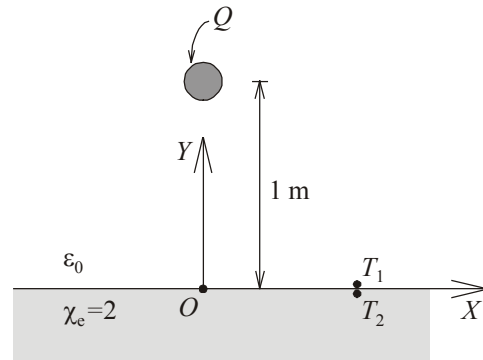


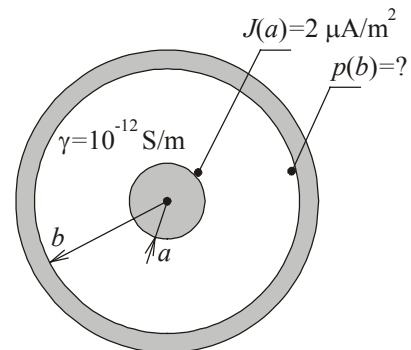
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)
drugi kolokvij, 28. januar 2003

1. Naelektrena prevodna kroglja, polmera 5 cm, se nahaja 1 m nad ravno dielektrično podlago. Električna susceptibilnost podlage je 2. V neki točki T_1 tik nad površino podlage smo izmerili vektor električne poljske jakosti: $\vec{E}(T_1) = (2\vec{e}_x - 9\vec{e}_y)$ kV/m. Kolikšen je vektor električne poljske jakosti v točki T_2 , ki se nahaja v dielektrični podlagi tik pod točko T_1 ?

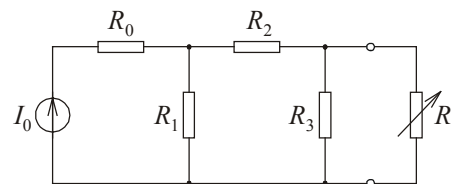


2. Simetričen dvovod, dolžine 100 m, polmera vodnikov 1 mm in medosne razdalje 10 cm, naelektrimo z virom napetosti 10 kV in potem vir odklopimo. Koliko dela je potrebno vložiti, da se dvovodu poveča medosna razdalja na dvakratno vrednost? (Ekscentričnost zanemarite.)
3. Določite razmerje $r = C_1 / C_2$ kapacitivnosti dveh kondenzatorjev, da bosta nadomestni kapacitivnosti njune vzporedne oz. zaporedne vezave v razmerju 5!

4. Specifična prevodnost izolacije sferičnega kondenzatorja je $\gamma = 10^{-12}$ S/m, polmer notranje elektrode $a = 1$ cm in notranji polmer zunanje elektrode $b = 2$ cm. Kondenzator je priklopljen na napetostni vir in skozi njegovo izolacijo teče izolacijski tok. Absolutna vrednost vektorja gostote tega toka znaša tik pred površino notranje elektrode $2 \mu\text{A}/\text{m}^2$. Kolikšna je volumska gostota Joulskih izgub neposredno ob notranji površini zunanje elektrode?



5. Kolikšna je maksimalna moč na spremenljivem uporu? Vrednosti elementov vezja so: $R_0 = R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ in $I_0 = 4 \text{ mA}$.



Rešitve so objavljene na: <http://torina.fe.uni-lj.si/oe>

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (UNI)

drugi kolokvij, 28. januar 2003

Rešitve

1. Dielektričnost podlage označimo z $\varepsilon_1 = (\chi_e + 1)\varepsilon_0 = 3\varepsilon_0$. Vektor električne poljske jakosti, ki ga poznamo tik nad površino podlage v točki T_1 , lahko določimo tik pod površino podlage v točki T_2 z uporabo mejnih pogojev. Glede na izbrani koordinatni sistem je x -komponenta tangencialna na mejo in zato ta komponenta poljske jakosti prehaja mejo zvezno: $E_x(T_2) = E_x(T_1) = 2 \text{ kV/m}$. Komponenta y je normalna na mejo in je zato zvezna pri vektorju gostote električnega pretoka: $\varepsilon_1 E_y(T_2) = \varepsilon_0 E_y(T_1) \Rightarrow E_y(T_2) = E_y(T_1)\varepsilon_0/\varepsilon_1 = -3 \text{ kV/m}$. Vektor električne poljske jakosti v točki T_2 je: $\vec{E}(T_2) = \boxed{(2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \text{ kV/m}}$.

2. Delo, ki ga vložimo za povečanje medosne razdalje dvovoda na dvakratno vrednost, se porabi za povečanje energije elektrostatičnega sistema: $A = W_{e2} - W_{e1}$, kjer smo z W_{e1} in W_{e2} označili začetno oz. končno energijo. Začetna energija je enaka:

$$W_{e1} = \frac{Q^2}{2C_1}, \text{ kjer je } C_1 \text{ začetna kapacitivnost dvovoda, } Q \text{ pa množina elektrine na njem. Če z } U \text{ označimo napetost vira, s katerim smo naelektrili dvovod, potem je } Q = C_1 U.$$

Pri povečevanju razdalje med vodnikoma ostaja množina elektrine na dvovodu nespremenjena (zakon o ohranitvi elektrine). Končna energija sistema je:

$$W_{e2} = \frac{Q^2}{2C_2}, \text{ kjer je } C_2 \text{ kapacitivnost dvovoda pri dvakratni medosni razdalji. Iskano delo je torej: } A = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_1^2 U^2}{2C_2} - \frac{C_1^2 U^2}{2C_1} = \frac{C_1 U^2}{2} \left(\frac{C_1}{C_2} - 1 \right).$$

Določiti moramo še

kapacitivnosti C_1 in C_2 . Dolžino dvovoda, polmer njegovih vodnikov in začetno medosno razdaljo označimo po vrsti z $l = 100 \text{ m}$, $\rho_0 = 1 \text{ mm}$ in $d = 10 \text{ cm}$.

Kapacitivnost dvovoda je enaka razmerju elektrine na njem in napetosti med njegovima vodnikoma: $C = \frac{ql}{U}$, $U = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} \ln d/\rho_0$. Začetna kapacitivnost je potem:

$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln d/\rho_0}, \text{ končna pa } C_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln 2d/\rho_0}.$$

Ta izraza za kapacitivnost vstavimo v

enačbo za delo: $A = \frac{\pi\varepsilon_0 l U^2}{2 \ln d/\rho_0} \left(\frac{\ln 2d/\rho_0}{\ln d/\rho_0} - 1 \right) \cong \boxed{4.54 \text{ mJ}}$.

3. Nadomestno kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev označimo z $C_v = C_1 + C_2$, zaporedne vezave pa z $C_z = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Razmerje obeh nadomestnih

kapacitivnosti je enako 5: $\frac{C_v}{C_z} = \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1 C_2} = 5 \Rightarrow C_1^2 + 2C_1 C_2 + C_2^2 = 5C_1 C_2$. To

enačbo delimo z C_2^2 in upoštevajmo okrajšavo $r = C_1/C_2$: $r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow$

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \cong \left\langle \begin{array}{l} 2.62 \\ 0.382 \end{array} \right\rangle.$$

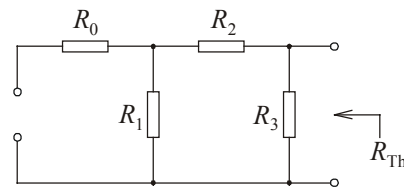
Izračunani vrednosti razmerja kapacitivnosti sta si inverzni ($r_1 = 1/r_2$), saj imata kondenzatorja simetrično vlogo v zaporedni ali vzporedni vezavi.

4. V izolaciji sferičnega kondenzatorja upadeta električna poljska jakost in gostota električnega toka s kvadratom oddaljenosti od središča kondenzatorja: $J(r) = \gamma E(r) \propto 1/r^2$. Produkt gostote toka in kvadrata oddaljenosti od središča kondenzatorja je torej med njegovima elektrodama konstanten: $r^2 J(r) = a^2 J(a) = b^2 J(b)$. Iz te enačbe lahko izračunamo tokovo gostoto tik pred notranjo površino zunanje elektrode: $J(b) = (a/b)^2 J(a) = 0.5 \mu\text{A}/\text{m}^2$. Volumska gostota Joulskih izgub je sorazmerna kvadratu tokove gostote: $p(b) = J^2(b)/\gamma = \boxed{0.25 \text{ W}/\text{m}^3}$.

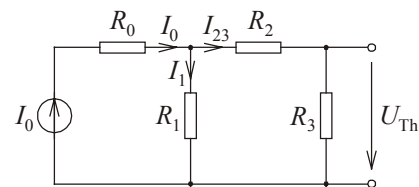
5. Najprej določimo Theveninov nadomestni vir za del vezja levo od sponk spremenljivega upora.

Pri določanju Theveninove upornosti deaktiviramo tokovni vir (nadomestimo ga z odprtimi sponkami):

$$R_{\text{Th}} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_3 + (R_1 + R_2)} = 4/3 \text{ k}\Omega.$$



Theveninova napetost je napetost med (odprtima) sponkama, med katerima se v originalnem vezju nahaja spremenljiv upor. Tok I_0 se razdeli na toka I_1 , ki teče skozi upor R_1 , in I_{23} , ki teče skozi zaporedno vezavo uporov R_2 in R_3 . Ker je $R_1 = R_2 + R_3 = 3 \text{ k}\Omega$, sta toka I_1 in I_{23} enaka: $I_1 = I_{23} = I_0/2 = 2 \text{ mA}$. Theveninova napetost je enaka napetosti na tretjem upor: $U_{\text{Th}} = R_3 I_{23} = 4 \text{ V}$.



Maksimalna moč na spremenljivem uporu je: $P_{\text{max.}} = \frac{U_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{Th}}} = \boxed{3 \text{ mW}}$.