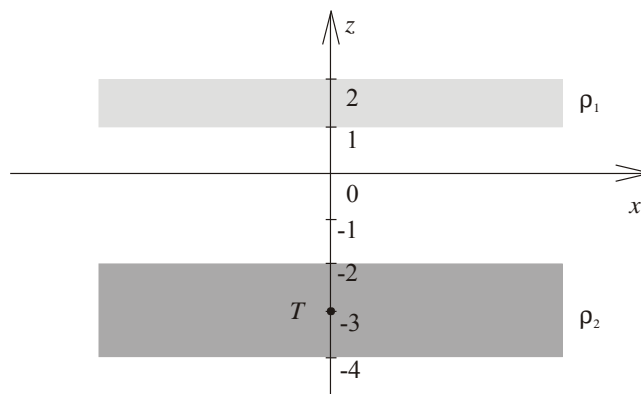


## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE (UNI)

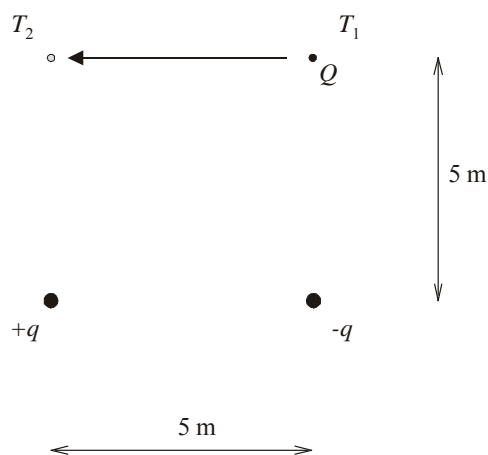
Prvi kolokvij, 12. december 2001

1. Oblak pozitivne elektrine z gostoto naboja  $\rho_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3$  se nahaja med ravninama  $z = 1 \text{ cm}$  in  $z = 2 \text{ cm}$ , oblak negativne elektrine z gostoto naboja  $\rho_2 = -4 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3$  pa se nahaja med ravninama  $z = -2 \text{ cm}$  in  $z = -4 \text{ cm}$ . Določite vektor električne poljske jakosti v točki  $T(0, 0, -3) \text{ cm}$ .



2. Kroglasti oblak z radijem  $r_0$  ima podano prostorsko gostoto naboja:  $\rho(r) = \rho_0 \cdot \left(\frac{r}{r_0}\right)$ ;  $\rho_0 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^3$ ,  $r_0 = 1 \text{ cm}$ . Določite električno poljsko jakost na robu oblaka.
3. Dano je homogeno električno polje jakosti  $\mathbf{E} = (2, 1, 3) \text{ kV/m}$ . Izračunajte potencial točke  $T_1(2, 1, 6) \text{ cm}$ , če je potencial točke  $T_2(4, 2, 5) \text{ cm}$  enak  $20 \text{ V}$ !
4. Zračni dvovod, priključen na napetost  $U = 250 \text{ V}$ , sestavljata dva vzporedna vodnika polmerov  $a = 3 \text{ mm}$  in medosne razdalje  $d = 40 \text{ cm}$ . Izračunajte iznos električne poljske jakosti v točki  $T$ , ki je za  $25 \text{ cm}$  oddaljena od obeh vodnikov (ekscentričnost zanemarite)!

5. Dvovod z medosno razdaljo  $5 \text{ m}$  je naelektren z nabojem  $\pm q = \pm 10^{-4} \text{ C/m}$ . Določite delo  $A$ , ki ga opravimo pri premiku točkastega naboja  $Q = 10^{-6} \text{ C}$  iz točke  $T_1$ , ki je  $5 \text{ m}$  nad negativno naelektrenim vodnikom, v točko  $T_2$ , ki je  $5 \text{ m}$  nad pozitivno naelektrenim vodnikom!



Rešitve so objavljene na: <http://torina.fe.uni-lj.si/oe>.

## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE (UNI)

Prvi kolokvij, 12. december 2001

### Rešitve

1. Točka  $T$  leži v središču spodnjega oblaka. Spodnji oblak lahko razdelimo na dve polovici (ena polovica med ravnino  $z = -2$  cm in  $z = -3$  cm ter druga polovica med ravninama  $z = -3$  cm in  $z = -4$  cm). Električni poljski jakosti teh dveh polovic spodnjega oblaka se med seboj vektorsko odštejeta, zato je električna poljska jakost v točki  $T$  posledica nabojev v zgornjem oblaku.

Zgornji oblak lahko razdelimo v diferencialno tanke plošče z nabojem  $d\sigma = \rho_1 dz$ . Električna poljska jakost je vsota prispevkov vseh teh plošč. Točka  $T$  leži pod oblakom, zato je električna poljska jakost usmerjena v smeri  $-\mathbf{e}_z$ .

$$z_1 = 1 \text{ cm}$$

$$z_2 = 2 \text{ cm}$$

$$d\sigma = \rho_1 dz$$

$$\rho_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \int \frac{d\sigma}{2\epsilon_0} = -\mathbf{e}_z \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_1 dz}{2\epsilon_0} = -\mathbf{e}_z \frac{\rho_1}{2\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} dz = -\mathbf{e}_z \frac{\rho_1}{2\epsilon_0} (z_2 - z_1)$$

Do istega rezultata lahko pridemo, če oblak elektrine obravnavamo kot naelektreno ploščo s površinsko porazdeljenim nabojem  $\sigma$ .

$$\sigma = \rho_1 \Delta z = \rho_1 (z_2 - z_1)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\mathbf{e}_z \frac{\rho_1 (z_2 - z_1)}{2\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} \doteq 11,3 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

---

2. Električno poljsko jakost določimo z Gaussovimi stavkom:

$$\rho_0 = 8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

$$r_0 = 1 \text{ cm}$$

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_V \rho(r) dv$$

$$E 4\pi r_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_0} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_0} \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \cdot \rho_0}{\epsilon_0 \cdot r_0} \int_0^{r_0} r^3 dr$$

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \cdot r_0^3} \frac{r_0^4}{4} = \frac{\rho_0}{4 \cdot \epsilon_0} r_0$$

$$\mathbf{E} \doteq \mathbf{e}_r \cdot 2,26 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

---

3. Napetost med točkama, ki je razlika potencialov, je enaka krivuljnemu integralu vektorja električne poljske jakosti med točkama  $T_1$  in  $T_2$ .

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_{T_1}^{T_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_{T_1}^{T_2} d\mathbf{l} = (2, 1, 3) \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot (4 - 2, 2 - 1, 5 - 6) \text{ cm} = 20 \text{ V}$$

$$\underline{V_1 = 20 \text{ V} + V_2 = 40 \text{ V}}$$

4. Iz geometrije zapišemo:

$$r = 25 \text{ cm}$$

$$d = 40 \text{ cm}$$

$$a = 3 \text{ mm}$$

$$\cos \varphi = \frac{d/2}{r}$$

Izrazimo naboj z napetostjo:

$$U = 250 \text{ V} = 2 \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} \rightarrow \frac{q}{\pi\epsilon_0} = \frac{U}{\ln \frac{d}{a}}$$

Električna poljska jakost, ki jo v točki  $T$  povzroča levi oziroma desni vodnik, je po iznosu:

$$E_L = E_D = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Prispevek levega oziroma desnega vodnika v smeri osi  $x$  znaša:

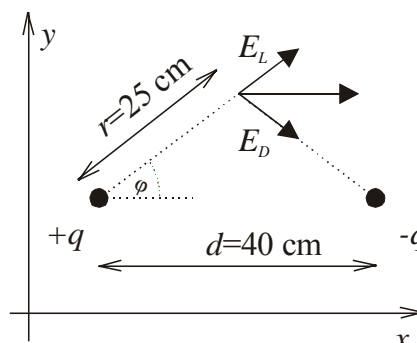
$$E_{Lx} = E_{Dx} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \varphi$$

Prispevka obeh v smeri osi  $y$  si med seboj nasprotuje, zato se ravno izniči.

Prispevka vodnikov v smeri osi  $x$  superponirata:

$$E = E_{Lx} + E_{Dx} = 2E_{Lx} = \frac{U}{\ln d/a} \frac{d/2}{r^2}$$

$$\underline{E \doteq 163,5 \text{ V/m}}$$



5. Opravljeno delo je enako  $A = Q \cdot U_{21} = Q \cdot (V_2 - V_1)$

$$q = 10^{-4} \text{ C/m}$$

$$Q = 10^{-6} \text{ C}$$

$$a = 5 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{a\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a\sqrt{2}}{a}$$

$$A = Q \cdot U_{21} = Q \cdot (V_2 - V_1) = \frac{Q \cdot q}{2\pi\epsilon_0} \ln 2$$

$$\underline{A \doteq 1,25 \text{ J}}$$