

E-polje tankega prstana (glej sliko 11.4):

a.) diferencial elektrine na prstanu je v razmerju s koti: $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\varphi}{2\pi}$;

z besedami je diferencial elektrine na prstanu dQ proti celotnemu naboju prstana Q enak razmerju diferenciala kota $d\varphi$ proti kotu celotnega kroga, ki je 2π . Diferencial elektrine je

$$\text{torej: } dQ = Q \frac{d\varphi}{2\pi}$$

b.) trikotnik ki ga tvorijo stranice dE_z, dE in kot ϑ da enačbo:

$$dE_z = dE \cos \vartheta$$

c.) kot ϑ je tudi kot v trikotniku s stranicami \bar{R}, z in ρ (polmer prstana):

$$\cos \vartheta = z / R$$

d.) vnesemo c.) v b.) in dobimo:

$$dE_z = \frac{z}{R} dE$$

Formula za diferencial točkaste elektrine je $d\bar{E}(T) = \bar{R} \frac{dQ(T')}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ oziroma $dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

e.) Vnesemo in a.) v formulo za diferencial točkaste elektrine in dobimo $dE = \frac{Q d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ potem

vstavimo še b.) in dobimo $dE_z = \frac{Qz d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 R^3}$.

Sedaj je za celotno polje E potrebno sešteti (integrirati) vse diferencialne prispevke dE in dobimo integral:

$$E_z(T) = E_z(z) = \int_a^b \frac{Qz d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 R^3}$$
 integriramo po kotu (diferencial je $d\varphi$), se pravi da so vse

ostale spremenljivke pod integralom konstantne in jih smemo izpostaviti pred integral.

Integriramo po celotnem prstanu, se pravi kot φ teče od 0 do 2π . Torej:

$$E_z = \frac{Qz}{8\pi^2 \epsilon_0 R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Qz}{8\pi^2 \epsilon_0 R^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{Qz 2\pi}{8\pi^2 \epsilon_0 R^3}$$

upoštevamo pitagorov izrek v trikotniku s stranicami R, ρ in z ; $R^2 = \rho^2 + z^2$ oziroma

$$R = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \text{ vstavimo v enačbo za } E_z \text{ in dobimo končno enačbo: } E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$