

## Kazalo

Uvod.....	2
Nekaj vprašanj.....	4
Magnetnostatično polje.....	8
Vektor gostote magnetnega pretoka.....	9
Magnetni pretok.....	10
Neizvornost magnetnega polja.....	10
Vrtinčnost magnetnega polja.....	10
Sile in delo magnetnega polja.....	11
Snov v magnetnem polju.....	12
Vektor magnetne poljske jakosti.....	13
Magnetne lastnosti snovi.....	13
Mejni pogoji magnetnega polja.....	15
Skalarni magnetni potencial.....	16
Magnetna vezja.....	17
Dinamično elektromagnetno polje.....	18
Uvod v elektrodinamiko.....	18
Faradejev zakon indukcije.....	19
Medsebojna in lastna induktivnost.....	21
Energija magnetnega polja.....	22
Razširjen Amperov zakon toka.....	23
Enačbe elektromagnetnega polja.....	24
Osnove elektromagnetnega valovanja in difuzije.....	27
Električna vezja spremenljivih tokov.....	27
Uvod v linearna električna vezja.....	27
Elementi linearnih električnih vezij.....	27
Kirchhoffova zakona in bilanca moči.....	28
Osnove prehodnih pojavov.....	29
Harmonično vzbujana električna vezja.....	30
Kompleksni račun.....	30
Metode reševanja harmonično vzbujanih vezij.....	32
Stavki o harmonično vzbujanih vezjih.....	32
Posebne vezave elementov.....	33
Trifazni sistem napetosti.....	34
Zahvala.....	37

## Uvod

Za začetek naj vam povem to. Najprej si enkrat preberite vse v knjigi.

Pred vami so povzetki iz knjige Antona R. Sinigoja: Osnove elektromagnetike od strani 247 pa do 462. Ti izpiski so potrebni še dodelave, saj je kar precej snovi pomanjkljivo podane . Zato vas pozivam k temu, da te zapiske popravite, dodelate, oblikujete... in jih potem seveda ponovno naložite na internet ter s tem pomagajte tako sebi kot tudi drugim možnost do čim boljših zapiskov za dosego čim boljših rezultatov.

Vse enačbe, ki so v učbeniku očitane so tu podane na plavi podlagi(predvsem zato, ker sem ugotovil kako se da enostavno očitati enačbe šele pri koncu). Enačbe so spisane v Microsoft Wordu 2007(tu nočem delati neke reklame, ampak če so v enačbah kakšne napake računam na to da jih boste popravili).

Hvala, uživajte v učenju kolikor se to pač da in srečno.

---

Ah, pa še par vicu, ku jmamo lih cajt ☐

Old Electrical Engineers never die:

- they just have slower rise times.
- they just loose contact.
- they just do it until it Hz. (Hertz)

To the optimist, the glass is half full. To the pessimist, the glass is half empty. To the engineer, the glass is twice as big as it needs to be.

A pastor, a doctor and an engineer were waiting one morning for a particularly slow group of golfers. The engineer fumed, "What's with these guys? We must have been waiting for 15 minutes!" The doctor chimed in, I don't know, but I've never seen such ineptitude! "The pastor said, "Hey, here comes the greens keeper. Let's have a word with him." Hi George! Say, what's with that group ahead of us? They're rather slow, aren't they?" The greens keeper replied, "Oh, yes, that's a group of blind firefighters They lost their sight saving our clubhouse from a fire last year, so we always let them play for free anytime." The group was silent for a moment. The pastor said, "That's so sad. I think I'll say a special prayer for them tonight." The doctor said, "Good idea. And I'm going to contact my ophthalmologist buddy and see if there's anything he can do for them." The engineer said, "Why can't these guys play at night?"

An engineer was crossing a road one day when a frog called out to him and said, "If you kiss me, I'll turn into a beautiful princess." He bent over, picked up the frog and put it in his pocket. The frog spoke up again and said, "If you kiss me and turn me back into a beautiful princess, I will stay with you for one week." The engineer took the frog out of his pocket, smiled at it and returned it to the pocket. The frog then cried out, "If you kiss me and turn me back into a princess, I'll stay with you and do ANYTHING you want." Again the engineer took the frog out, smiled at it and put it back into his pocket. Finally, the frog asked, "What is the matter? I've told you I'm a beautiful princess and that I'll stay with

you for a week and do anything you want. Why won't you kiss me?" The engineer said, "Look, I'm an engineer. I don't have time for a girlfriend, but a talking frog, now that's cool."

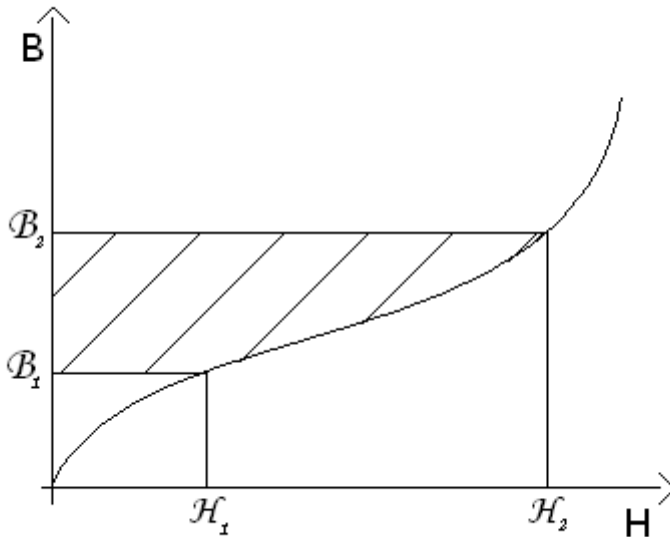
## Nekaj vprašanj

//Tu je kopija vprašanj, ki jih je anonimen študent naložil na internet leta 2008.

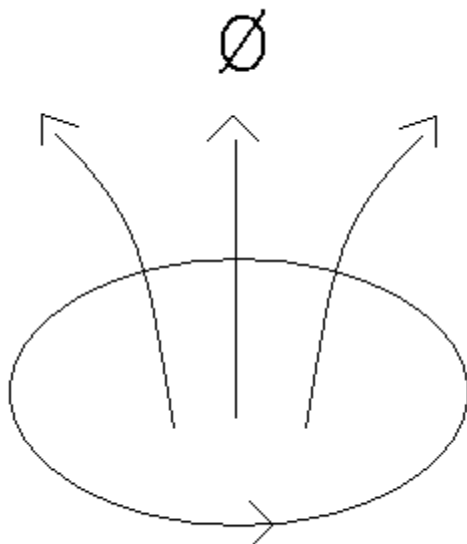
To so vsa vprašanja, ki smo jih imeli študentje na junijskih in septembrskih rokih pri doc.dr Antonu R. Sinigoju, vprašanja se namreč zelo ponavljajo zato sem jih zbral in vam jih napisal v elektronski obliki:

- 1.) Amperov zakon
- 2.) Mejni pogoji (neizvornost, vrtinčnost, od kje dobimo  $\mathbf{B}$  => neizvornost)
- 3.) Tuljave (induktivnost, napetost, energija)
- 4.) Delovna, navidezna, jalova moč (diagrami => treba povedati kaj pomeni kaj na grafu (treba ga je narisat -> tisto kar je v knjigi), definicije vseh moči)
- 5.) Stavek največje moči oz. maksimalen prenos moči (narisat "vezje", pogoji)
- 6.) Transformator (napetostno-tokovne enačbe)
- 8.) Faradejev zakon (definicija, razlaga členov v enačbi, zanka => kam kaže jakost el. Polja)
- 9.) Feromagnetiki (histerezne zanke, grafi, vse točke pri tem poglavju)
- 10.) Integral  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$  (kaj pomeni, razlaga tega integrala (GLEJ sliko 1))
- 11.) Biot-Savartov zakon (razlaga, kaj pomeni kerri člen v njem, v katerih primerih smo ga uporabili)
- 12.) Telegenov kompleks
- 13.) Energija dveh zank
- 14.) Definicija  $\mathbf{H}$  (vpraša obe enčbi, potem naveže kaj pomeni  $\mathbf{M}$  (definicija => limita)), kje smo še uporabili  $\mathbf{H}$  => gostota magnetne energije (potem pa sprašuje o tem (glej točko 10.))
- 15.) Delovna tokovna zanka (ko se premakne v prostoru, kakšno je delo)
- 16.) Indukcija (moreš narisat zanko, potem te p vpraša o pretokih, označbe, enačbe, smeri (GLEJ slika 2))
- 17.) Transformatorska in gibalna (od česa je odvisna hitrost oz na kaj se navezuje hitrost (to vpraša) odgovor je: «navezuje se na dl (torej na tokovni element)» □ simpl ko pasul, samo da tega nihče neje ve!)
- 18.) Navor na tokovno zanko
- 19.) Pretok  $\dot{Q}$  (enačba, pomembni samo robovi!)
- 20.) Resonanca (zaporedni nihajni krog, vzporedni nihajni krog, Q, B, krivulja)
- 21.) Tuljava kot strjen element (skica, narisat smer toka/napetosti, enačbe za tok/napetost, enačbe v kompleksni obliki, kako gre kazalčni diagram)
- 22.)  $\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{\Psi}$  (kje smo uporabili)
- 23.) Neizvornost
- 24.) Vrtinčnost
- 25.) Definicija jalove moči (odgovor: «jalova moč je amplituda izmenjajoče moči»)
- 26.) Prehodni pojavi
- 27.) Magnetni dipol (zakaj smo ga tako poimenovali, navor na njega)
- 28.) Kondenzator kot strjen element (skica, narisat smer toka/napetosti, enačbe za tok/napetost, enačbe v kompleksni obliki, kako gre kazalčni diagram)
- 29.) Vektor magnetizacije (definicija, enačbe, navezuje na magnetni dipol)
- 30.) Idealen brezizgubni transformator (kdaj je idealen ( $Z_v h = n \cdot n Z_b$ ), pa ostale stvari)
- 31.) Gibanje delca v homogenem polju

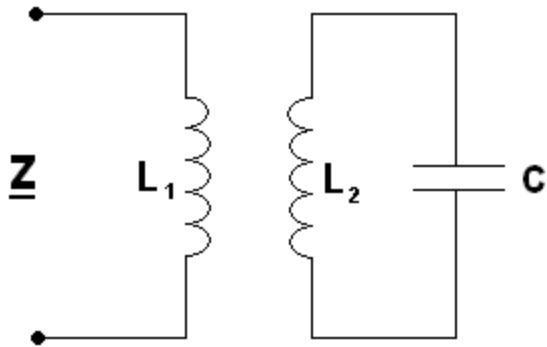
- 32.)Prehodni pojavi v kondenzatorju in tuljavi(napisat kako tok in napetost prehajata pri polnjenju in praznjenju)
- 33.)Dve sklopljeni tuljavi (moreš izračunat induktivnost ali izračunati energije ali pa inducirano napetost)
- 34.)Izračun impedance ?? (GLEJ:slika 3)
- 35.)izračun napetosti dveh tuljav ?? (GLEJ: slika 4)
- 36.)Izračun delovne ali jalove moči?? (GLEJ:slika 5)



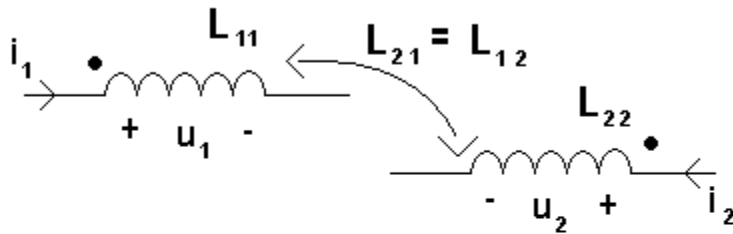
Slika 1: Integral  $\int H \cdot dB$  pomeni površino med podanim grafom ter ordinatno osjo



Slika 2: Inukcija



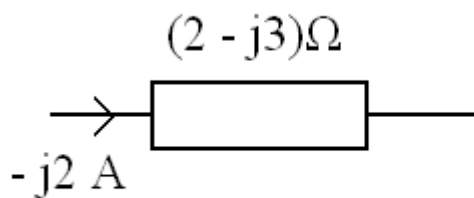
Slika 3: Izračunaj impedanco



Rešitev:

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} - L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

Slika 4: Medsebojna induktivnost



Slika 5: Izračunaj medsebojno in lastno induktivnost

### **Opomba:**

Na ustnem so se vprašanja več ali manj ponavljala, so pa nekatera med njimi, ki so se še posebej velikokrat ponovila( izračun jalove in delovne moči, definicije delovne in jalove moči, stavek največje moči, indukcija, Biot-Savartov zakon, tuljava/kondenzator kot strjen element).

Predlagam vam, da se s kolegi na ustnem pogovorite, kaj so si zbrali na ustnem, saj profesor nima rad, da se vprašanja preveč ponavljajo(v junijskem oz. septembrskem roku so si skoraj vsi zbrali mejne pogoje, zato jim profesor tega vprašanja ni več dovolil)

Po navadi profesor navezuje vprašanja, tako da si malo pogledjte povezave oz. na kaj bi lahko navezali.

Izpeljave niso pomembne, pomembne so le glavne formule ter skice.

In najpomembneje:PAZITE DA OZNAČUJETE VEKTORJE(v knjigi od Sinigoja so označeni krepko; npr **H**, **B** ) IN SKALARNE PRODUKTE V INTEGRALIH (npr.  $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$  ), drugače boste deležni kritike, kak slabi inženirji ste!

Želim vam veliko sreče!

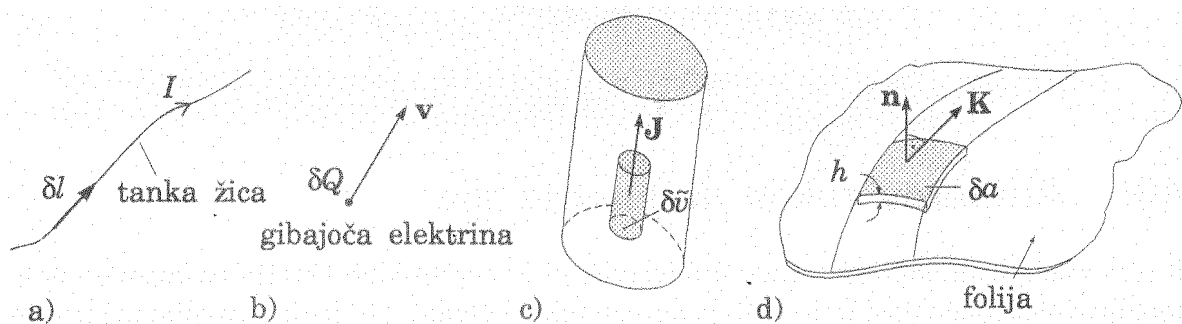
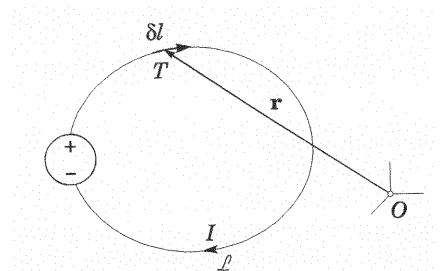


# Magnetnostatično polje

## Amperov zakon magnetne sile

### Tokovni element

Imamo zanko in vir, ki po zanki poganja istosmerni tok. Zanko razumemo kot niz kratkih odsekov  $\delta l$  vzdolž toka. Vsakemu pripada točka T s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$ . Takim segmentom kroga pravimo tokovni elementi.

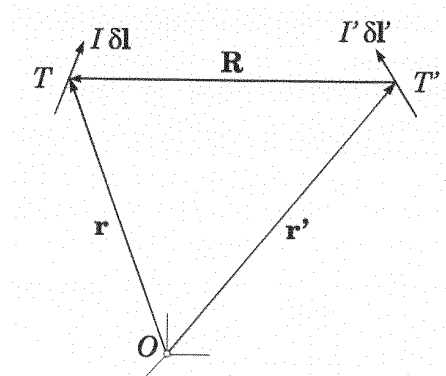


Slika : Različne prostorske konfiguracije tokovnih elementov

### Jakost oz. moment tokovnega elementa

$$I \delta l = \delta Q \dot{v} = \mathbf{J} \delta v = \mathbf{K} \delta a$$

### Amperov zakon magnetne sile



Amperovo magnetno silo na tokovi element v praznem prostoru zapišemo kot:

$$\delta \vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I \delta \vec{l} \times \left( I' \delta \vec{l}' \times \frac{\vec{R}}{R} \right)$$

Sili  $\delta \vec{F}_m$  in  $\delta \vec{F}_m'$  nista vzajemni, ne skladata se niti po smeri, niti po velikosti.

### Primerjava Coulombove in Amperove sile (prvič)

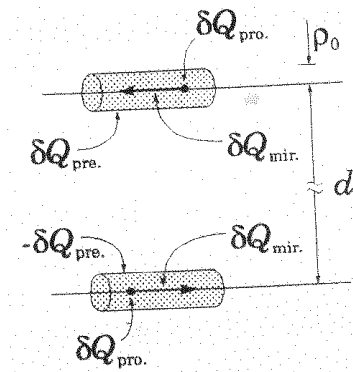
Imamo dve elektrini, ki se vzporedno gibljeta z enakima hitrostima. Elektrinama pripadata momenta. Magnetna sila bo privlačna, medtem ko bo Coulombova sila odbojna. Skupna sila bo odbojna.



Slika : Dve vzporedno gibajoči elektrini

### Primerjava Coulombove in Amperove sile (drugič)

Imamo napetostni generator, ki preko dvovoda napaja breme. Izberemo si dva nasprotiležna tokovna elementa. V tokovnem elementu imamo prosto elektrino  $\delta Q_{\text{prosta}}$ , ki jo predstavljajo mobilni elektroni, ki se gibajo v nasprotni smeri toka. Imamo tudi mirujočo strukturo elektrin  $\delta Q_{\text{mirujoča}}$ , ki je v vsakem delčku volumna tokovnega elementa uravnotežena z  $\delta Q_{\text{prosta}}$ .  $\delta Q_{\text{mirujoča}} + \delta Q_{\text{prosta}} = 0$ . Ne povzročata polja E v prostoru. Poleg teh dveh pa imamo na površini tokovnih elementov še presežno elektrino  $\delta Q_{\text{presežna}}$ . Iz tega je razvidno, da bo za magnetno silo med tokovnim elementoma odgovorna  $\delta Q_{\text{prosta}}$ , za električno silo pa  $\delta Q_{\text{presežna}}$ .



### Vektor gostote magnetnega pretoka

Izhajali bomo iz Amperovega zakona za časovno konstantne toke, za katere velja brezizvornost. Zapišemo še enkrat

magnetno silo na tokovni element.

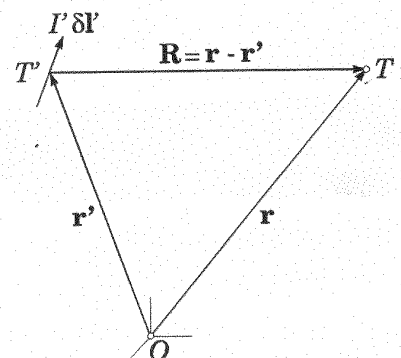
$$\delta \vec{F}_m = I \delta \vec{l} \times \left( \frac{\mu_0 I' \delta \vec{l}' \times \vec{R}}{4\pi R^3} \right)$$

Iz izraza vidimo, da tokovnemu elementu  $I' \delta \vec{l}'$  pripada v prostoru vektorsko polje  $\mathbf{B}$ . Magnetno polje okarakterizira vektor gostote magnetnega pretoka  $\mathbf{B}$ .

### Biot-Savartov zakon

Zakon, ki tokovnemu elementu v točki  $T'$  priredi vektor gostote magnetnega pretoka (v splošni točki),

zapišemo z izrazom (enota je T (tesla)  $\left[ \frac{Vs}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} \right]$ ):



$$\delta \dot{B}(T) = \frac{\mu_0 I' \delta \dot{I}' \times \dot{R}}{4\pi R^3}$$

Kot vzporedniko k Biot-Savartovem zakonu moramo navesti izraz za elektrostatično polje točkaste elektrine. Tako kot je bil slednji iztočnica za elektrostatično polje, bo Biot-Savartov zakon za magnetno pole.

**Integralni Biot-Savartov zakon:**

$$\dot{B}(T) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(I_{cel})} \frac{\dot{J}(T') \times \dot{R}}{R^3} dv'$$

Ko pa je  $\mathbf{B}$  enkrat znan, je magnetna sila na tokovni element določena z vektorskim produktom:

$$\delta \dot{F}_m = I \delta \dot{l} \times \dot{B}$$

**Magnetno polje tokovnega elementa**

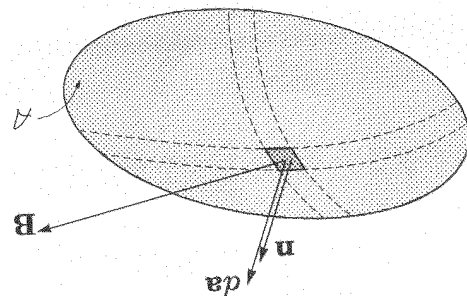
Kot analogijo vzamemo električno polje točkaste elektrine. Razvidno je, da magnetno polje pada s kvadratom razdalje in da je magnetno polje še kotno odvisno. Vplivnost električnega točkastega vira v okolico je izotropna (enakovredna v vseh smereh), vplivnost magnetnega točkastega vira pa je anizotropna (neenakovredna v posameznih smereh).

### Magnetni pretok

Vpeljemo nov pojem, imenovali ga bomo magnetni pretok oziroma magnetni fluks. Definiran je kot pretok gostote  $\mathbf{B}$  skozi orientirano ploskev **A**.

Če nas zanima pretok v nasprotni smeri je potrebno normalo  $\mathbf{n}$  obrniti v  $-\mathbf{n}$ . Številska vrednost pretoka bo nasprotno predznačena.

$$\Phi_{\text{skozi } A} = \int_A \dot{B} \circ d\dot{a} \quad [Vs, Wb (\text{weber})]$$



### Neizvornost magnetnega polja

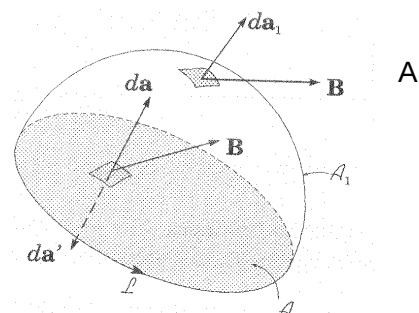
Razdelek bi lahko naslovili tudi kot Gaussov stavek polja  $\mathbf{B}$ . Osrednje vprašanje bo, kolikšen je pretok  $\mathbf{B}$  skozi sklenjeno ploskev **A**.

$$\oint_A \dot{B} \circ d\dot{a} = 0$$

Dobljena enačba je tudi III. Maxwellova enačba, ki pravi, da je magnetno polje  $\mathbf{B}$  brezizvorno.

**Posledica neizvornosti magnetnega pretoka**

V prostoru imamo konturo L, na katero napnemo dve opni in  $A_1$ . Pozitivna smer normale na ploskvi je tista, ki jo



dobimo po desnem pravilu. Fluks skozi katerokoli opno napeto na L je neodvisen od odlike opne. Pretok ni odvisen od opne, ampak samo od konture na katero je napeta.

$$\varphi = \int_A \vec{B} \circ d\vec{a}$$

$$\varphi_1 = \int_{A_1} \vec{B} \circ d\vec{a}_1$$

Slika : Pretok skozi dve opni, ki sta napeti na skupno

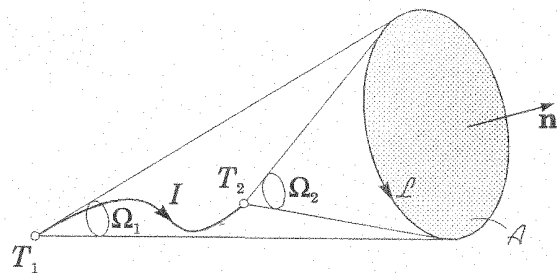
### Vrtinčnost magnetnega polja

Stokesov stavek vektorja **B**

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_2 - \Omega_1)$$

Vrtinčnost **B** je za nesklenjeno tokovno nit med T in T.

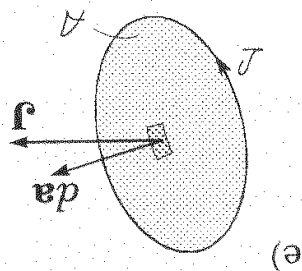
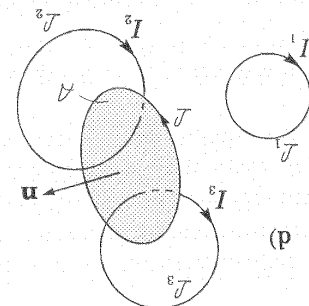
$$\int_{T_1, L, T_2} d\Omega_{traku} = \Omega_1 - \Omega_2$$



### Vrtinčnost magnetnega polja sklenjenih tokov

Krivuljni integral vektorja **B** vzdolž sklenjene krivulje L je sorazmeren vsoti tokov, ki opno A na konturi L prestopijo v pozitivnem smislu.

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \sum_{j=1}^n (\pm) I_j = \oint_L \vec{j} \circ d\vec{a}$$



$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{l} = \mu_0 \int_A \vec{j} \circ d\vec{a}$$

### Sile in delo magnetnega polja

#### Naelektren delec v polju

Gibalna enačba za gibanje delca v vakuumu ob prisotnosti **E** in **B**:

$$-\delta m \dot{v} + \delta Q (\vec{E} + \dot{v} \times \vec{B}) = 0$$

#### 1.) Gibanje naelektrenega delca v homogenem električnem polju

Gibalna enačba:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta Q}{\delta m} \dot{\mathbf{E}}$$

Dobljeno gibanje je v smeri začetne hitrosti enakomerno, v smeri električnega polja ( $\dot{\mathbf{E}}$ ) pa pospešeno, trajektorija je parabola (analogija s kinematiko – poševni met)

## 2.) Gibanje naelektrnega delca v homogenem magnetnem polju

Gibalna enačba:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\delta Q}{\delta m} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}})$$

Razstavimo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{pravokotna}} + \mathbf{v}_{\text{vzporedna}}$ . Absolutna vrednost hitrosti se ohranja, magnetna sila je pravokotna na  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{v}_{\text{pravokotna}}$ . Delec enakomerno kroži z radialnim pospeškom, ki je enak odvodu  $\mathbf{v}_{\text{pravokotna}}$ . Po drugi strani pa se zaradi  $\mathbf{v}_{\text{vzporedna}}$  giblje enakomerno. Tir je spirala.

## Vzajemnost magnetnih sil med dvema togima tokovnimi zankama

Vzemimo dve togi tokovni zanki L1 in L2 s tokoma I1 in I2.

$$\mathbf{F}'_{m1} + \mathbf{F}'_{m2} = 0$$

Medsebojni magnetni sili med togima tokovnimi zankama sta vzajemni.

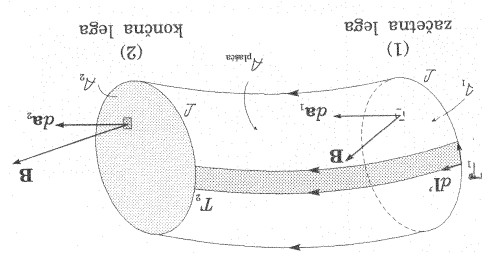
## Delo magnetnih sil

Imamo zanko v prostoru, ki se premakne od neke začetne lege do končne lege. Delo je:

$$\dot{W}_m = I \oint_L d\mathbf{l} \times \dot{\mathbf{B}}$$

Ugotovimo, da če se tokovna zanka lahko giba, se bo vedno premaknila tako, da se bo pretok skozi njo v referenčni smeri povečal.

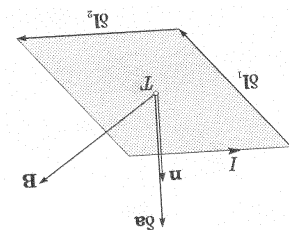
$$A_m = I(\varphi_2 - \varphi_1)$$



## Navor na tokovno zanko v magnetnem polju

Zanka naj bo tako majhna, da je magnetno polje enakomerno homogeno.

$$\delta M_m = I \delta \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{B}}$$



Težnja navora je poravnati  $\delta \mathbf{a}$  z  $\mathbf{B}$  (zasukati zanko v stabilno lego), da se pretok skozi zanko zaradi  $\mathbf{B}$  in lastni pretok zanke podpirata.

### Magnetni dipol in magnetni dipolski moment

Majhno tokovno zankico razumemo kot točkasti magnetni dipol, priredimo ji magnetni dipolski moment:

$$\delta \dot{m} = I \delta \dot{a}$$

Navor na tokovno zankico z momentom:

$$\delta \dot{M}_m = \delta \dot{m} \times \dot{B}$$

### Snov v magnetnem polju

Do sedaj smo magnetno polje obravnavali le v vakuumu in pogojno v prevodnikih, ki vodijo konduktivne toke in nimajo magnetnih lastnosti.

### Gostota magnetnih dipolskih momentov

Kos poljubnega materiala postavimo v magnetno polje. Notranji, Amperovi tokovi so permanentno prisotni ali pa se pod vplivom polja šele inducirajo. Permanentni dipoli se težijo postaviti v smer polja  $\mathbf{B}$ , medtem ko se inducirani dipoli formirajo v obratni smeri. V majhnem volumnu snovi bi bilo smiselno govoriti o vektorski vsoti dipolnih momentov  $\delta \mathbf{m}$  in o volumski gostoti momentov  $\mathbf{M}$ .

V nadaljevanju bomo za to gostoto uporabljali nov termin – vector magnetizacije.

$$\dot{M} = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta \dot{m}}{\delta v}$$

### Vektor magnetne poljske jakosti

Z vpeljavo vektorja  $\mathbf{H}$ , ki je izključno vezan na makroskopske (merljive) toke, se znebimo vektorja  $\mathbf{M}$ , ki je vezan na nepoznano porazdelitev internih Amperovih tokov:

$$\dot{H} = \frac{\dot{B}}{\mu_0} - \dot{M}$$

In še dalje:

$$\oint_L \dot{H} \circ d\mathbf{l} = \int_A \dot{J}'_{kond.} \circ d\mathbf{a}$$

Enačbo imenujemo vrtničnost vektorja  $\mathbf{H}$  oziroma Amperov zakon toka. Prebrali pa bi ga takole: sklenjen krivuljni integral vektorja magnetne poljske jakosti je enak pretoku konduktivnega toka skozi opno na konturi v pozitivnem smislu.

## Magnetne lastnosti snovi

Zanima nas zveza med **B**, **M** in **H**.

### Magnetna susceptibilnost

Opreljuje zvezo med vektorjema **H** in **M**.

$$\dot{M} = \chi_m \dot{H}$$

$\chi_m$  je lahko:

- Sorazmernostni factor, če je magnetic linearen
- Funkcija **H**-ja ali **B**-ja, če bo snov nelinearna
- Tenzor, če je snov anizotropna

$$\dot{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \dot{H} = \mu_0 \mu_r \dot{H} = \mu_0 \mu_r \dot{H} = \mu \dot{H}$$

$\mu_0$  – permeabilnost vakuuma

$\mu_r$  – relativna permeabilnost

$\mu$  – permeabilnost snovi

$$\dot{B} = \mu_0 \dot{H} + \mu_0 \dot{M} = \mu_0 \dot{H} + \dot{I}$$

**I** –vektor magnetne polarizacije

### Diamagnetizem

Snov se ne magnetizira, obnaša se kot prazen prostor.

$$\dot{B} = \mu_0 \dot{H}$$

$$\mu_r = 0,9999XX$$

### Paramagnetizem

Snov se ne magnetizira, obnaša se kot prazen prostor.

$$\dot{B} = \mu_0 \dot{H}$$

$$\mu_r = 1,0000XX$$

### Feromagnetizem

Magnetna susceptibilnost je izredno visoka od nekaj sto do nekaj sto tisoč. Sosednji atomi v kristalni strukturi so razporejeni v Weissove domene, znotraj katerih so magnetni dipolski momenti istosmerno orientirani. Pod vplivom zunanjega polja **B** se ti momenti začnejo obračati v smeri polja – magnetenje.

1.) Začetna krivulja magnetenja – deviška krivulja

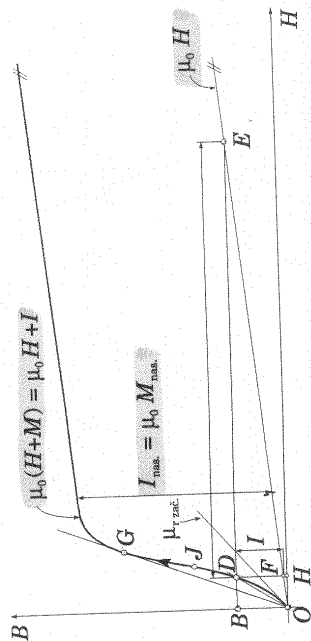
Prvi od diagramov soodvisnosti med  $\dot{H} \in \dot{B}$  je t.i. začetna magnetilna krivulja. Za začetno

faco magnetenja je karakteristična reverzibilnost. V drugi fazi, se domene sunkoma obračajo.

V zadnji fazi – fazi zasičenja – so domene v celoti orientirane. Magnetizacija doseže

maksimum, kar pomeni, da je naklon magnetilke v zasičenju enak permeabilnosti vakuuma.

$$H = \frac{B}{\mu_0} M(B)$$



2.) Gostota ( $\dot{B}$ ), jakost ( $\dot{H}$ ), magnetizacija ( $\dot{M}$ ) in polarizacija ( $\dot{I}$ ) v ( $\dot{H}, \dot{B}$ ) diagramu

3.) Relativna permeabilnost

- Statična

$$\mu_{rs} = \frac{B}{\mu_0}$$

- Dinamična

$$\mu_{rd} = \frac{dB}{dH} \mu_0$$

- Začetna

$$\mu_{rd} = \mu_{rs} = \mu_{r,zac.}$$

Slika : Količine B, H, M in I v deviški krivulji

4.) Curiejeva temperatura

Nad Curierjevo temperaturo  $T_c$ , ki je vsakemu feromagnetiku svojska, se magnetik obnaša kot paramagnetna snov. Npr. Železo nad  $770^\circ \text{C}$ .

5.) Remanentna gostota ( $B_r$ )

To je gostota, ki jo feromagnetik zadrži, ko se magnetilni tok prekine.

6.) Histerezna zanka



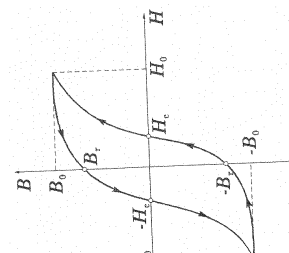
Če si zamislimo, da se magnetna jakost izmenoma spreminja od  $H_0$  do  $-H_0$  in obratno, potem usmerjanje domen vseskozi fazno zaostaja (kasni). Kasnilna pentlja je v takem primeru simetrična. To fazno zaostajanje podaja v  $(H, B)$  diagramu t.i.

histerezna zanka. Točna na diagramu  $H_c$  se imenuje koercitivna poljska jakost; to je tista potrebna poljska jakost magnetnega polja v nasprotni smeri, ki izniči učinek še preostale magnetizacije, da je  $B = 0$ . Površina kasnilke je povezana z histereznimi izgubami.

Glede na širino pentlje ločimo:

**Trdomagnetne materiale (skoraj pravokotna pentlja)**

- Mehkomagnetne materiale (skoraj »brez površine«)



Slika : Simetrična

7.) O antimagnetikih in ferimagnetikih

- Antimagnetiki se obnašajo kot neferomagnetiki, saj imajo dipolske momente poravnane vzporedno, a z nasprotno usmerjenostjo
- Ferimagnetiki imajo enako poravnano, le da ti še vedno formirajo domene. Polarizacija nasičenja je petina tiste pri feromagnetikih.

### Mejni pogoji magnetnega polja

Izhajamo iz brezizvornosti magnetne gostote  $\mathbf{B}$  in iz vrtinčnosti magnetne jakosti  $\mathbf{H}$ . To sta enačbi makroskopskih količin magnetnega polja in veljata povsod, torej tudi na meji dveh različnih snovi.

#### Mejni pogoj vektorja $\mathbf{B}$

Beremo kot: Normalna komponenta vektorja  $\hat{\mathbf{B}}$  prestopa mejo dveh snovi zvezno.

$$\begin{aligned} &+\hat{\mathbf{i}} \\ &T_i \\ &\hat{\mathbf{i}} \\ &-\hat{\mathbf{i}} \\ &T_i \\ &\hat{\mathbf{B}}_i \\ &n \circ \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

#### Mejni pogoj vektorja $\mathbf{H}$

Beremo kot: tangencialna komponenta vektorja magnetne poljske jakosti napravi na meji (s ploskovnim tokom) skok v velikosti ploskovnega toka, ki je pravokoten na tangencialno smer.

Če na meji ni tokovne obloge, prehaja tangencialna komponenta vektorja  $\mathbf{H}$  mejo zvezno.

$$\begin{aligned} &+\hat{\mathbf{i}} \\ &T_i \\ &\hat{\mathbf{i}} \\ &-\hat{\mathbf{i}} \\ &T_i \\ &\hat{\mathbf{H}}_i \\ &\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Če privzamemo linearnost magnetika, potem se mejna pogoja združita v t.i. zakonitosti preloma magnetnega polja (ko je  $K = 0$ ).

## Skalarni magnetni potencial

Če smo izven območja toka ( $J = 0$ ) in so izbrane sklenjene zanke L takšne, da ne objamejo nobenega toka, potem je Amperov zakon toka homogen:

$$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{l} = 0$$

Lahko bi rekli, da je magnetna jakost nevrtnična izven toka in v konturah, ki toka ne objamejo.

Ob naštetih pogojih velja:

- Potencialni razliki ustreza krivuljni integral jakosti  $\mathbf{H}$  po katerikoli dovoljeni poti

$$V_m(T_1) - V_m(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \vec{H} \circ d\vec{l}$$

- Razlika potencialov ustreza magnetna napetost ( $\Theta$ )

$$\Theta_{12} = U_{m12} = V_m(T_1) - V_m(T_2)$$

- Če izberemo referenčno točko R je potencial

$$V_m(T) = \int_T^R \vec{H} \circ d\vec{l}$$

- Če bomo poznali skalarno polje  $V_m$ , bo  $\mathbf{H}$  določen z odvodom v smeri normale na ekvipotencialko

$$\vec{H} = -\hat{n} \frac{\partial V_m}{\partial n}$$

## Skalarni magnetni potencial tokovne zanke

$$V_m(T) = \frac{I}{4\pi} \Omega$$

## Magnetna vezja

### Gradniki magnetne strukture

- Vira, ki sta določena z številom ovojev N in tokovnim virom I
- Magnetno polje je ujeto v feromagnetno jedro in se ohranja, presek = S, srednja dolžina poti  $l_s$
- Reža ima učinek »upora«

### Gradniki magnetnega vezja

#### 1.) Magnetni upor

Imamo kos magnetnega kanala z dolžino l in presekom S, ki je iz feromagnetika z znano (H,B) karakteristiko. Privzamemo, da je polje homogeno. Magnetna upornost:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{Hl}{BS} = \frac{\Theta}{\varphi}$$

Magnetna upornost zračne reže, ki je po navadi izrazito vredna upoštevanja:

$$R_0 = \frac{\Delta}{\mu_0 S}$$

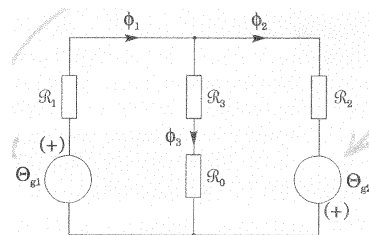
2.) Generator magnetne napetosti  
Magnetni napetostni vir z napetostjo

$$\Theta_g = N I_g$$

### Modelno magnetno vezje

Narišemo generatorske magnetne napetosti in magnetne upore. Magnetni pretok je analogen »toku«.

$$\Theta_{g1} = N_1 I_{g1} \in \Theta_{g2} = N_2 I_{g2}$$



### Analiza modelnega magnetnega vezja

Analogija - Kirchhoffova zakona. Vsota magnetnih pretokov v spojišču je enaka nič:

$$\sum_i (\pm) \varphi_i = 0 \quad \sum_j (\pm) \Theta_j = 0$$

Vsota pretokov in napetosti v zanki je enaka nič:

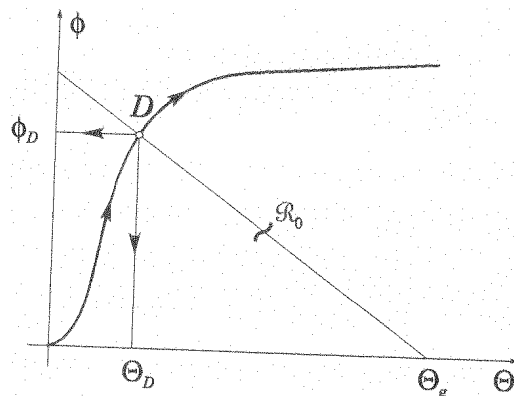
### Nelinearno magnetno vezje

Ko feromagnetno jedro ni linearno. Rešitev podajamo v ( , ) diagramu.

1.) Magnetenje po deviški krivulji

Tej enačbi v (  $\Theta, \varphi$  ) diagramu ustreza premica z naklonom  $-G_0 = \frac{-1}{R_0}$ , delovna točka

= D



2.) Magnetenje po simetrični histerezi pentlje

## Dinamično elektromagnetno polje

### Uvod v elektrodinamiko

Velja splošen ohranitveni zakon:

$$\oint_A \vec{J} \circ d\vec{a} = \frac{-d}{dt} \int_V \rho dv$$

### Snovne lastnosti v časovno spremenljivem polju

Relaksacijski časi v prevodnikih so hipni. V prevodnikih velja Ohmov zakon za poljubne časovne oblike polja:

$$\vec{J}(T, t) = \gamma \vec{E}(T, t)$$

### Polarizacijski tok

V časovno spremenljivem električnem polju se praktično »sočasno« s poljem  $\vec{E}$  spreminja tudi vektor polarizacija  $\vec{P}$ . Polarizacijskim tokovom v izolatorju pripada tokova gostota:

$$\vec{J}'_{pol.} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

### Kvazistatično polje

Če so prostorske razsežnosti struktur majhne v primerjavi z  $\lambda_m = c/f_m$ , potem moramo njim prirediti kvazistatično magnetno polje u uporabo Biot-Savartovega izreka. Enako velja za uporabo Coulombovega zakona za električno polje v izolatorju. V področju kvazistatičnosti uporabljamo Amperov zakon:

$$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{l} = \sum \text{konduktivnih tokov skozi opno } A \text{ na pentlji } L$$

Polarizacijske toke bomo zanemarili, konduktivne toke v zankah pa bomo, navkljub morebitni kondenzatorki prekinitvi, smatrali kot sklenjene.

## Faradejev zakon indukcije

### Lenzovo pravilo

Inducirani tok v zanki se vzpostavi vedno tako, da se magnetni fluks tega induciranelega toka upira časovni spremembi vzročnega fluksa v zanki.

### Samoindukcija

Inducirana napetost v zanki je posledica časovne spremembe celotnega fluksa v zanki (tako tujega, kot lastnega).

## Inducirana napetost

Če se skozi sklenjeno zanko magnetni fluks spreminja, potem se v zanki inducira napetost.

$$\oint_L \vec{E}'_{ind.} \circ d\vec{l} = u_{ind.}$$

Fluks skozi opno zapišemo kot:

$$\varphi = \int_A \vec{B} \circ d\vec{a}$$

Odnos med  $u_{ind.}$  in  $\varphi$  oz. odnos med  $\vec{E}'_{ind.}$  in  $\vec{B}$  zapišemo kot:

$$u_{ind.} = \frac{-d\varphi}{dt}$$

ali

$$\oint_L \vec{E}'_{ind.} \circ d\vec{l} = \frac{-d}{dt} \int_A \vec{B} \circ d\vec{a}$$

## Druga Maxwellova enačba

$$\vec{E} = \vec{E}'_{sta.} + \vec{E}'_{ind.}$$

Coulombovo polje elektrin pa ima to lastnost, da je njen sklenjen krivuljni integral vedno enak nič:

$$\oint_L \vec{E}'_{sta.} \circ d\vec{l} = 0$$

Če to združimo dobimo II. Maxwellovo enačbo:

$$\oint_L \vec{E}'_{sta.} \circ d\vec{l} = \frac{-d}{dt} \int_A \vec{B} \circ d\vec{a}$$

V dinamičnem polju postane  $\vec{E}$  vrtinčno polje:

$$\oint_L \vec{E}'_{ind.} \circ d\vec{l} \neq 0$$

## Inducirano elektrostatično polje

Elektrostatično polje v induciranih poljih ni nujno določeno samo z elektrinami, ki bi bile kot »dodatek«, ki bi ha »postavili« k osnovni nalogi, ampak se v dinamičnih razmerah to polje izzove.

## Transformatorska in gibalna inducirana napetosti

Ločili bomo dva načina induciranja:

- Transformatorski način, pri katerem fizične strukture mirujejo in se gostota  $\dot{B}$  časovno spreminja
- Gibalni način, pri katerem se oblika in/ali lega fizičnih struktur spreminja

Za inducirano napetost dobimo izraz, prvi člen je transformatorska inducirana napetost, drugi člen pa gibalna inducirana napetost:

$$u_{ind.} = - \int_{A(t)} \frac{\partial \dot{B}}{\partial t} \circ d\dot{a} + \oint_{L(t)} (\dot{v} \times \dot{B}) \circ d\dot{l}$$

## Magnetni sklep

Za magnetni sklep bomo pisali:

$$\psi_{skozi L} = \int_{A_L} \dot{B} \circ d\dot{a}$$

Inducirana napetost vzdolž konture bo:

$$u_{ind.} = \frac{-d\psi_{skozi L}}{dt}$$

Kar je Faradejev zakon v najbolj splošni obliki.

## Pojav indukcije v nesklenjenih (prevodnih) konturah

### Medsebojna in lastna induktivnost

Lastna induktivnost, če je  $j = k$ .

Medsebojna induktivnost, če je  $j \neq k$

Ena ali druga induktivnost bo nadalje definirana s kvocientom:

$$L_{jk} = L_{kj} = \frac{\psi_j^{(k)}}{i_k}$$

Oz. Kot magnetni sklep  $j$ -te zanke zaradi toka v  $k$ -ti zanki.. Enota je henry.

### Dileme in težave pri določanju induktivnosti

Pri debelem vodniku pride ob harmoničnem vzbujanju do kožnega efekta, tokova gostota je ob površini večja kot na sredini.

Izbira konture pri debelem vodniku (krožnem); ne izberemo ne notranje, ne zunanje, ne srednje, ampak izračunamo povprečje sklepov:

$$L_{jk} = \psi_j^{(k)} \frac{1}{i_k}$$

## Vzajemnost medsebojnih induktivnosti

Razmerje med posledico v eni in vzrokom v drugi zanki je stalnica.

$$L_{ji} = L_{ij}$$

### Tuljava kot gradnik električnih vezij

Padec napetosti na tuljavi v smeri toka:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt}$$

### Faktor sklopa

Vpeljemo t.i. sklopni faktor  $k$ , ki govori o stopnji magnetne povezanosti med dvema zankama.

Sklopni faktor med  $i$ -to in  $k$ -to zanko je definiran kot:

$$k_{ij}^2 = \frac{\psi_i^{(j)} \psi_j^{(i)}}{\psi_i^{(i)} \psi_j^{(j)}}$$

Včasih se govori tudi o faktorju stresanja, ki govori o stopnji nepovezanosti med zankama.

Medsebojna induktivnost:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

## Energija magnetnega polja

### Magnetna energija linearnih sistemov

Prvotno energijsko bilanco med splošnima zaporednima trenutkoma  $t_1$  in  $t_2$  pišemo kot:

$$A_g(t_1, t_2) = W_t(t_1, t_2) + W_m(t_2) - W_m(t_1)$$

Preberemo: energijski vložek virov se delno pretvori v toploto, delno pa se porabi za gradnjo magnetnega polja. Dalje. Magnetenje linearnega sistema je reverzibilen proces, tisti del energije, ki se porabi za magnetenje prostora se (ob primernih pogojih) more v celoti dobiti nazaj.

Trenutna energija magnetnega polja za  $n$  sklopljenih tuljav:

$$i_j \psi_j = \dot{i} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} i_j i_k$$
$$W_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{i}^2$$

### Tokovno-napetostne in energijske razmere v nelinearnih magnetnih strukturah

Ne govorimo več o pojmu induktivnosti. Primer je navitje na feromagnetnem jedru z izrazito nelinearno krivuljo magnetenja in po vrhu še z ožjo ali širšo histerezno pentljo.

Energijski vložek za magnetenje jedra od časa  $t = 0$  do  $t$ :

$$W_{mag.}(t) = \int_0^t i d\psi$$

Povprečna moč histereznih izgub:

$$P_{hist.} = f \oint_P i d\psi$$

### Gostota magnetne energije

Gostota energije magnetenja ( $w_{mag.}(t)$ ):

$$w_{mag.}(t) = \int_0^t \dot{H} \circ d_t \dot{B}$$

Gostoto akumulirane magnetne energije v linearnem prostoru zapišemo tudi kot:

$$w_m = \frac{\dot{B} \circ \dot{H}}{2}$$

### Induktivnost kot energijski koeficient

Pogoj je linearna struktura:

$$L_{jk} = \frac{1}{i_j i_k} \int_V \dot{B}_j \circ \dot{H}_k dv$$

### Gibalni procesi v magnetnem polju

Komponente sile  $\dot{F}_m$  za linearen sistem dobimo kot:

$$\dot{F}_m = \left( \frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z} \right)$$

Za nelinearen sistem je formula skoraj enaka, le pred parcialne odvode dodamo minus.

$$\dot{F}_m = \left( -\frac{\partial W_m}{\partial x}, -\frac{\partial W_m}{\partial y}, -\frac{\partial W_m}{\partial z} \right)$$

### Ploskovne sile na mejah linearnih magnetnih snovi

Na meji dveh magnetnih snovi s permeabilnostima  $\mu_1$  in  $\mu_2$  ploskovne sile z gostoto:

$$f_{mn} = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \left( H_t^2 + \frac{B_n^2}{\mu_1 \mu_2} \right)$$



## Razširjen Amperov zakon toka

Vrtinčnost vektorja  $\dot{\vec{B}}$  odprte tokovne niti

Če imamo v prostoru več odprtih tokovnih niti, potem je vrtinčnost vektorja  $\frac{\dot{\vec{B}}}{\mu_0}$  po pentlji L

enaka vsoti tokov skozi opno A in časovni spremembi pretoka vektorja  $\epsilon_0 \dot{\vec{E}}$  skozi to ploskev. Zapišemo:

$$\oint_L \frac{\dot{\vec{B}}}{\mu_0} \circ d\vec{l} = \sum \text{tokov skozi opno A na L} + \int_A \frac{\partial \epsilon_0 \dot{\vec{E}}}{\partial t} \circ d\vec{a}$$

Posplošitev vrtinčnosti  $\dot{\vec{B}}$  na vse toke

Če pripada tudi ostalim tokom (konvektivnemu, polarizacijskemu in Amperovemu) kvantitativno in kvalitativno enako magnetno polje kot konduktivnemu, potem moramo vrtinčnost vektorja  $\dot{\vec{B}}$  v prejšnji enačbi razširiti na vse toke, ki opno A na konturi L prestopajo v pozitivnem smislu:

$$\oint_L \frac{\dot{\vec{B}}}{\mu_0} \circ d\vec{l} = (i_{\text{cel. skozi A}}) + \int_A \frac{\partial \epsilon_0 \dot{\vec{E}}}{\partial t} \circ d\vec{a}$$

Vsoto tokov bomo razumeli kot:

$$i_{\text{cel. skozi A}} = (i_{\text{kond.}} + i_{\text{konv.}} + i_{\text{pol.}} + i_{\text{mag.}})_{\text{skozi A}}$$

### I. Maxwellova enačba

$$\oint_L \dot{\vec{H}} \circ d\vec{l} = \int_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t} \right) \circ d\vec{a}$$

## Enačbe elektromagnetnega polja

I. Maxwellova enačba – razširjen Amperov zakon

$$\oint_L \dot{\vec{H}} \circ d\vec{l} = \int_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \dot{\vec{D}}}{\partial t} \right) \circ d\vec{a}$$

Pravi: Vrtinčnost vektorja magnetne poljske jakosti na pentlji L je enaka pretoku konduktivnega in konvektivnega ter premikalnega (poljskega toka) skozi opno A, ki je na L napeta in pozitivno orientirana.

## II. Maxwellova enačba

$$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{l} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ d\vec{a}$$

Pravi: Vrtinčnost vektorja električne poljske jakosti na petlji L je enaka negativnemu pretoku časovne spremembe vektorja gostote magnetnega pretoka skozi opno A, ki je na L napeta in orientirana v pozitivnem smislu.

## III. Maxwellova enačba – Gaussov stavek magnetnega polja

Enačba govori o neizvornosti magnetnega polja.

$$\oint_A \vec{B} \circ d\vec{a} = 0$$

Pretok vektorja gostote magnetnega polja skozi sklenjeno ploskev A je vedno nič.

## IV. Maxwellova enačba – Gaussov stavek električnega polja

$$\oint_A \vec{D} \circ d\vec{a} = \int_V \rho \, dv$$

Električno polje je izvorno. Pretok vektorja gostote električnega pretoka skozi sklenjeno ploskev A je enak množini objete proste elektrine.

## Lorentzova sila

Preko te sile se prepoznavajo učinki elektromagnetnega polja.

$$\delta \vec{F}_L = \delta Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Na električno nabit delec deluje v elektromagnetnem polju sila, ki je odvisna od jakosti električnega polja, gostote magnetnega polja in od hitrosti samega delca.

## Kontinuitetna enačba

$$\oint_A \vec{J} \circ d\vec{a} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

Pretok vektorja gostote makroskopskega električnega toka skozi sklenjeno ploskev A je v vsakem trenutku enak časovnemu pojemu množine proste elektrine znotraj A (v V).

## Joulov zakon

Pri vzdrževanju konduktivnih tokov v prevodnikih se sprošča toplotna energija. Izgubna moč:

$$p = \vec{J} \circ \vec{E}$$

### Energija elektrenja

Za vzpostavitev električnega polja je potrebno v sistem vložiti določeno množino energije. Gostota vložene energije elektrenja od časa  $t = 0$  do  $t$  je:

$$w_{elek.}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{E}} \circ d_t \dot{\mathbf{D}}$$

V linearnih sistemih je energija enaka:

$$w_e = \frac{\dot{\mathbf{E}} \circ \dot{\mathbf{D}}}{2}$$

### Energija magnetenja

Za vzpostavitev magnetnega polja je potrebno v sistem vložiti določeno količino energije. Gostota energijskega vložka od  $t = 0$  do  $t$  je:

$$w_{mag.}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{H}} \circ d_t \dot{\mathbf{B}}$$

V primeru, da je magnetenje reverzibilno, govorimo o akumulirani magnetni energiji. V linearnem sistemu je gostota te energije enaka:

$$w_m = \frac{\dot{\mathbf{H}} \circ \dot{\mathbf{B}}}{2}$$

### Snovne lastnosti

Ohmov zakon v prevodnikih:

$$\dot{\mathbf{J}} = \gamma \dot{\mathbf{E}}$$

V območju delovanja neelektrične potisne sile smo ga razširili z gonilno električno poljsko jakostjo  $\mathbf{E}_g$ :

$$\dot{\mathbf{J}} = \gamma (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}_g)$$

V pogojih linearnosti velja v izolatorjih zveza:

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon \dot{\mathbf{E}}$$

V magnetikih pa zveza:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{H}}$$

### Sekundarni viri v snoveh

V dielektrikih so to dipoli – lokalno polarizirane vezane elektrine – ki jih popisujemo z vektorjem polarizacije:

$$\dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E} + \dot{P}$$

V magnetikih so sekundarni viri lokalne Amperove tokovne zankice, magnetni dipoli, katerih gostoto popisujemo z vektorjem magnetizacije:

$$\dot{H} = \frac{\dot{B}}{\mu_0} - \dot{M}$$

### Dopolnilna enačba pri gibanju

Če se kontura, v kateri pišemo inducirano napetost, giblje, potem je razširitev sledeča:

$$\dot{E} \circ d\vec{l} = - \int_{A(t)} \frac{\partial \dot{B}}{\partial t} \circ d\vec{a} + \dot{i} \oint_{L(t)} (\dot{v} \times \dot{B}) \circ d\vec{l} + \oint_{L(t)} \dot{i}$$

Enačba je aktualna pri obravnavi vrtljivih električnih strojev.

## Osnove elektromagnetnega valovanja in difuzije

### Električna vezja spremenljivih tokov

#### Uvod v linearna električna vezja

Obravnavamo le idealne elemente, brez parazitnih pojavov.

#### Elementi linearnih električnih vezij

##### Upor

Zvezi med tokom in napetostjo:

$$u = Ri$$

$$i = Gu$$

Trenutna moč na upor:

$$p_t = ui$$

Sproščena toplotna energija:

$$W_t(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p_t dt$$

Poprečna moč:

$$P = RI_{ef}^2 = GU_{ef}^2$$

### Kondenzator

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Obratna povezava

$$u(t_2) - u(t_1) = \frac{1}{C} \int_{t_1}^{t_2} i dt$$

Akumulirana električna energija

$$W_e = \frac{1}{2} C u^2$$

Moč dotekanja

$$p_e = ui$$

### **Tuljava**

Zveza med napetostjo in tokom

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Obratna

$$i(t_2) - i(t_1) = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} u dt$$

Magnetna energija

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

Moč dotekanja

$$p_m = ui$$

### **Sklop več tuljav**

Napetost na j-ti tuljavi:

$$u_j = \sum_{k=1}^n L_{jk} \frac{di_k}{dt}$$

Shranjena magnetna energija:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} i_j i_k$$

Trenutna moč je enaka vsoti posameznih tuljav

$$P_m = \sum_{j=1}^n u_j i_j$$

## Kirchhoffova zakona in bilanca moči

### I. Kirchhoffov zakon

Vsota pritekajočih tokov v spojišče je enaka vsoti odtekajočih tokov (pritekajoči -, odtekajoči +)

$$\sum_{k=1}^m (\pm) i_k = 0$$

### II. Kirchhoffov zakon

Vsota napetosti v sklenjeni zanki je enaka nič.

$$\sum_{j=1}^n (\pm) u_j = 0$$

### Bilanca moči in energij v električnem vezju

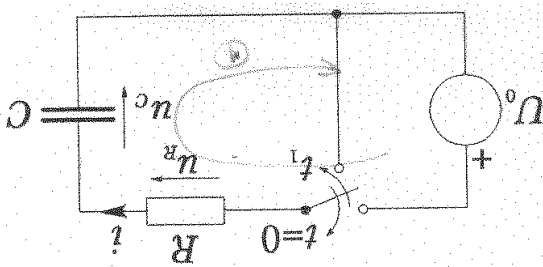
Tellegenov stavek.

$$\sum_{j=1}^n u_j i_j = 0$$

Vsota trenutnih moči generatorjev je enaka vsoti trenutnih moči na pasivnih elementih. Če bi enačbo integrirali po času: Vsota energijskih vložkov generatorjev je enaka vsoti sproščene toplote in vsoti v tem času akumulirane el. in mag. energije.

## Osnove prehodnih pojavov

Primer:



Slika : Vklon in izklon stikala v RC vezju

Vklon:

$$-U_0 + u_r + u_c = 0 \rightarrow -U_0 + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = 0$$

Časovna konstanta:  $\tau = RC$

Napetost na upor:

$$u_R(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Napetost kondenzatorja ob času t:

$$u_c(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Preklop:

$$u_c(t) = U_1 (1 - e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}})$$

## Harmonično vzbujana električna vezja

**Kompleksor harmonične količine**

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi_f)$$

Kompleksor harmonične funkcije f(t) oz. Kompleksna amplituda:

$$\underline{F} = F e^{j\varphi_f} = F \cos \varphi_f + jF \sin \varphi_f$$

## Kompleksni račun

**Relacija med kompleksorjem toka in napetosti na pasivnih elementih**

- **Upor**

Amplitudi sta v razmerju upornosti, fazi sta enaki.

$$U = RI \varphi_u \dot{=} \varphi_i$$

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

- **Kondenzator**

Amplitudi sta v razmerju  $C\omega$ . Faza toka pa je za  $\pi/2$  večja od faze napetosti.

$$I = \omega C U$$

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}$$

- **Tuljava**

Amplitudi sta v razmerju  $\omega L$ . Faza napetosti pa je za  $\pi/2$  večja od faze toka.

$$U = \omega L I$$

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

- **Sklopljeni tuljavi**

Za magnetno povezani tuljavi, z induktivnostima  $L_1$  in  $L_2$  in medsebojno induktivnostjo  $M$ .

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

### Kazalčni diagram

Če je diagram narisano v izbranem merilu, potem nam dolžine kazalcev in koti med njimi podajajo »otipljive« količine.

### Kirchhoffova zakona v kompleksnem

Za kazalec napetosti in toka veljata I. in II. Kirchhoffov zakon.

### Impedanca in admitanca

Po analogiji z Ohmovim zakonom v enosmernih vezjih priredimo kvocientu kazalcev napetosti in toka ustrezno kompleksno upornost ali t.i. impedanco oz. kompleksno prevodnost ali t.i. admitanco. Zaporedni in vzporedni vezavi priredimo nadomestno impedanco in admitanco.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad \underline{Z} \underline{Y} = 1$$

Element	Impedanca( $\underline{Z}$ )	Admitanca( $\underline{Y}$ )
Upor	R	$\frac{1}{R}$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
tuljava	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

### Kompleksor moči – delovna, jalova in navidezna moč

Povprečno moč imenujemo delovna moč; označimo jo s  $P$  in zanjo pišemo:

$$P = \frac{1}{2} UI \cos \varphi$$

Jalova oz. Reaktivna moč je amplituda izmenjujoče moči. Razviden razloček med delovno in jalovo močjo napravimo tudi z enotami. Delovno moč računamo in merimo v W, medtem ko jalovo moč izražamo v reaktivnih volt-amperih VAR.

$$Q = \frac{1}{2} UI \sin \varphi$$



Nadalnje vpeljemo še navidezno moč oz. kompleksor navidezne moči( $S$ ):

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = \frac{1}{2} \underline{Z} I^2 = \frac{1}{2} \underline{Y}^* U^2$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2} UI = U_{ef} I_{ef}$$

### **$j\omega$ -metoda**

Operacija odvajanja v časovnem prostoru se prevede v množenje z  $j\omega$  v kompleksnem prostoru in operacija integriranja v časovnem prostoru se prevede v deljenje z  $j\omega$  v kompleksnem prostoru.

### **Metode reševanja harmonično vzbujanih vezij**

Če bi bilo v vezju več magnetno sklopljenih tuljav, bi vsako tuljavo nadomestili s pasivnim elementom, ki pripada impedanci te tuljave, in z več krmiljenimi viri, ki jih »vodijo« toki ostalih tuljav.

1. Metoda vejnih tokov

Vejne napetosti izrazimo z vejnimi tokovi, dodamo tokovne enačbe.

2. Metoda vejnih napetosti

Daljša pot, podobno kot spojiščni potenciali.

3. Metoda zančnih tokov

Podobno kot pri enosmernih vezjih, izračunamo zančne tokove in dobimo vejne tokove.

### **Stavki o harmonično vzbujanih vezjih**

#### **Stavek superpozicije**

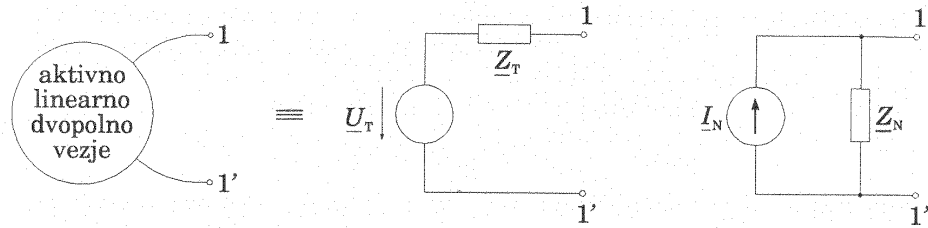
V kompleksnem ta stavek velja za linearna vezja, ki so vzbujana s koherentnimi viri – napetosti (toki) nihajo z enako frekvenco (faze so v splošnem različne). Kazalec toka (ali napetosti) neke veje moremo potemtakem izraziti kot vsoto kazalcev delnih tokov, ki jih povzročajo posamezni viri v vezju. V nasprotnem, ko viri niso koherentni, omenjen stavek v kompleksnem ne velja, velja pa v časovnem prostoru.

#### **Stavek o nadomestitvi**

Če v harmonično vzbujanem vezju poznamo tok veje ali napetost veje, potem moremo vejo zamenjati s tokovnim virom ali napetostnim virom in ostanejo ob tem razmere v vezju nespremenjene.

#### **Stavek Thevenina in stavek Nortona**

Stavka lahko prikrojimo tudi za harmonično aktivno linearno dvopolno vezje.



Slika 66.2: Ekvivalenca aktivnih dvopolov.

Théveninova napetost  $\underline{U}_T$  je napetost odprtih sponk med 1 in 1', tok  $\underline{I}_N$  Nortonovega vira je tok kratkega stika med sponkama 1 in 1' in  $\underline{Z}_T = \underline{Z}_N = \underline{Z}_{\text{not.}}$  je notranja impedanca dvopola med sponkama 1 in 1', ko so notranji viri deaktivirani; med vsemi tremi elementi velja zveza  $\underline{U}_T = \underline{Z}_{\text{not.}} \underline{I}_N$ .

### Stavek Tellegena

Če istosmiselno označimo kazalce napetosti in tokov velja:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \underline{U}_j \underline{I}_j^i = 0$$

Vsota kompleksorjev moči generatorjev je enaka vsoti kompleksorjev moči na bremenih.

### Stavek največje moči

Maksimalna moč nastopi pri  $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^i$

Takrat je maksimalna delovna moč na bremenu:

$$P_{b \max.} = \frac{U_g^2}{8 R_g}$$

Ko je bremenska upornost čisto realna velja:

### Stavek recipročnosti

Če imamo pasivno linearno štiripolno vezje rezultat zapišemo takole:

$$\left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right|_{I_2=0}$$

## Posebne vezave elementov

### Resonančni krog – nihajni krog

- Zaporedni nihajni krog
- Vzporedni nihajni krog

### Brezizgubni in popolno sklopljeni transformatorji

Ohmske upornosti navitij (R) bomo zanemarili glede na induktivne ( $\omega L$ ). Feromagnetno jedro bomo razumeli kot idealno povezavo med navitjema (brez notranjih toplotnih izgub).

- 1.) Napetostna prestava

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

2.) Magnetilni tok (na sekundarju odprte sponke)

$$I_{1m} = \frac{U_1}{j\omega L_1}$$

3.) Ravnotežni tok (na sekundarju breme)

$$I_{1r} = \frac{-N_2}{N_1} I_2 \quad I = I_{1m} + I_{1r}$$

4.) Tokovna prestava

$$I_1 = \frac{-1}{n} I_2$$

5.) Transformacija moči

$$\underline{\mathcal{Q}} = N_1 I_{1m}$$

6.) Idealni, brezizgubni, popolno sklopljeni transformator (o idealnem transformatorju govorimo, ko je magnetno jedro idealno. Permeabilnost gre proti neskončno, zato tudi  $L_1, L_2, M$  proti neskončno)

$$\underline{\mathcal{S}}_1 = \underline{\mathcal{S}}_{1m} + \underline{\mathcal{S}}_2$$

$$\underline{\mathcal{S}}_1 \simeq \underline{\mathcal{S}}_2$$

## Trifazni sistem napetosti

### Osnove večfaznih sistemov

Večfazni sistem napetosti razumemo kot sistem koherentnih harmoničnih napetostnih virov s katerimi vzbujamo kako večpolno pasivno vezje.

Kompleksorji moči po posameznih fazah:

$$\underline{\mathcal{S}}_k = \frac{1}{2} \underline{U}_k \underline{I}_k^c$$

Trenutna moč, ki jo sistem generatorjev daje v pasivno vezje:

$$p(t) = \sum_{k=1}^n p_k(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) i_k(t)$$

### Simetrični trifazni sistem

Prednosti:

- Omogoča izvedbo vrtilnega polja (asinhronski motor)

- Trifazni daljnovod zmore na določenem napetostnem nivoju prenašati trikrat večjo moč kot enofazni
- Konstantna moč prenesene energije

### Prireditev kompleksorjev k efektivnim vrednostim harmoničnih količin

Do sedaj sta bila  $\underline{U}$  in  $\underline{I}$  veza vezana na amplitudi, v energetiki pa so uveljavljeni kazalci toka in napetosti, ki so prirejeni na efektivno vrednost:

$$\underline{I}_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \underline{U}_{ef} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

Impedanca na spremembo ni občutljiva. Izjema je le kompleksor moči.

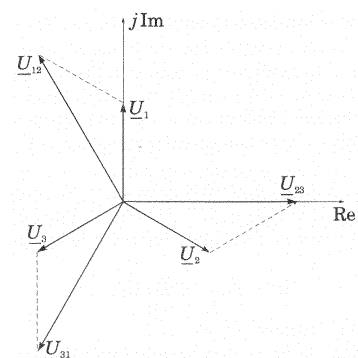
$$S = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = \underline{U}_{ef} \underline{I}_{ef}^*$$

V nadaljevanju bomo pripis »ef« izpuščali, čeprav bomo operirali z efektivnimi kazalci.

### Medfazne napetosti

Napetosti med posameznimi fazami:

$$\underline{U}_{12} = U_m e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad \underline{U}_{23} = U_m e^{j0} \quad \underline{U}_{31} = U_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$



Slika : Fazne in medfazne napetosti v trofaznem

### Trifazno breme v zvezda vezavi

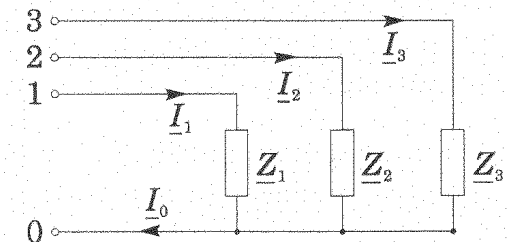
Breme priključimo na posamezne fazne napetosti. Če je breme simetrično je povratni tok nič.

Fazni toki

$$\underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{Z_i} = \underline{Y}_i \underline{U}_i \quad i=1,2,3$$

Tok povratnega vodnika:

$$\underline{I}_0 = \sum_{i=1}^3 \underline{Y}_i \underline{U}_i$$



Slika : Breme v zvezda vezavi

Potencial zvezdišča:

$$\underline{V}_{\text{zvezdišča}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \underline{Y}_i \underline{U}_i}{\sum_{i=1}^3 \underline{Y}_i}$$

### Trifazno breme v vezavi trikot

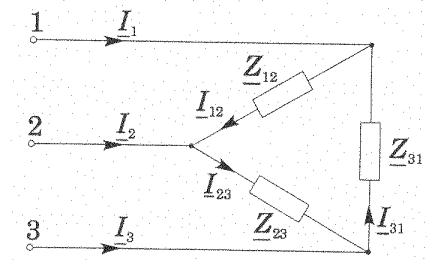
V trikotno vezavo se običajno vežejo simetrična trifazna bremena (npr. trifazni motor s simetričnim navitjem)

Toki skozi posamezne impendance:

$$\underline{I}_{ij} = \frac{\underline{U}_{ij}}{\underline{Z}_{ij}}$$

Fazni toki:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{21} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$



## **Zahvala**

Zahvala za te zapiske gre nekaj dobrotnikom, ki so svoje zapiske objavili na internetu, in sicer:

- Filipu Božiču,
- Maticu Golobu, Blažu Potočniku

in več ljudem, ki so dobrosrčno delili svoje gradivo, vendar niso podali svojega imena.

Jaz sem dodal slike in spisal enačbe, kar se je izkazalo za precej bolj časovno požrešno kot sem sprva mislil ☹.

Zapomnite si da svoje zapiske delite in s tem komu pomagajte!

Erik Morelj