \cdot dr$$

$$W_2 = \frac{\pi l \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2}{\epsilon_2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{r} = \frac{\pi l}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} \left(\frac{q}{2\pi}\right)^2 \ln \frac{r_3}{r_2}$$

Naboj določimo iz pogoja, da mora biti vsota padcev vseh napetosti v koaksialnem kablu enaka pritiskni napetosti:

$$U = \int_{r_1}^{r_4} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_{r_1}^{r_4} \frac{\vec{D}}{\epsilon} \cdot \vec{dr} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\epsilon_{r1}r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{\epsilon_{r2}r} + \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{\epsilon_{r3}r} \right]$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \ln \frac{r_4}{r_3} \right] \Rightarrow \frac{q}{2\pi} = \frac{4U}{7 \ln 2} \epsilon_0$$

$$W_2 = \frac{\pi \cdot 1\text{m}}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{4U}{7 \ln 2} \epsilon_0 \right)^2 \cdot \ln 2 = \underline{\underline{2.62 \cdot 10^{-5} \text{ J}}}$$

4. Določimo potencial spojišča A in moči generatorjev:

$$\frac{V_A - 15}{5} + \frac{V_A}{20} + 5 + \frac{V_A}{15 \parallel (10 + 10)} = 0 \Rightarrow V_A = -5.45 \text{ V}$$

$$P_{15\text{V}} = 15 \text{ V} \cdot \frac{5.45 + 15}{5} \text{ A} = \underline{\underline{61.35 \text{ W}}}$$

$$P_{5\text{A}} = 5 \text{ A} \cdot 5.45 \text{ V} = \underline{\underline{27.25 \text{ W}}}$$

5. Določimo R_{Th} in U_{Th} med sponkama upora R ter izračunamo največjo moč:

$$R = R_{Th} = R_1 \parallel \left(R_2 + R_3 \parallel R_4 \right) = \frac{20 \cdot 40}{20 + 40} \cdot 2\Omega = 26.67\Omega$$

$$U_{Th} = U_g \frac{R_3}{R_3 + R_4} - U_g \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{40 - 20}{60} \text{ V} = 4 \text{ V}$$

$$P_R = \frac{U_{Th}^2}{4R} = \frac{4^2}{4 \cdot 26.67} \text{ W} = \underline{\underline{150 \text{ mW}}}$$