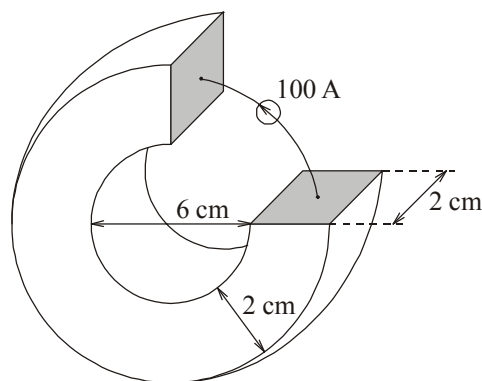


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
izpit, 5. junij 2003

1. V območju $x > 0$ je elektrostatični potencial podan z enačbo $V(x, y) = (100 \text{ V}) \cdot \arctan(y/x)$ (takšno elektrostatično polje ustvarimo z dvema naelektrenima polravninama: $x = 0$ in $y > 0$ ter $x = 0$ in $y < 0$). Določite absolutno vrednost poljske jakosti v točki $T(3 \text{ cm}, 4 \text{ cm})$!
2. Dve daljnovodni vrvi premerov 2 cm sta galvansko povezani in obešeni ena vrh druge na višinah 5 m in 10 m nad zemljo. Vrvi sta naelektreni s celotnim nabojem Q . Kolikšen del tega naboja je na spodnji vrvi?
3. V zraku nad ravnim dielektričnim lističem električne susceptibilnosti $\chi_e = 1$ je homogeno električno polje, katerega smer oklepa z normalo lističa kot 60° . V kakšnem razmerju sta gostoti električne energije pred in v lističu?

4. Del grafitnega toroida, ki obsega tri četrtine celotnega toroida, ima kvadratni presek $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ in notranji premer 6 cm. Med kvadratnima ploskvama na koncih tega dela kontaktiramo tokovni vir s tokom 100 A. Koliko toplote se sprosti v tričetrtinskem delu toroida v eni minuti? ($\gamma_c = 100 \text{ kS/m}$)



5. Na voljo imamo štiriindvajset enakih baterij napetosti odprtih sponk 1.5 V in notranje upornosti 50 miliohmov. Z združitvijo teh v sestavljen vir želimo pridobiti vir, ki bo imel napetost odprtih sponk 9 V. Kakšno vezavo baterij bomo izbrali in kolikšna bo notranja upornost sestavljenega vira?

Rešitve so objavljene na: <http://torina.fe.uni-lj.si/oe>.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

izpit, 5. junij 2003

Rešitve

1. Komponente vektorja električne poljske jakosti določimo z odvajanjem potenciala:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z) = -(100 \text{ V}) \left(\frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot (-y/x^2), \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}, 0 \right) = \\ &= -\frac{100 \text{ V}}{x^2 + y^2} (-y, x, 0). \quad \text{Absolutna vrednost poljske jakosti je } E(x, y) = \\ &= \frac{100 \text{ V}}{x^2 + y^2} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad \text{V točki s koordinatami } x = 3 \text{ cm in } y = 4 \text{ cm} \text{ dobimo} \\ \text{vrednost } E(3 \text{ cm}, 4 \text{ cm}) &= \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2}} = \boxed{200 \text{ V/m}}.\end{aligned}$$

2. Označimo polmer vrvi z $\rho_0 = 1 \text{ cm}$, višino zgornje vrvi nad zemljo z $h_1 = 10 \text{ m}$, spodnje z $h_2 = 5 \text{ m}$, vzdolžno gostoto elektrine na zgornji z q_1 in na spodnji z q_2 . Ker sta vrvi galvanjsko povezani, sta na enakem potencialu: $V_1 = V_2$. Pri zapisovanju izraza za potenciala vrvi upoštevamo vpliv zemlje z zrcalnimi naboji (ker je polmer vrvi dosti manjši od višin teh nad zemljo, lahko ekscentričnost zanemarimo):

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{\rho_0} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = V_2 = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} + \\ &+ \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{\rho_0}. \quad \text{Iz te enačbe določimo razmerje med } q_1 \text{ in } q_2:\end{aligned}$$

$$q_1 = q_2 \frac{\ln \left(\frac{2h_2}{\rho_0} \cdot \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right)}{\ln \left(\frac{2h_1}{\rho_0} \cdot \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right)} = q_2 \frac{\ln \left(\frac{10}{0.01} \cdot \frac{5}{15} \right)}{\ln \left(\frac{20}{0.01} \cdot \frac{5}{15} \right)} = q_2 \frac{\ln 1000/3}{\ln 2000/3}.$$

Vsota elektrin q_1 in q_2 je enaka vzdolžni gostoti q celotne elektrine na vrveh:

$$q = q_1 + q_2 = q_2 \frac{\ln 1000/3}{\ln 2000/3} + q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{q}{1 + \frac{\ln 1000/3}{\ln 2000/3}} \approx 0.528q. \quad \text{Na spodnji vrvi je torej}$$

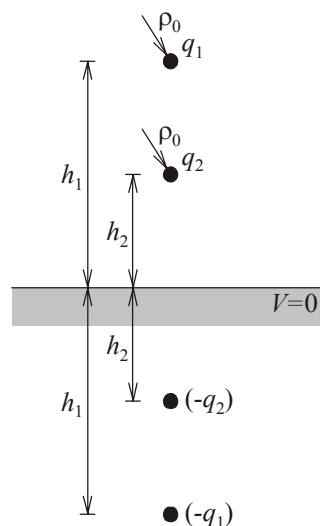
približno $\boxed{52.8\%}$ celotne elektrine Q .

3. Označimo absolutno vrednost poljske jakosti v zraku z E_0 , v lističu z E_1 in dielektričnost lističa z $\epsilon_1 = (\chi_e + 1)\epsilon_0 = 2\epsilon_0$. Razmerje gostot električne energije v zraku in v lističu je

$$\frac{w_{e0}}{w_{e1}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2/2}{\epsilon_1 E_1^2/2} = \frac{E_0^2}{2E_1^2}. \quad \text{Tangencialna komponenta poljske jakosti je enaka pred in v}$$

lističu: $E_{t1} = E_{t0} = E_0 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$. Normalna komponenta pa je enaka pri vektorju gostote električnega pretoka:

$$D_{n1} = D_{n0} \Rightarrow \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_0 E_{n0} \Rightarrow E_{n1} = E_{n0}/2 = E_0 \cos 60^\circ / 2 = E_0/4. \quad \text{Absolutno vrednost vektorja izračunamo s »pitagorsko vsoto« tangencialne in normalne komponente:}$$

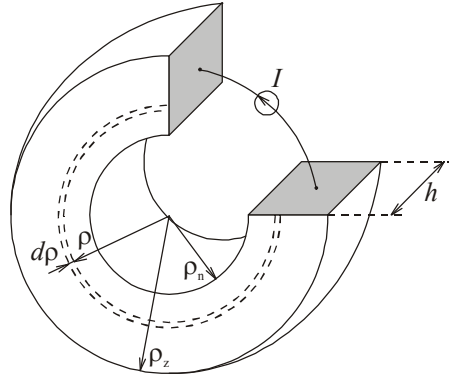


$$E_1 = \sqrt{E_{t1}^2 + E_{n1}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}E_0^2 + \frac{1}{16}E_0^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}E_0.$$

Razmerje gostot energije je

$$\frac{w_{e0}}{w_{e1}} = \frac{E_0^2}{2E_1^2} = \frac{E_0^2}{2 \cdot 13/16 E_0^2} = \boxed{\frac{8}{13} \approx 0.615}.$$

4. Moč Joulskih izgub določimo iz upornosti R (oz. prevodnosti G) dela toroida: $P = RI^2 = I^2/G$, kjer je $I = 100$ A tok skozi del toroida. Pri določanju prevodnosti »razdelimo« del toroida na diferencialne plasti debeline $d\rho$. Prevodnost take plasti je
- $$dG = \gamma_c \frac{h \cdot d\rho}{(3/4) \cdot 2\pi\rho} = \gamma_c \frac{2h \cdot d\rho}{3\pi\rho}, \quad \text{kjer je}$$



$h = 2$ cm širina dela toroida. Ker so te plasti povezane vzporedno, določimo prevodnost tričetrtinskega dela toroida z integracijo prevodnosti teh plasti. Integriramo od notranjega ($\rho_n = 3$ cm) do zunanega polmera

toroida ($\rho_z = \rho_n + 2$ cm = 5 cm): $G = \int_{\rho_n}^{\rho_z} dG = \frac{2h\gamma_c}{3\pi} \int_{\rho_n}^{\rho_z} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2h\gamma_c}{3\pi} \ln \frac{\rho_z}{\rho_n}$. Toplota, ki se

sprosti v časovnem intervalu $\Delta t = 1$ min = 60 s, je

$$Q = P \cdot \Delta t = \frac{I^2}{G} \cdot \Delta t = \frac{3\pi I^2}{2h\gamma_c \ln \rho_z / \rho_n} \cdot \Delta t \approx \boxed{2.77 \text{ kJ}}.$$

5. Vir bo imel napetost odprtih sponk 9 V, če zaporedno povežemo $\frac{9 \text{ V}}{1.5 \text{ V}} = \boxed{6}$ baterij, ki imajo napetost odprtih sponk 1.5 V. Baterij imamo štiriindvajset, torej bomo vzporedno povezali $24/6 = \boxed{4}$ enake veje z zaporedno vezavo šestih baterij. Notranja upornost ene take veje je $6 \cdot 50 \text{ m}\Omega = 300 \text{ m}\Omega$. Ko vzporedno povežemo štiri take veje, bo nadomestna upornost $\frac{300 \text{ m}\Omega}{4} = \boxed{75 \text{ m}\Omega}$.