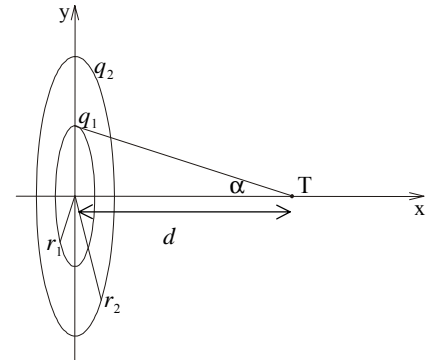


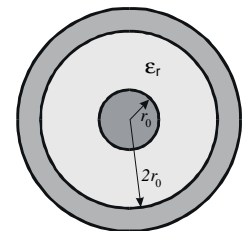
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

1. kolokvij, 08.12.2000

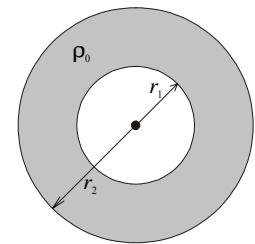
1. Krožni zanki na sliki sta naelektreni: notranja z elektrino $q_1 = -100 \text{ nAs/m}$, zunanja z elektrino q_2 . Kolikšna mora biti elektrina q_2 (množina in predznak), da bo vrednost električne poljske jakosti v točki T enaka nič, če je $\text{tg}\alpha = 1/2$ (torej $d = 4 \text{ cm}$), $r_1 = 2 \text{ cm}$ in $r_2 = 2r_1 = 4 \text{ cm}$?



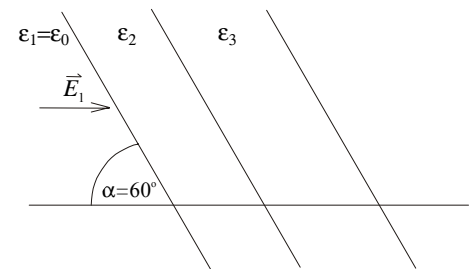
2. Določite prebojno napetost med žilo in ovojem koaksialnega kabla, če se dielektričnost izolatorja spreminja z radijem po enačbi $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \frac{r}{r_0}$ in je prebojna trdnost izolatorja $E_p = 100 \text{ kV/m!}$ ($r_0 = 0.5 \text{ cm!}$)



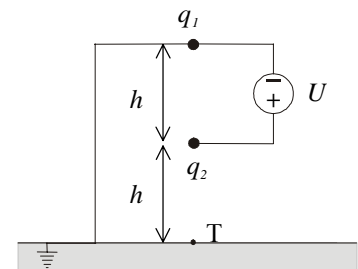
3. Med prevodnima koncentričnima krogelnima lupinama polmerov $r_1 = 2 \text{ cm}$ in $r_2 = 5 \text{ cm}$ je oblak elektronov konstantne prostorske gostote $\rho(r) = \rho_0$. Določite ρ_0 , če je napetost med lupinama $U = 10 \text{ V!}$



4. Dvoplastni dielektrik ($\epsilon_2 = 5\epsilon_0$, $\epsilon_3 = 2\epsilon_0$) vstavimo v homogeno električno polje \vec{E}_1 jakosti 150 V/m . Skicirajte vektor električne poljske jakosti \vec{E}_3 ter izračunajte velikost vektorja \vec{E}_3 , ki se nahaja v snovi z dielektričnostjo ϵ_3 !



5. Dve daljnovodni vrvi, od katerih je zgornja ozemljena, ležita vzporedno s prevodno ozemljeno podlago. Določite napetost med vrvema, če je $|\vec{E}|$ v točki T (pod vodnikoma tik nad podlago) enak 500 V/m! Podatki: $h = 5 \text{ m}$, polmer vodnikov $r_0 = 5 \text{ mm}$.



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

Kolokvij, 8.12.2000, Rešitve

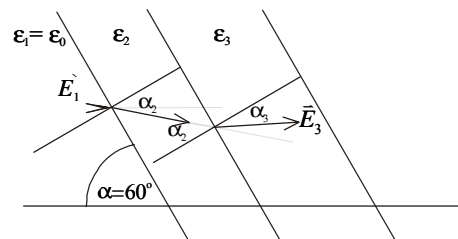
1. Označimo razdaljo med središčem zank ter točko T z d. Velja $\tan \alpha = 1/2 = r_1/d \Rightarrow d = 2 r_1 = r_2$. Zapišemo izraz za polje, ki ga v točki T povzroča elektrina na manjši zanki :

$$\vec{E}_1 = -\vec{1}_x \frac{q_1 dr_1}{2\epsilon_0 (r_1^2 + d^2)^{3/2}} \text{ ter analogno za večjo. Če naj bo vsota}$$

vektorjev električne poljske jakosti v točki T enaka nič, mora imeti vektor \vec{E}_2 (v točki T) smer $\vec{1}_x$, torej je elektrina q_2 pozitivno

predznačena: $\vec{E}_2 = \vec{1}_x \frac{q_2 dr_2}{2\epsilon_0 (r_2^2 + d^2)^{3/2}}$. Velikosti vektorjev \vec{E}_1 in \vec{E}_2 izenačimo in iz enačbe izrazimo q_2 :

$$-\frac{q_1 dr_1}{2\epsilon_0 (r_1^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{q_2 dr_2}{2\epsilon_0 (r_2^2 + d^2)^{3/2}} \Rightarrow q_2 = -0,5q_1 \left(\frac{8}{5}\right)^{3/2} \approx 101,2 \text{ nAs/m}$$



2. Med žilo in ovojem predpostavimo pritisnjeno napetost U . Z uporabo Gaussovega stavka določimo gostoto pretoka v izolatorju, iz gostote pretoka določimo električno poljsko jakost in z integracijo še napetost. Upoštevamo še, da je največje polje na površini žile in določimo prebojno napetost:

$$\vec{D} = \vec{1}_r \frac{q}{2\pi r}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \vec{1}_r \frac{q \cdot r_0}{2\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$U = \int_{r_0}^{2r_0} \vec{E} \cdot \vec{1}_r dr = \frac{q \cdot r_0}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_0}^{2r_0} r^{-2} dr = \frac{q}{4\pi \epsilon_0}$$

$$E_{pr} = E(r = r_0) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0 r_0} \Rightarrow \frac{q}{2\pi \epsilon_0} = E_{pr} \cdot r_0$$

$$U_{pr} = \frac{E_{pr} \cdot r_0}{2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ V/m} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 250 \text{ V}$$

3. Napetost med lupinama lahko izračunamo z integralom električne poljske jakosti, ki pa jo je treba predhodno izračunati. Pomagamo si z Gaussovim stavkom, kjer predpostavimo, da je električna poljska jakost le radialne smeri in odvisna le od oddaljenosti od središča krogelnih lupin. Sledi:

$$\oiint_{\partial v} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho(r) dv$$

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \left[\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right] \Rightarrow E_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} \right]$$

Iz električne poljske jakosti izrazimo padec napetosti med lupinama, kjer je edina neznanka prostorska gostota elektrine ρ_0 .

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} \right] dr = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + r_1^3 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \right] \Rightarrow \rho_0 = \frac{3\epsilon_0 U}{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + r_1^3 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} = 3 \cdot 10^{-7} \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

4. Skico vektorja električne poljske jakosti \vec{E}_2 v snovi z dielektričnostjo ϵ_3 narišemo s pomočjo lomnega zakona iz katerega izpeljemo: $\epsilon_1 > \epsilon_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$. Iz slike razberemo: $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 > 30^\circ$ ter $\alpha_3 < \alpha_2$ in $\alpha_3 > 30^\circ$.

$$E_{t1}=E_{t2} \text{ in } E_{t2}=E_{t3} \Rightarrow E_{t3} = E_{t1} = E_1 \cdot \sin 30^\circ = 75 \text{V/m}$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow D_{n1} = D_{n2} = D_{n3} \Rightarrow D_{n3} = D_{n1} \Rightarrow E_{n3} = \frac{D_{n3}}{\epsilon_3} = \frac{D_{n1}}{\epsilon_3} = \frac{E_{n1} \cdot \epsilon_1}{\epsilon_3} = \frac{E_{n1} \cdot \epsilon_0}{2\epsilon_0} = \frac{E_1 \cdot \cos 30^\circ}{2} = 64,95 \text{V/m}$$

$$|\vec{E}_3| = \sqrt{E_{t3}^2 + E_{n3}^2} = 99,21 \text{V/m}$$

5. Prevodno ozemljeno podlago nadomestimo z zrcalnima vodnikoma elektrin $-q_1$ in $-q_2$. Električna poljska jakost v točki T (kot tudi v praktično vseh ostalih točkah) je tako odvisna od velikosti štirih linijskih elektrin $q_1(0,2h)$, $q_2(0,h)$, $-q_2(0,-h)$ in $-q_1(0,-2h)$. Električna poljska jakost (je navpični smeri) povezuje q_1 in q_2 kot:

$$E(T) = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot 2h} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot h} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot 2h} = \frac{q_1 + 2q_2}{2\pi\epsilon_0 h}$$

Drugo zvezo med q_1 in q_2 dobimo iz potenciala zgornjega vodnika, ki je enak $V_1=0$ Sledi:

$$V_1 = 0 = \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{h} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_0} + \frac{-q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{3h} + \frac{-q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{4h}$$

$$q_2 = -q_1 \frac{\ln \frac{4h}{r_0}}{\ln 3}$$

Iz obeh sledi, da sta

$$q_1 = \frac{\pi\epsilon_0 h E(T)}{\ln(4h/r_0) - \frac{1}{2}}, \quad q_2 = -q_1 \frac{\ln(4h/r_0)}{\ln 3},$$

in tako lahko izračunamo ustrezno napetost med vodnikoma:

$$V_2 = U = \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_0} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{h} + \frac{-q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2h} + \frac{-q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{3h}$$

$$U = \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_0} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln 3 = 9980 \text{V}$$