Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za elektrotehniko*

Laboratorij za modeliranje, simulacijo in vodenje

Laboratorij za avtonomne mobilne sisteme

Avtonomni mobilni sistemi

Izr. prof. dr. Gregor Klančar

gregor.klancar@fe.uni-lj.si

Modeliranje kolesnih mobilnih sistemov

2013/2014

Uvod, kinematika, dinamika

- **Lokomocija** – izvedba premika MS iz ene lege v drugo lego (oz. konfiguracijo – opiše stanje sistema v okolju)

- **Kinematični model** – opis geometrijskih relacij v sistemu. Opiše preslikavo med vhodnimi parametri MS in obnašanjem sistema podanim z vektorjem stanj. Hitrostna statična preslikava med vhodi in odvodi stanj…

- **Dinamični model** – opis gibanja MS na katerega delujejo, sile, navori. Model vsebuje fizikalne veličine kot so sila, masa, vztrajnost, pospeški, hitrosti…

- Pri kolesnih MS se marsikdaj (vodenje) uporablja le kinematični model

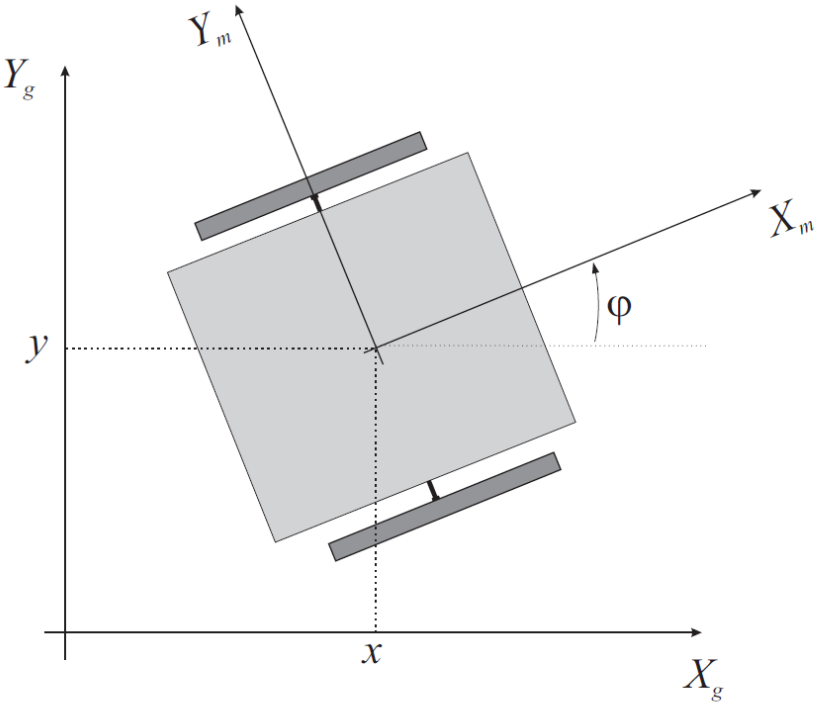
Uvod, kinematika kolesnih MS

- **Interna kinematika** (notranja) – opis relacij med internimi spremenljivkami sistema (npr. hitrosti koles in hitrosti robota)
- **Externa kinematika** (zunanja) – opis pozicije in lege glede na nek referenčni KS
- **Direktna kinematika** – modeliranje stanj sistema kot funkcija vhodov (hitrosti koles, zasuki sklepov ali krmilnega kolesa,…)
- **Inverzna kinematika** – izrazi vhode v sistem, ki so potrebni za dosego želenega stanja sistema. Uporaba pri načrtovanju gibanja
- **Omejitve gibanja** – sistem ima manj vhodov, kot prostostnih stopenj (DOF). Hitrostne oz. neholonomične omejitve omejijo smeri možnih premikov.

Kinematika kolesnih MS

Lega podana z vektorjem stanj v globalnih KS

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$$



Rotacija in translacija med lokalnim in globalnim KS

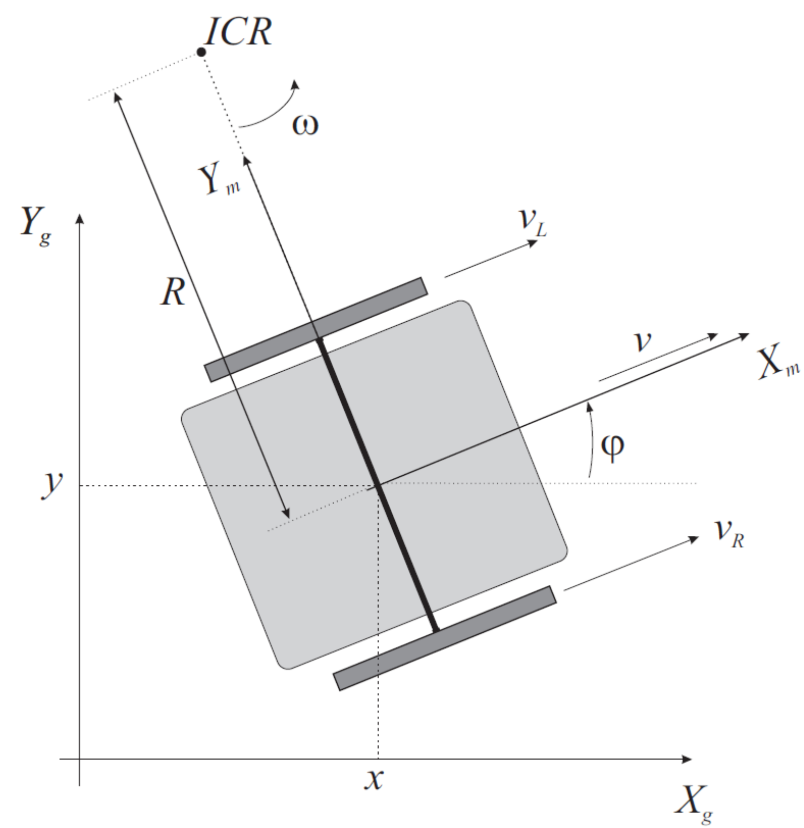
$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

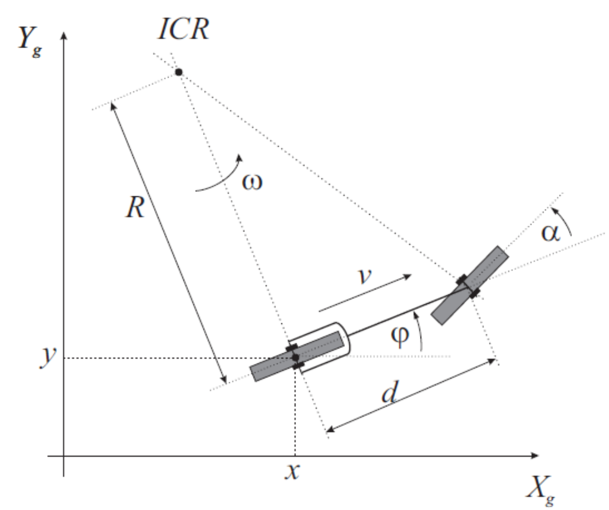
$$[x, y]^T$$

Kinematika kolesnih MS

Idealno vrtenje koles – predpostavka, da se kolesa ob zmernih hitrosti premikajo le zaradi rotacije. Ni zdrsov v smeri vožnje in v bočni smeri (omejitve gibanja).

točka ICR – (instantaneous center of rotation) trenutno središče rotacije. Kolesa se vrtijo okoli svoje osi, obstaja ICR, kjer se sekajo vse osi koles. Okoli ICR kolesa krožijo z isto kotno hitrostjo.





Kinematika diferencialnega pogona

zelo pogost pogon, ima lahko podporne (castor) kolesa za stabilizacijo

Vhoda: $v_R(t)$ in $v_L(t)$

V vsakem trenutku (togo) vozilo kroži okoli ICR z $\omega(t)$ torej tudi vsako kolo

$$\omega = \frac{v_L(t)}{R(t) - \frac{L}{2}}$$

$$\omega = \frac{v_R(t)}{R(t) + \frac{L}{2}}$$

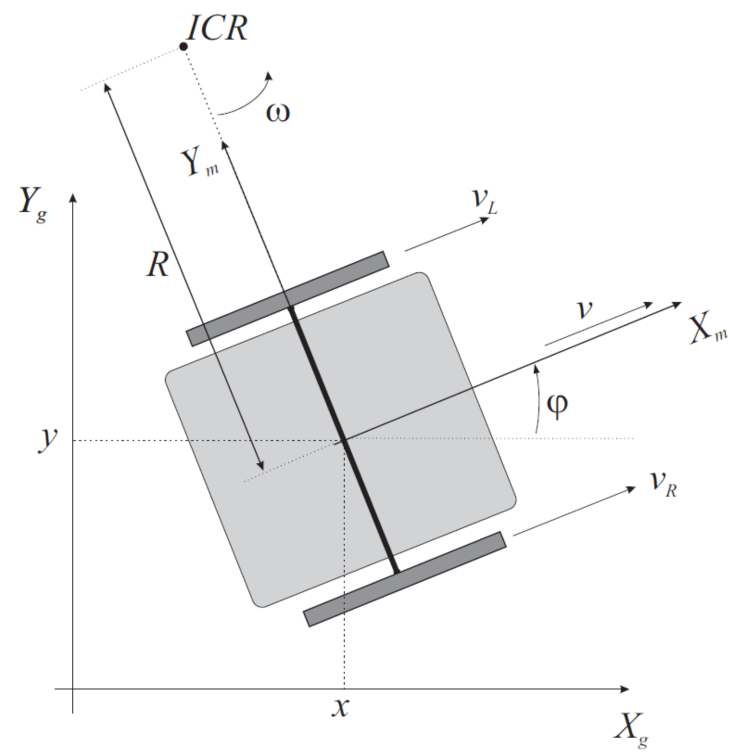
izrazimo

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L}$$

$$R(t) = \frac{L}{2} \frac{v_R(t) + v_L(t)}{v_R(t) - v_L(t)}$$

in hitrost

$$v(t) = \omega(t) R(t) = \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2}$$



interna kinematika

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{y}_m(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_X(t) \\ v_Y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{r}{L} & \frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_R(t) \end{bmatrix}$$

Kinematika diferencialnega pogona

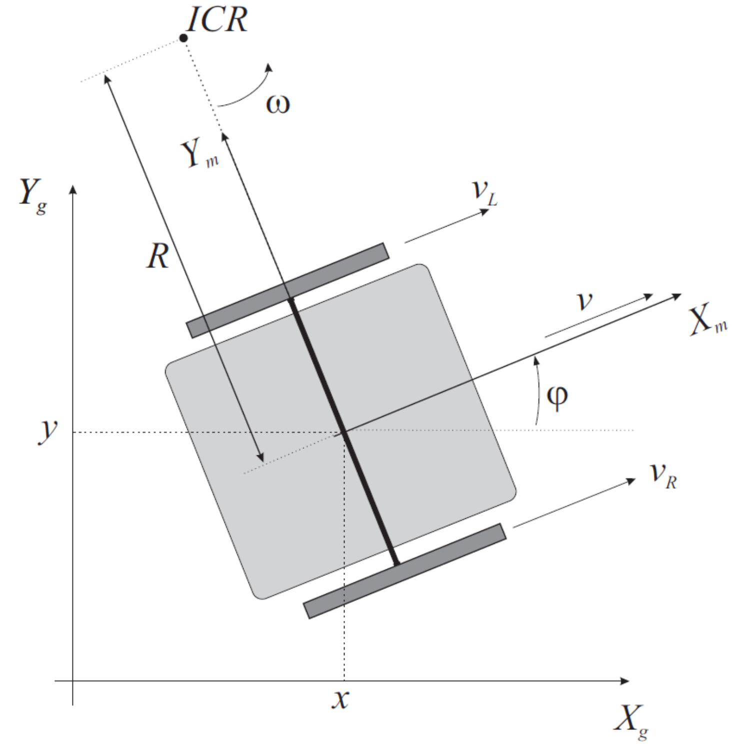
interna kinematika

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{y}_m(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_X(t) \\ v_Y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{r}{L} & \frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_R(t) \end{bmatrix}$$

eksterna kinematika

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

vhoda v sistem



diskretizacija

$$x(k+1) = x(k) + v(k)T_s\cos(\varphi(k))$$
$$y(k+1) = y(k) + v(k)T_s\sin(\varphi(k))$$
$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + \omega(k)T_s$$

Lokalizacija s pomočjo odometrije

integracija kinematičnega modela (direktna kinematika)

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(t)\cos(\varphi(t))dt \\
y(t) &= \int_0^t v(t)\sin(\varphi(t))dt \\
\varphi(t) &= \int_0^t \omega(t)dt
\end{aligned}
$$

Predpostavimo konstantno v(k) in w(k) v intervalu [kTs, (k+1)Ts]

Euler integracija:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s\cos(\varphi(k)) \\
y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s\sin(\varphi(k)) \\
\varphi(k+1) &= \varphi(k) + \omega(k)T_s
\end{aligned}
$$

Runge-Kutta integracija:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s\cos\left(\varphi(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\
y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s\sin\left(\varphi(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\
\varphi(k+1) &= \varphi(k) + \omega(k)T_s
\end{aligned}
$$

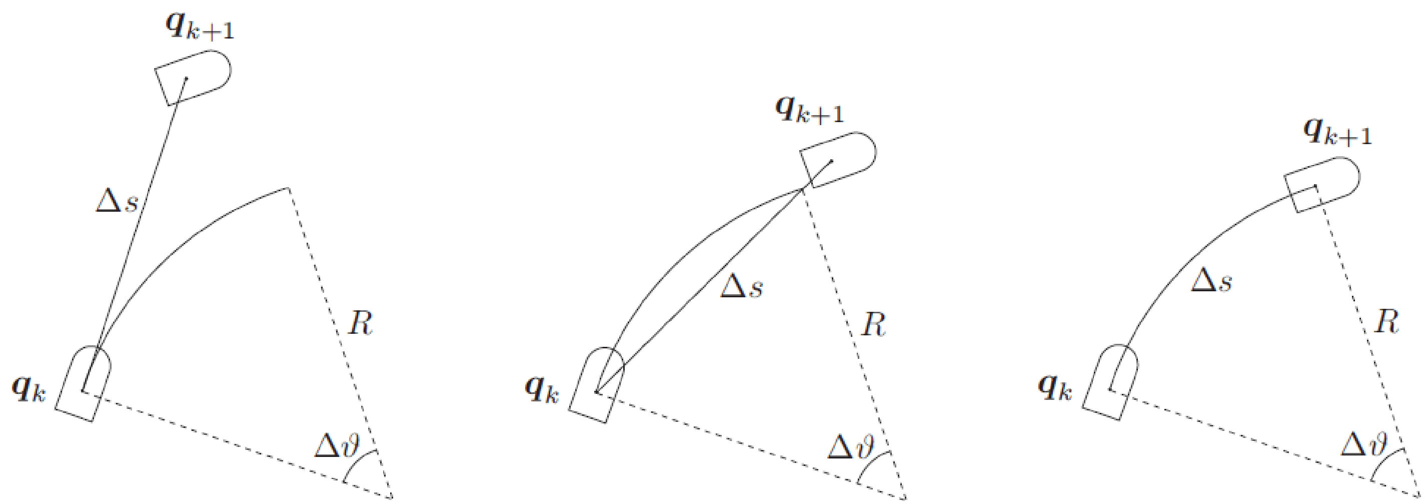
točna integracija:

$$
v(k)\int_{kT}^{(k+1)T}\cos(\theta(t))dt = v(k)\int_{kT}^{(k+1)T}\cos\Big(\theta(k) + w(k)(t-kT)\Big)dt
$$

$$
v(k)\int_{kT}^{(k+1)T}\sin(\theta(t))dt = v(k)\int_{kT}^{(k+1)T}\sin\Big(\theta(k) + w(k)(t-kT)\Big)dt
$$

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= x(k) + \frac{v(k)}{\omega(k)}\left(\sin\left(\varphi(k) + \omega(k)T_s\right) - \sin(\varphi(k))\right) \\
y(k+1) &= y(k) - \frac{v(k)}{\omega(k)}\left(\cos\left(\varphi(k) + \omega(k)T_s\right) - \cos(\varphi(k))\right) \\
\varphi(k+1) &= \varphi(k) + \omega(k)T_s
\end{aligned}
$$

Lokalizacija s pomočjo odometrije



Euler Runge-Kutta exact

- odometrija – ocena lege s pomočjo integracije pomikov
- napak lokalizacije narašča s časom zaradi netočnega modela, zdrsov koles in numerične integracije

Inverzna kinematika

- večji izziv, zaradi hitrostnih (neholonomičnih omejitev) niso možne vse smeri vožnje in obstaja več poti, ki pripeljejo do istega želenega stanja (lege).
- Preprosta rešitev, če predpostavinmo le premo gibanje ali le rotacijo robota in ne oboje hkrati – sestavljeno gibanje
- Kroženje

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \\ y(t) &= y(0) \\ \varphi(t) &= \varphi(0) + \frac{2v_R t}{L} \end{aligned}$$

- Premo gibanje

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_R \cos(\varphi(0))t \\ y(t) &= y(0) + v_R \sin(\varphi(0))t \\ \varphi(t) &= \varphi(0) \end{aligned}$$

- Strategija gibanja: na mestu se obrni proti cilju, vozi premo proti cilju in ko dosežeš cilj se obrni na mestu do želene orientacije. Iz gornjih relacij za želene faze strategije izračunaš vhode…

Inverzna kinematika, sledenje poti

- Gladka referenčna pot (trajektorija) je podana parametrično s časom

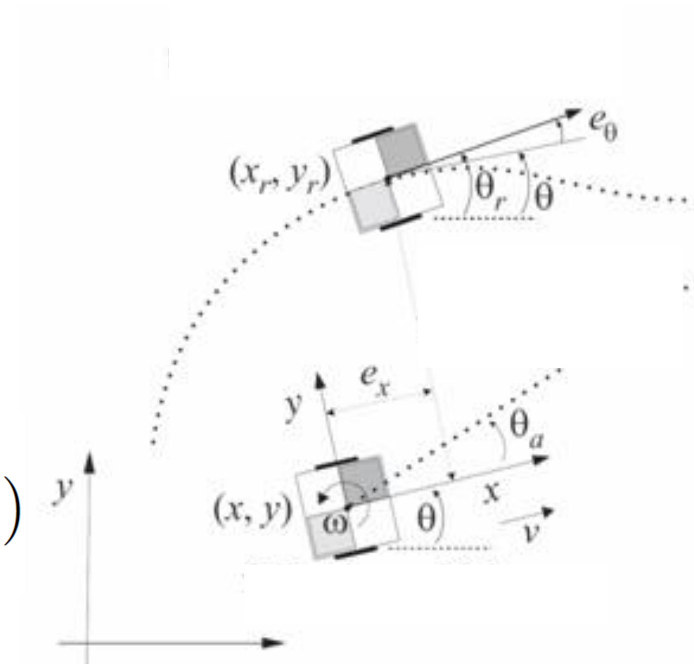
$$(x(t),\ y(t))$$

- Če predpostavimo, da je robot na začetku na trajektoriji, da je model kinematike točen in da ni zdrsov, lahko določimo potrebne vhode, da robot sledi trajektoriji

$$v(t) = \pm\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

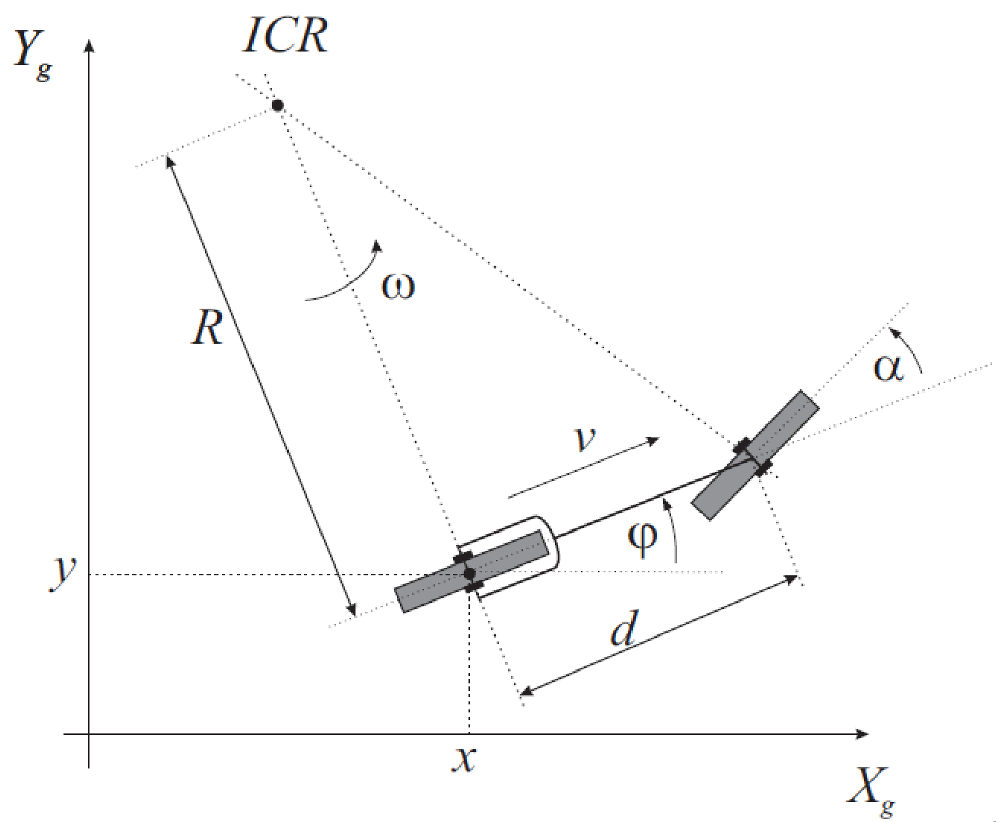
$$\theta(t) = \operatorname{arctan2}(\dot{y}(t),\ \dot{x}(t)) + k\pi$$

$$\omega(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = v(t)\kappa(t)$$



Kolesni pogon, kolo

- ICR, presečišče osi
- Vhoda: v_S, α (hitrost in krmiljenje prvega kolesa)
- Stanja: x, y, φ (točka na zadnjem kolesu)
- Kinematika (?): povezava vhodov na stanja sistema



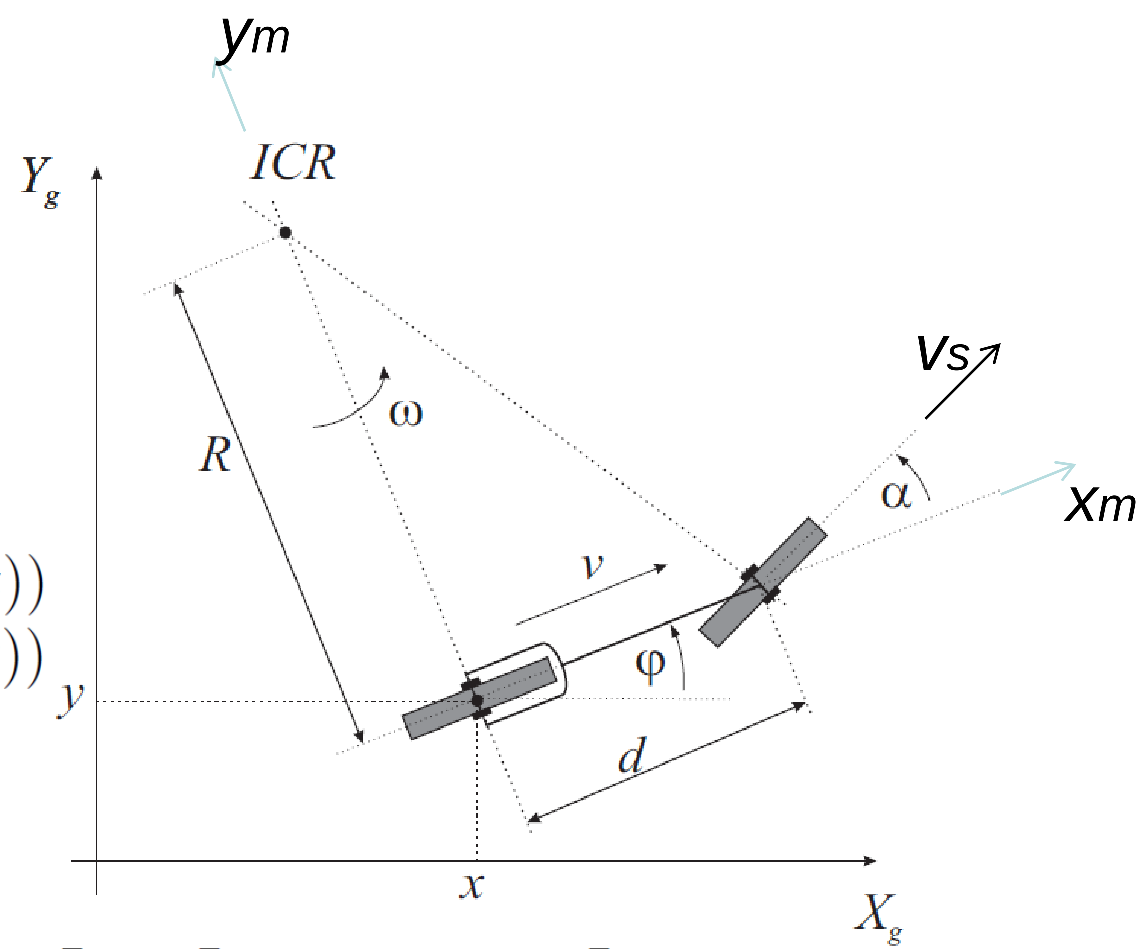
Kolo - pogon na krmilno kolo

Interna kinematika:

$$\dot{x}_m = v_s(t)\cos(\alpha(t))$$
$$\dot{y}_m = 0$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$

Eksterna kinematika:

$$\dot{x} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,cos(\varphi(t))$$
$$\dot{y} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,sin(\varphi(t))$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$



$$v = v_s(t)\cos(\alpha(t))$$
$$\omega(t) = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi(t)) & 0\\ \sin(\varphi(t)) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(t)\\ \omega(t)\end{bmatrix}$$

Kolo - pogon na zadnje kolo

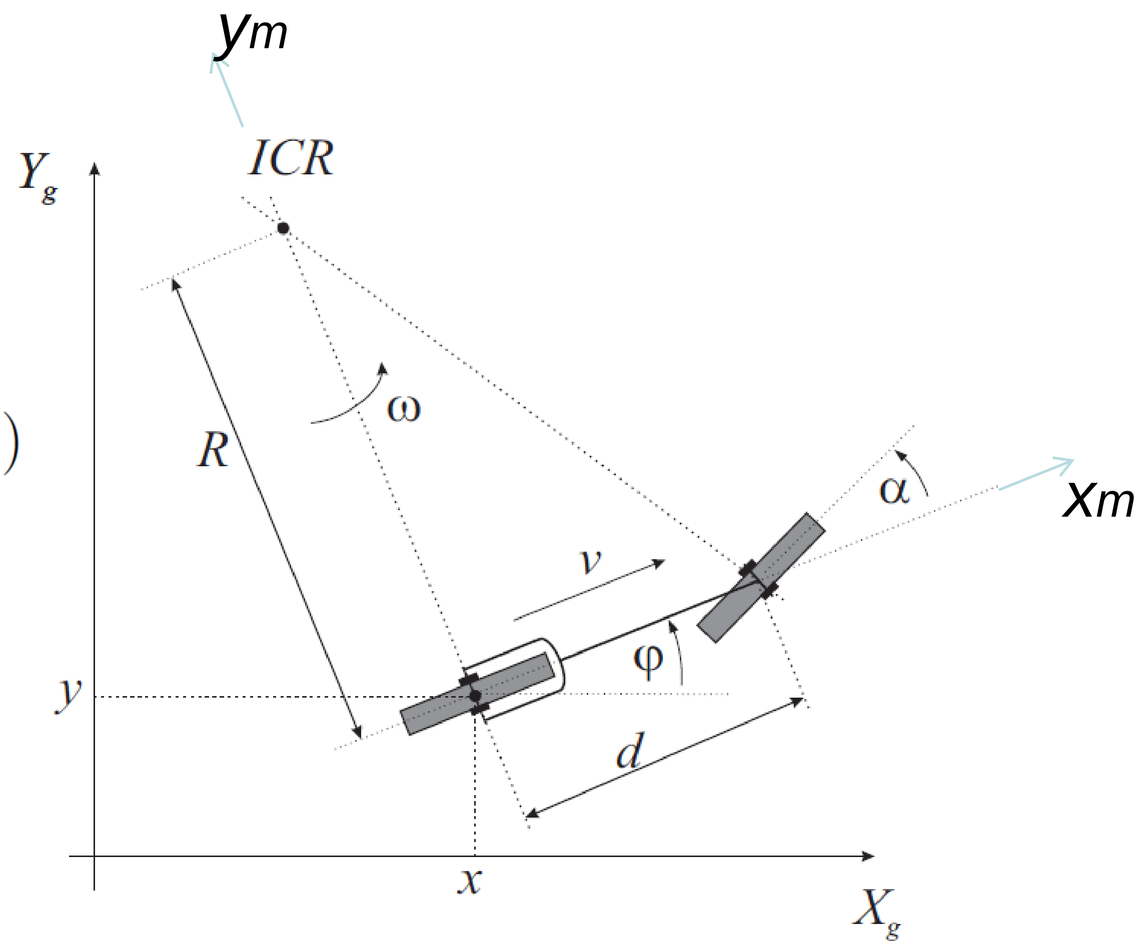
$V_R = v = v_s(t)\cos(\alpha(t))$

Interna kinematika:

$$\dot{x}_m(t) = v_r(t)$$
$$\dot{y}_m(t) = 0$$
$$\omega(t) = \dot{\varphi} = \frac{v_r(t)}{d}\tan(\alpha(t))$$

Eksterna kinematika:

$$\dot{x} = v_r(t)\cos(\varphi(t))$$
$$\dot{y} = v_r(t)\sin(\varphi(t))$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_r(t)}{d}\tan(\alpha(t))$$



$$\omega(t) = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

Kolo - pogon na zadnje kolo

Vhoda, hitrost zadnjega kolesa in hitrost krmiljenja:

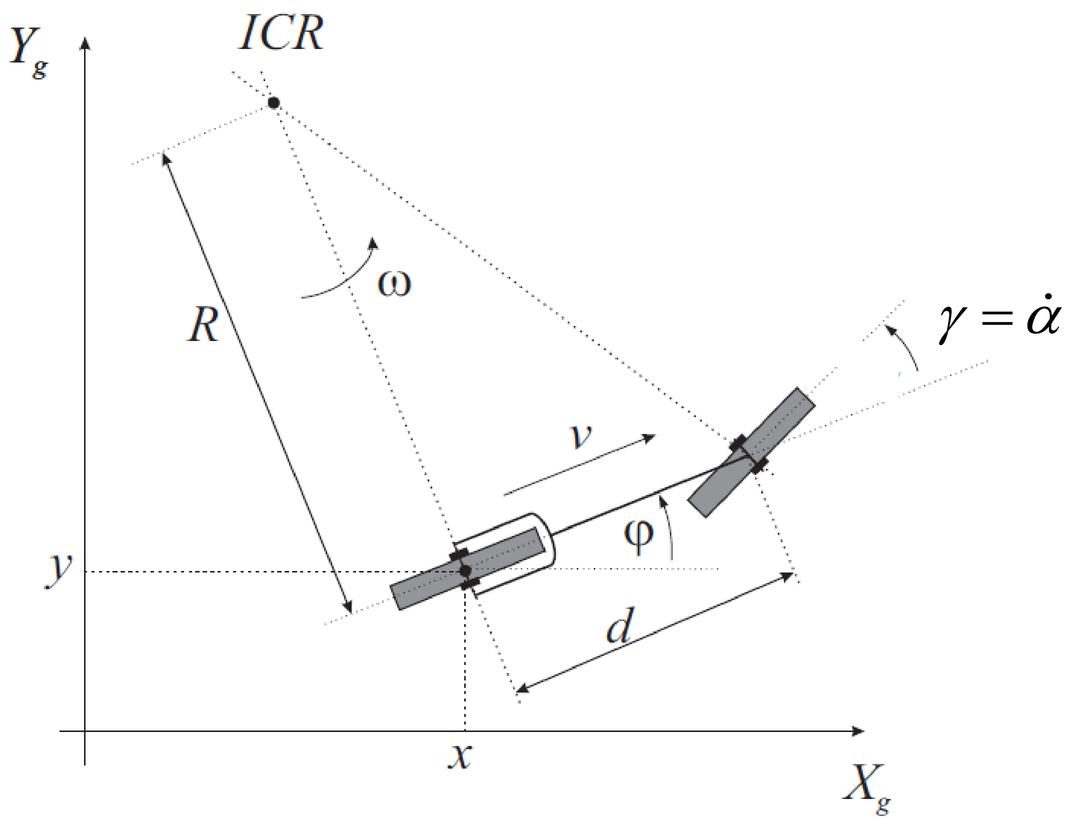
$$v = v_R$$
$$\gamma = \dot{\alpha}$$

Zapis sistema ima sedaj štiri stanja

$$\mathbf{q} = [x, y, \varphi, \alpha]^T$$

Kinematični model:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \\ \frac{1}{d}\tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \gamma \end{bmatrix}$$



Direktna kinematika (kolo)

- Kot za diferencialni pogon, poenostavljena kinematika ima isto obliko

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\varphi(t)\right) & 0 \\ \sin\left(\varphi(t)\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

Euler integracija:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s\cos(\varphi(k)) \\ y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s\sin(\varphi(k)) \\ \varphi(k+1) &= \varphi(k) + \omega(k)T_s \end{aligned}$$

Runge-Kutta integracija:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + v(k)T_s\cos\left(\varphi(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\ y(k+1) &= y(k) + v(k)T_s\sin\left(\varphi(k) + \frac{\omega(k)T_s}{2}\right) \\ \varphi(k+1) &= \varphi(k) + \omega(k)T_s \end{aligned}$$

Inverzna kinematika (kolo prednji pogon)

- v splošnem težko rešljiva
- enostavna za preprosto strategijo gibanja:
  - premo gibanje: $\alpha(t) = 0$
  - kroženje na mestu: $\alpha(t) = \pm\frac{\pi}{2}$
- Premo gibanje (diskretizacija Euler)

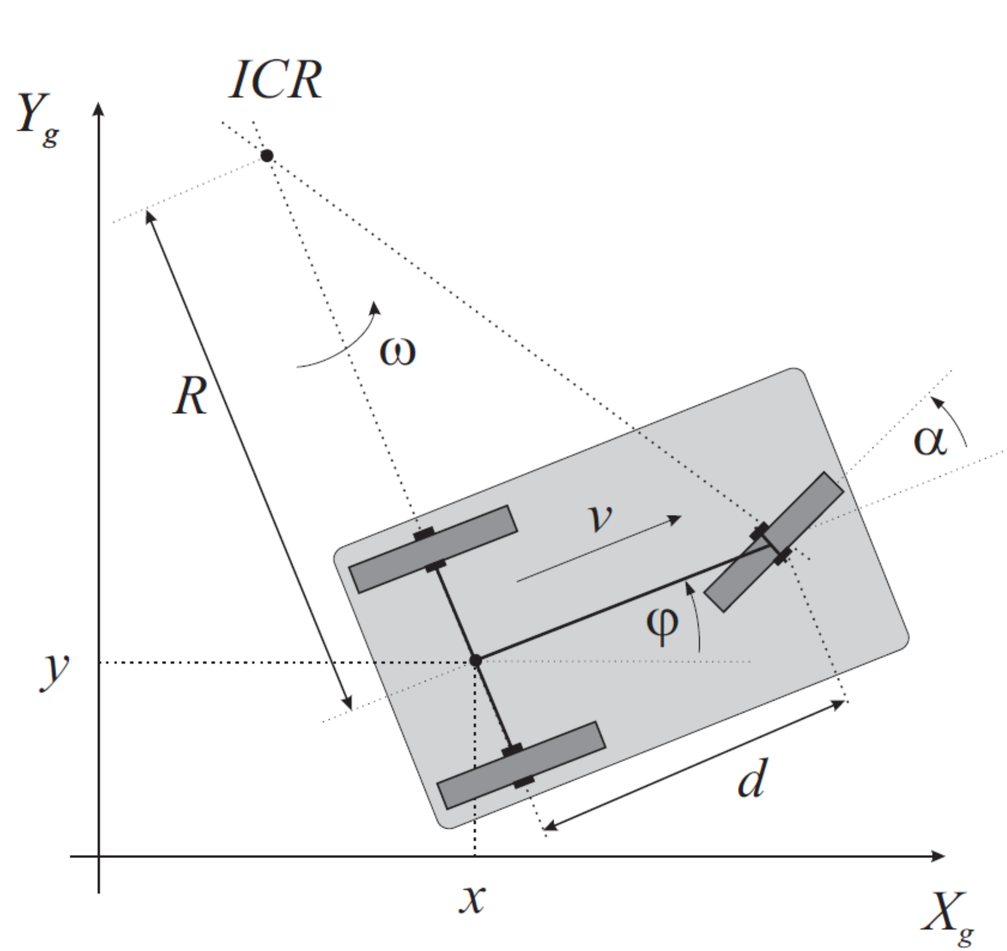
$$x(k+1) = x(k) + v_s(k)cos\left(\varphi(k)\right)T_s$$
$$y(k+1) = y(k) + v_s(k)sin\left(\varphi(k)\right)T_s$$
$$\varphi(k+1) = \varphi(k)$$

- Kroženje

$$x(k+1) = x(k)$$
$$y(k+1) = y(k)$$
$$\varphi(k+1) = \varphi(k) + \frac{v_s(t)}{d}T_s$$

Pogon tricikel

- V praksi pogostejši (stabilen)
- **Kinamatika ?**
- Sledimo središčno točko na osi zadnjih koles



Kot kolo:

Prednji pogon:

$$\dot{x} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,cos(\varphi(t))$$
$$\dot{y} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,sin(\varphi(t))$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$

Zadnji pogon (ni praktičeno vl!=vr):

$$\dot{x} = v_r(t)\cos(\varphi(t))$$
$$\dot{y} = v_r(t)\sin(\varphi(t))$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_r(t)}{d}\tan(\alpha(t))$$

Tricikel s prikolico

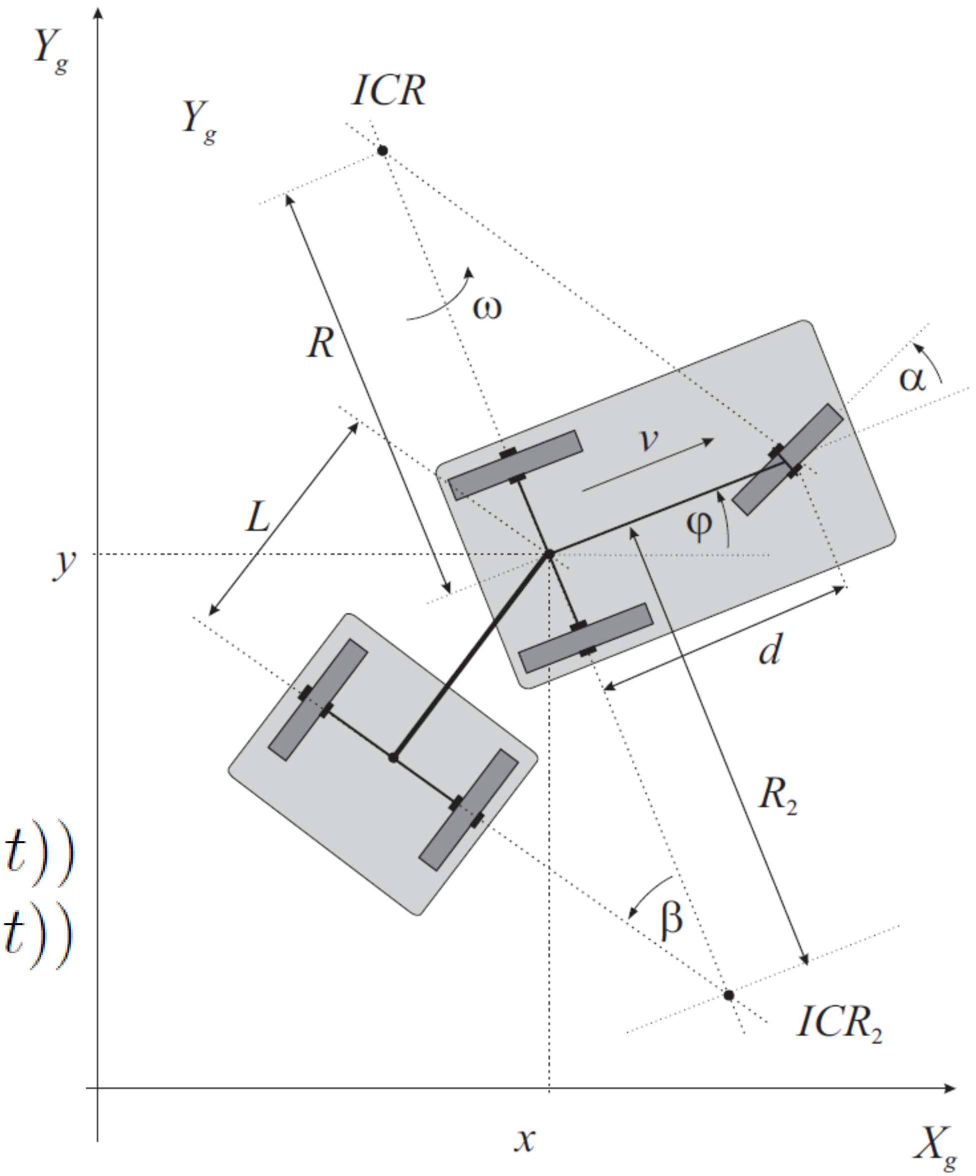
- Sledimo središčno točko na osi zadnjih koles tricikla. Pogon na krmilno kolo.
- **Kinamatika ?**

Upoštevamo ICR2:

$$\omega_2(t) = \frac{v}{R_2} =$$

kinematika:

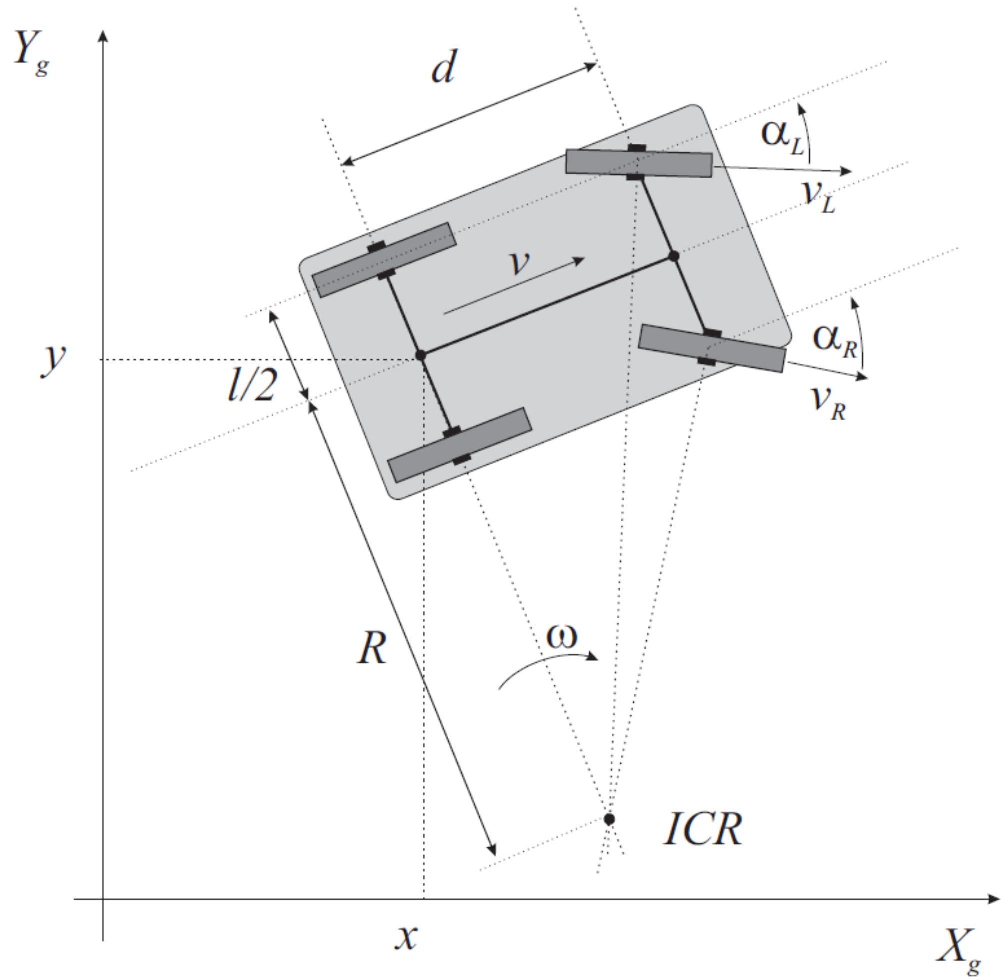
$$\dot{x} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,cos(\varphi(t))$$
$$\dot{y} = v_s(t)\cos(\alpha(t))\,sin(\varphi(t))$$
$$\dot{\varphi} = \frac{v_s(t)}{d}\sin(\alpha(t))$$
$$\dot{\beta} = \frac{v_s\cos\alpha\sin\beta}{L}$$



Avtomobil – Akermanov pogon

Osnovna ideja:

- notranje kolo (bližje ICR) ima večji zasuk kot zunanje, kar omogoči rotacijo vozila okoli središčne točke na osi zadnjih koles.
- ni drsenja zadnjih koles zato mora ICR ležati na premici, ki gre skozi zadnjo os
- manjša obraba pnevmatik
- notranja kolesa imajo manjšo hitrost



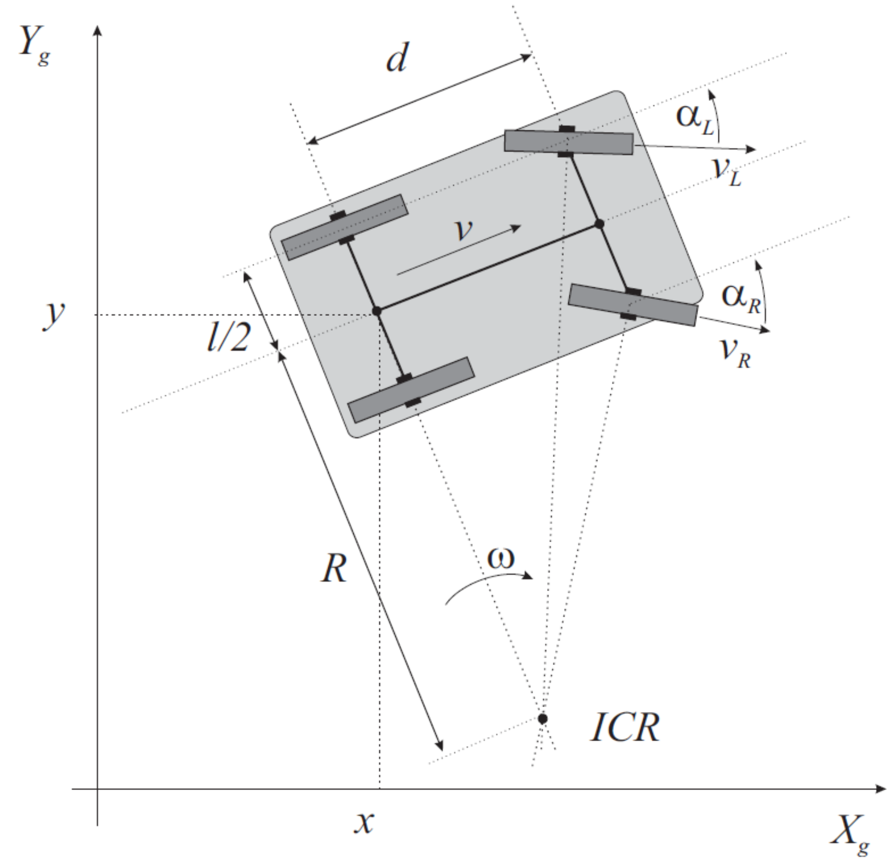
Avtomobil – Akermanov pogon…

Obodne hitrosti zadnjih koles:

$$v_{outer} = \omega\left(R + \frac{l}{2}\right)$$
$$v_{inner} = \omega\left(R - \frac{l}{2}\right)$$

Potrebna kota zasuka krmilnih koles:

$$\alpha_{outer} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{R+\frac{l}{2}}{d}$$
$$\alpha_{inner} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{R-\frac{l}{2}}{d}$$

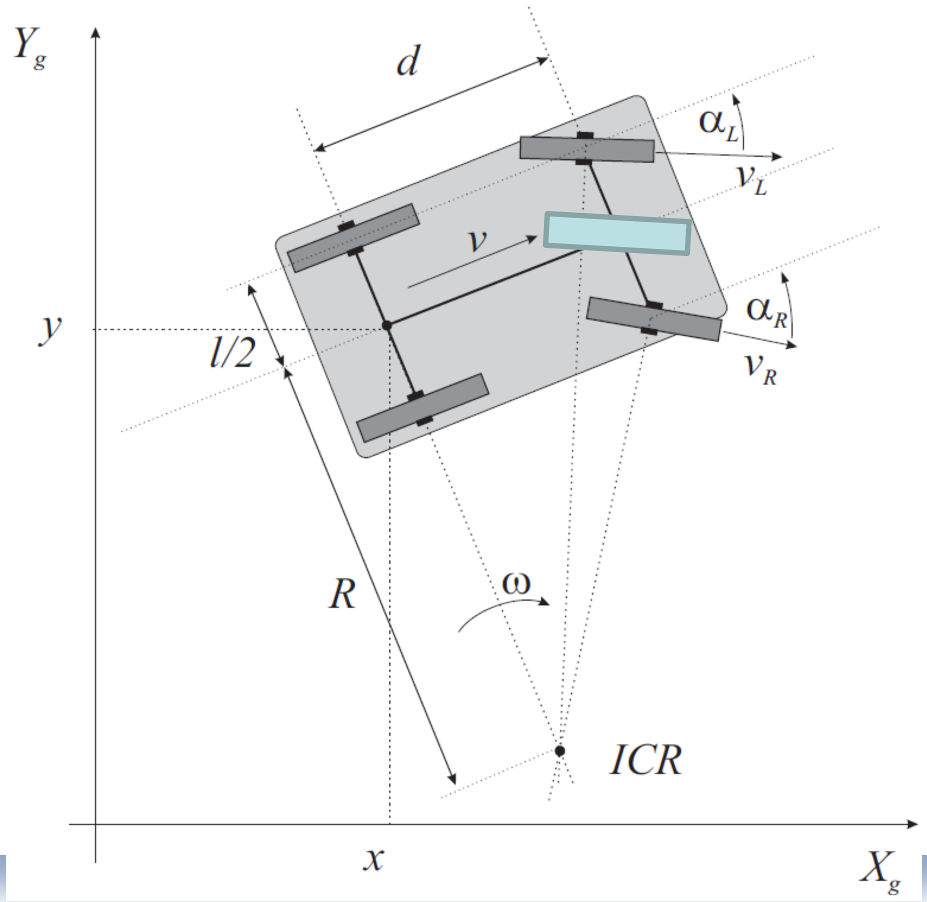


Avtomobil – Akermanov pogon…

- Akermanov model je primeren za modeliranje večjih vozil
- Poenostavljeno ga lahko obravnavamo s kinematiko tricikla, če vzamemo srednji zasuk krmilnih koles:

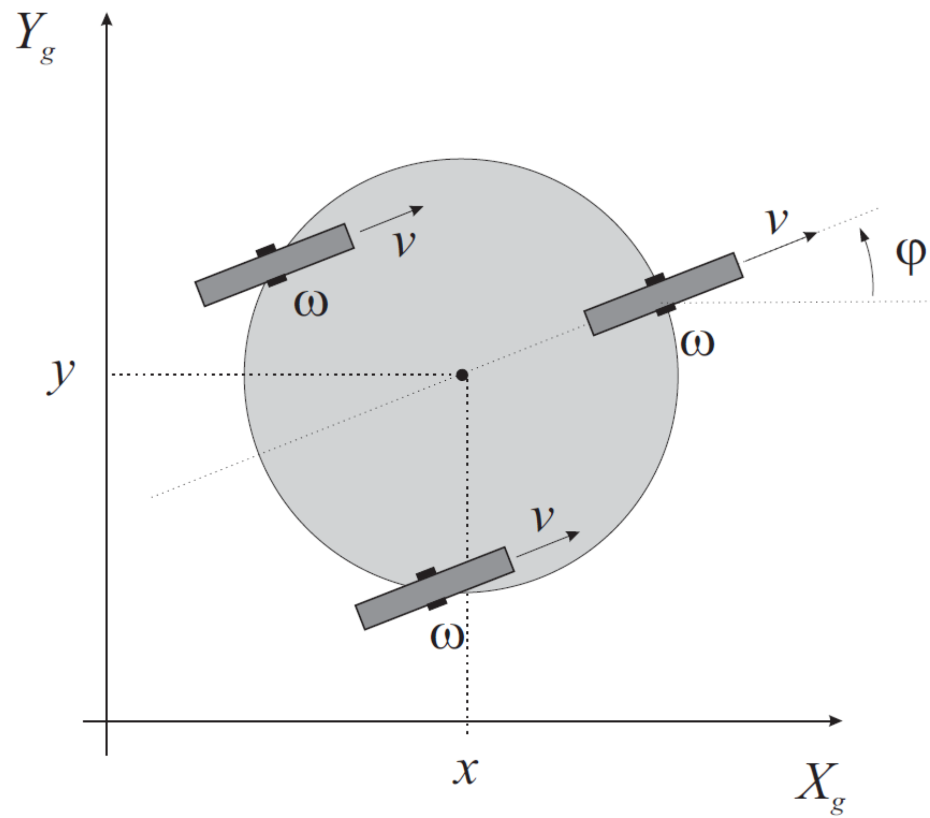
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{R}{d}$$

- Inverzna kinematika Akermanovega pogona je zahtevna



Sinhroni pogon

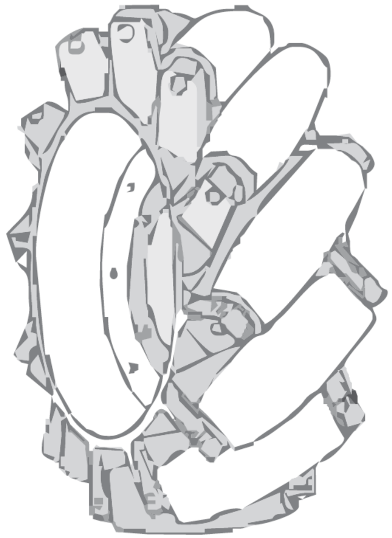
- Vsako kolo lahko krmilimo po smeri, vsa kolesa imajo isti zasuk – sinhroni pogon
- Koles montirana simetrično (enakostranični trikotnik)
- Osi koles so vedno paralelne -> ICR je v neskončnosti
- Vhoda: *v* in *w*
- Kinematični model:

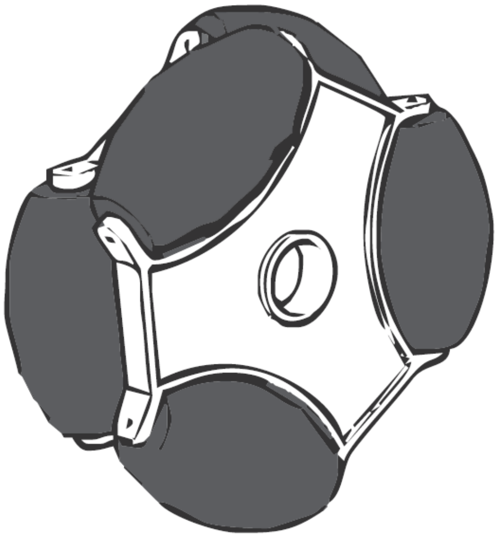


$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

Večsmerni pogon

- Uporablja komplesna kolesa: Mecanum kolo (45°) in večsmerno (omni) kolo (90°)

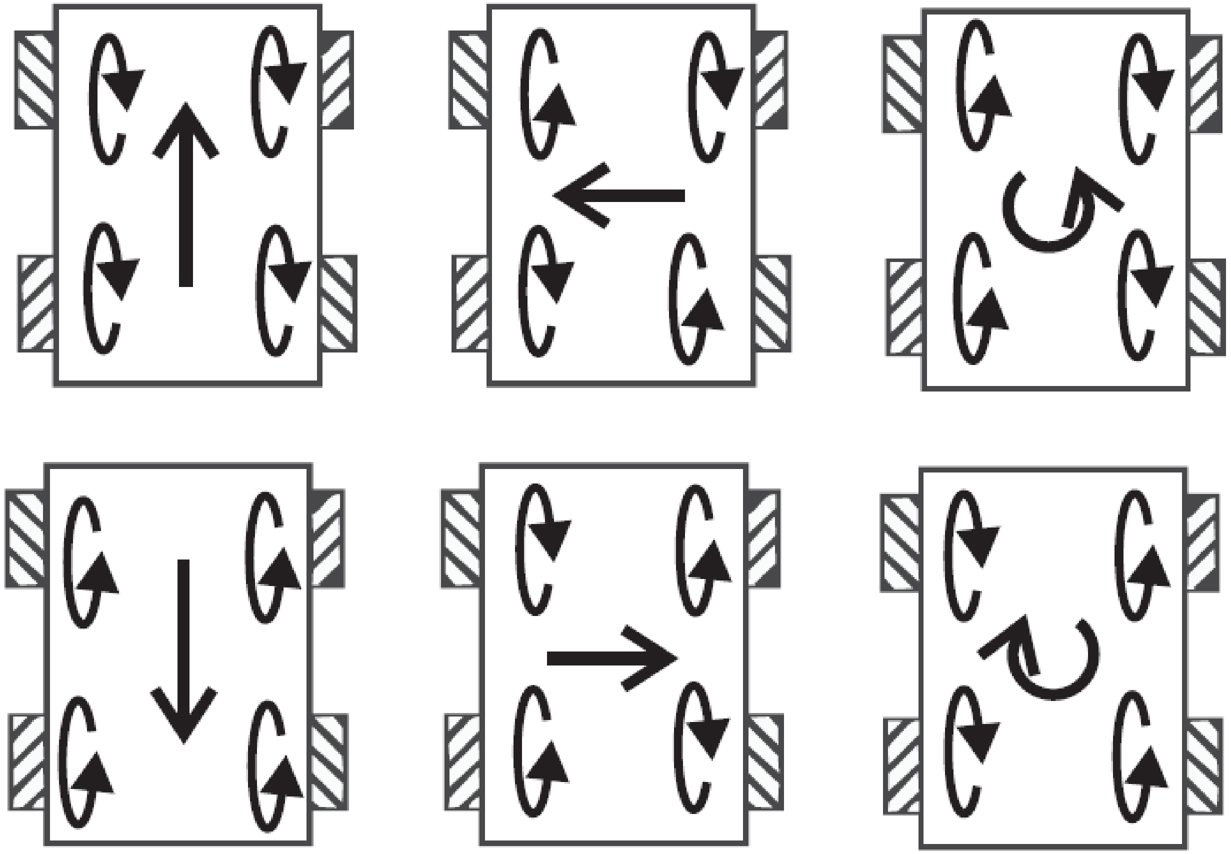




- Lahko se kotali v smeri svoje orientacije (navadno kolo)
- Kotaljenje v smeri valjčkov, če blokiramo glavno os
- Kotaljenje v poljubno smer s kombinacijo osnovnih smeri

Večsmerni pogon…

- Uporaba levo in desno sučnih valjčkov (diagonalni kolesi isto smer valčkov, tako da se kotalijo pravokotno na diagonalo)
- Vozilo se lahko premika v poljubni smeri…



Gosenični pogon

- Večja površina kontakta s tlemi (ne le točka ali daljica)
- Boljši oprijem omogoča gibanje na zahtevnem terenu, kjer kolesni pogoni odpovejo
- Sprememba smeri zahteva drsenje gosenic, drsenje odvisno od terena
- Poenostavljeno ga lahko obravnavamo z diferencialno kinematiko (napak odometrije je velika)

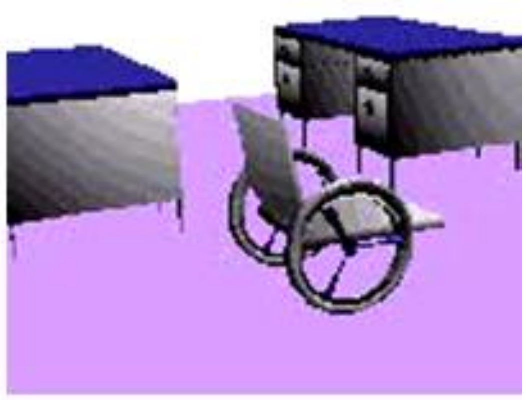
Omejitve gibanja

Omejitve gibanja kolesnih robotov

- **Dinamične omejitve**: zaradi dinamičnega modela, omejeno pospeševanje, zaradi vztrajnosti sistema in omejitev aktuatorjev (motor z omejenim navorom oz. napajanjem)
- **Kinematične omejitve** izhajajo iz zgradbe sistema oz. kinematičnega modela (holonomične/neholonomične)
- **Neholonomične omejitve** omejujejo smeri možnih premikov (hitrosti)
- **Holonomične omejitve** omejujejo dimenzijo opisa sistema s posplošenimi koordinatami (stanja)
- **Holoničen sistem** je sistem brez omejitev oziroma ima le holonomične omejitve
- **Neholonomičen sistem** ima neholonomične omejitve

Omejitve gibanja kolesnih robotov…

- Holonomičen sistem se vrne v začetno stanje (lego) če vrnemo notranje spremenljivke v začetno stanje (zasuki koles, sklepov)
- Za neholonomične sisteme to ne drži, njihovo stanje je odvisno od opravljene poti (zaporedje notranjih stanj…)



Holonomične omejitve

- So vezane na stanja sistema

$$f(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(q_1, \cdots, q_n) = 0$$

- Določajo podmnožico vseh možnih konfiguracij sistema (delovni prostor), ki ustrezajo omejitvi – zmanjšanje DOF
- z njo lahko eliminiramo določeno stanje opisa sistema
- Za *m* omejitev -> *n-m* dimenzionalen podprostor dejanskih možnih konfiguracij (*n-m* DOF)

Neholonomične omejitve

- Omejitve možnih hitrosti sistema (oz. smeri gibanja)

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n) = 0$$

- So neintegrabilne, ni jih možno prevest v holonomične (eliminacija hitrosti -> $f(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(q_1, \cdots, q_n) = 0$)
- Za *m* omejitev -> *n-m* dimenzionalen prostor hitrosti (smeri premikov v danem trenutku)
- Predpostavimo lin. odvisnost omejitev od hitrosti stanj

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{q}) & \cdots & a_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

- *a*(*q*) vektor členov omejitve za nedovoljene smeri pomika

Nehonolomične omejitve...

- *m* nehol. omejitev podamo z matriko členov omejitev A

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- za *m* nehol omejitev imamo *n-m* dosegljivih smeri

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = [\mathbf{s}_1(\mathbf{q}), \cdots, \mathbf{s}_{n-m}(\mathbf{q})]$$

- kar definira kinematičen model sistema (***v*** -vhodne sprem.)

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{v}(t)$$

- velja

$$\mathbf{AS} = \mathbf{0}$$

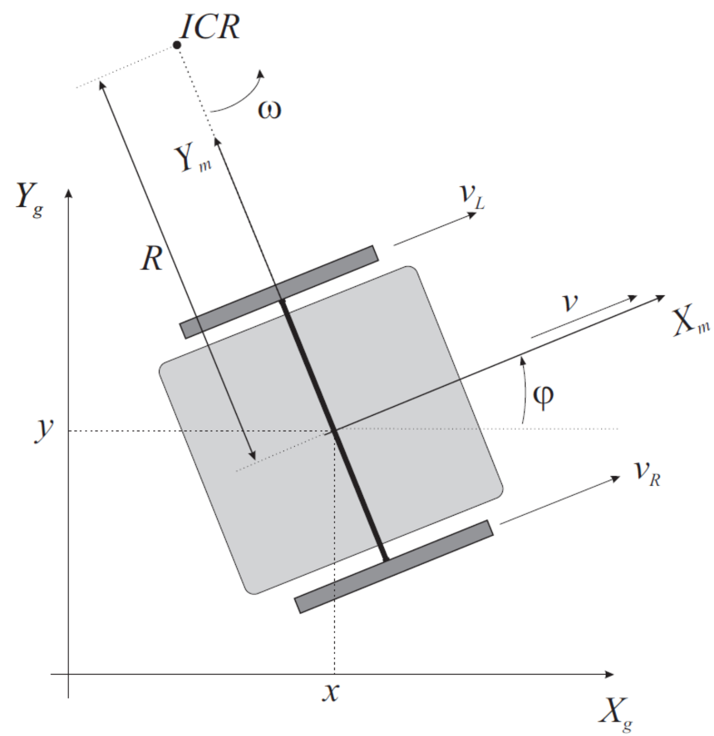
Vektorska polja, porazdelitev

- **Porazdelitev** definira dosegljiv prostor iz določene točke prostora **q** s premiki, ki so linearna kombinacija vektorskih polj v matriki **S**.
- **Vektorska polja** so odvodi posplošenih koordinat (stanj), torej hitrosti sistema. Preslikava, ki vsaki točki prostora priredi natanko določen vektor.
- Primer dif. pogon:

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = u_1\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) + u_2\mathbf{s}_2(\mathbf{q})$$

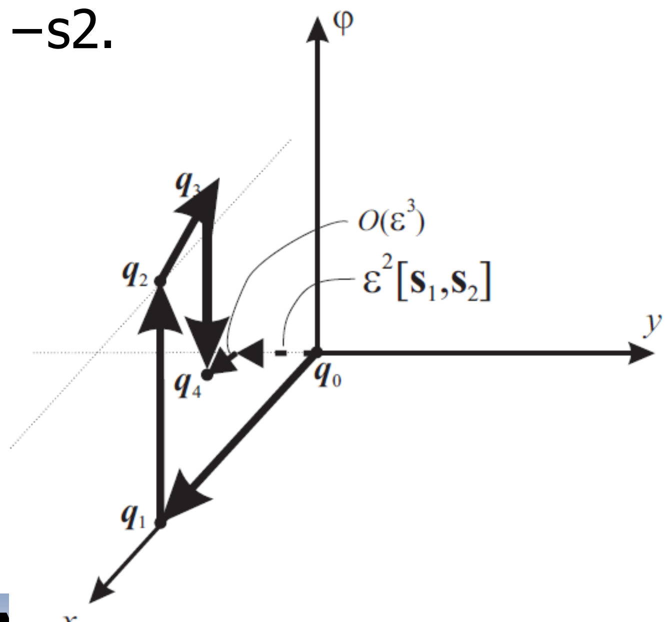
$$\mathbf{a}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_i \perp \mathbf{a}_j$$

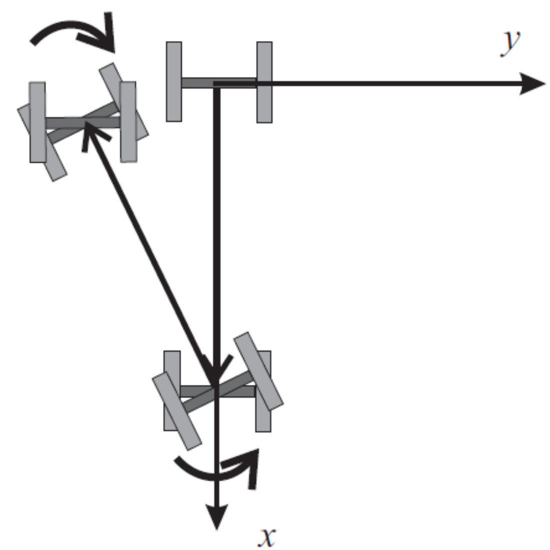


Vektorska polja, porazdelitev…

- **Vsebovana porazdelitev**, če vektorska polja definirajo celoten prostor
- Če osnovna porazdelitev (*s1, s2,…)* ni vsebovana, potem lahko določimo nove vektorje, ki jih v osnovni porazdelitvi ni (so linearno neodvisni od vektorjev osnovne porazdelitve). Te nove smeri lahko dobimo s končnim številom preklopov pomikov (pomike limitiramo proti 0) v smeri vektorskih polj osnovne porazdelitve.
- Primer paralelnega parkiranja dif. pogona: Določimo novo stanje vozila, če začnemo v stanju q0 = [0,0,0]′ in se najprej za kratek čas ε gibljemo iz q0 v smeri s1, nato v smeri s2 za čas ε, nato v smeri −s1 za čas ε ter za čas ε v smeri −s2.

$$\mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$





Liejevi oklepaji

- **Liejevi oklepaji**, operacija nad vektorskimi polji i(q) in j(q), ki omogoča določitev teh novih smeri pomikov ([i, j]), ki jih v osnovni porazdelitvi ni.

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{i} - \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{j}$$

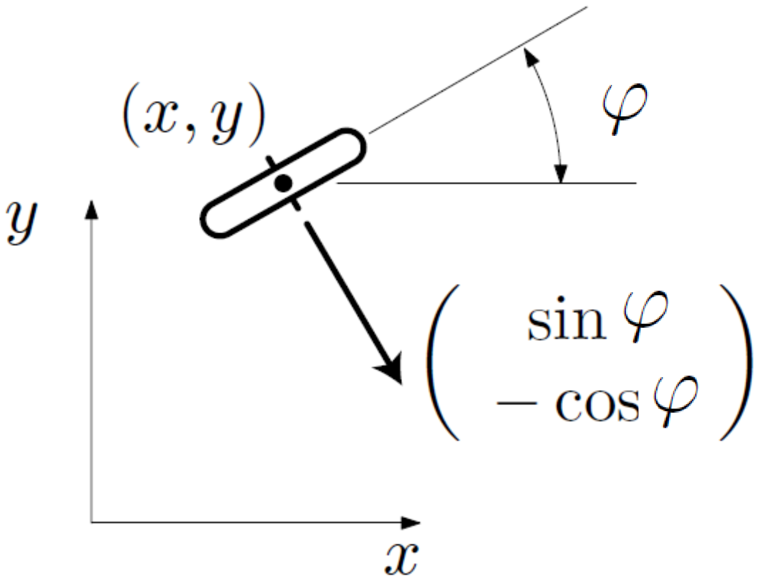
$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{q}_n} \\ \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{q}_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial i_n}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial i_n}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial i_n}{\partial \mathbf{q}_n} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial j_1}{\partial \mathbf{q}_n} \\ \frac{\partial j_2}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial j_2}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial j_2}{\partial \mathbf{q}_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial j_n}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial j_n}{\partial \mathbf{q}_2} & \cdots & \frac{\partial j_n}{\partial \mathbf{q}_n} \end{bmatrix}$$

Frobeniousov teorem

Če je osnovna porazdelitev vsebovana, potem so vse morebitne omejitve, ki jih sistem ima, integrabilne in sistem je holonomičen.

- Porazdelitev je vsebovana, če z Liejevimi oklepaji ne moremo generirati novih linearno neodvisnih vektorskih polj, kar pomeni, da je sistem popolnoma holonomičen (nima omejitev gibanja ali pa so vse omejitve holonomične).
- m omejitev, k holonomičnih in m-k neholonomičnih
  - $k=m$, vse omejitve holonomične, osnovna porazdelitev je vsebovana, njena dimenzija (št. neodvisnih vektorjev, DOF) je n-m
  - $0 < k < m$, k holonomičnih omej., dimenzija vsebovane porazdelitve je n-k
  - $k=0$, vse omejitve neholonomične, dimenzija vsebovane porazdelitve je n

Primer kolesa



$$\mathbf{s}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

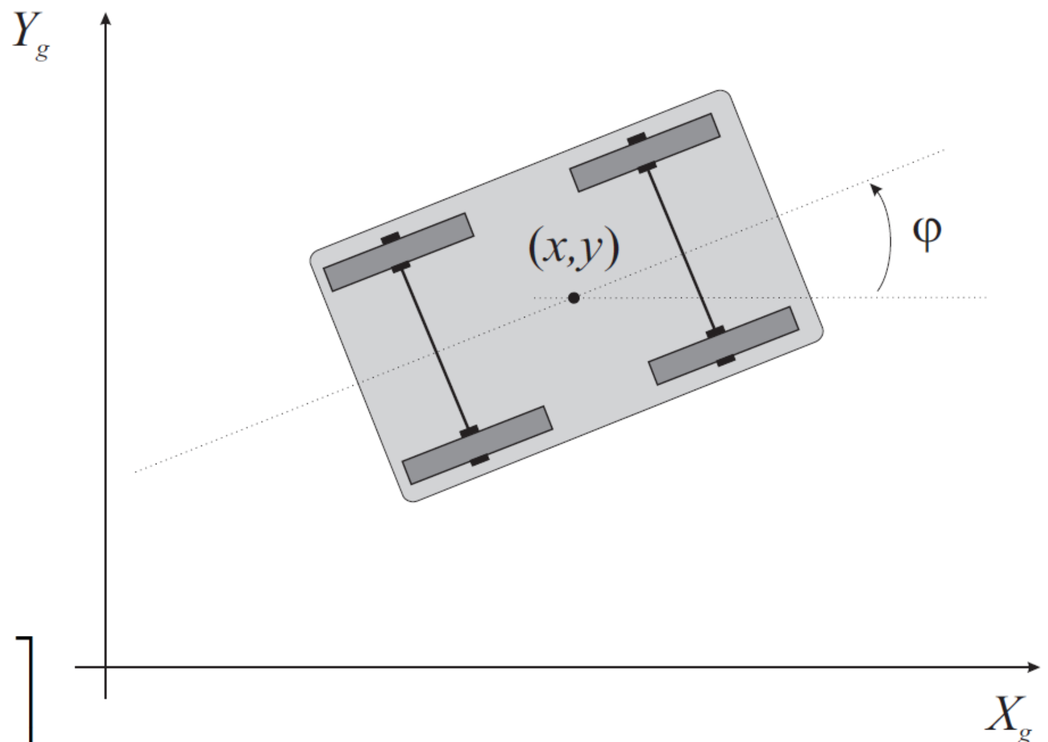
Ima eno omejitev – bočni premik, ki ne omejuje DOF=3.
(Liejevi oklepaji in Frobeniousov teorem)

$$\mathbf{s}_3 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_1 - \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

- s3 je linearno neodvisen od s1 in s2, porezdelitev {s1,s2,s3} je vsebovana z dimenzijo=3 -> 1 neholonomična omejitev, neholonmičen sistem.
- vsi nadaljnji Liejevi oklepaji so lin. odvisni [s1,s3], [s2,s3]…

Primer avto brez krmilnega mehanizma

DOF=?
omejitve=?
kinematika=?



možna smer premika:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

smeri omejitev:

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obe omejitvi sta holonomični -> DOF=1 :

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q})^T\dot{(\mathbf{q})} = \dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$$
$$\mathbf{a}_2(\mathbf{q})^T\dot{(\mathbf{q})} = \dot{\varphi} = 0$$

integracija

$$\varphi = \varphi_0$$
$$(x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi = 0$$

Avtomobil, zadnji pogon

vhoda: v in γ

stanja: x, y, φ, α

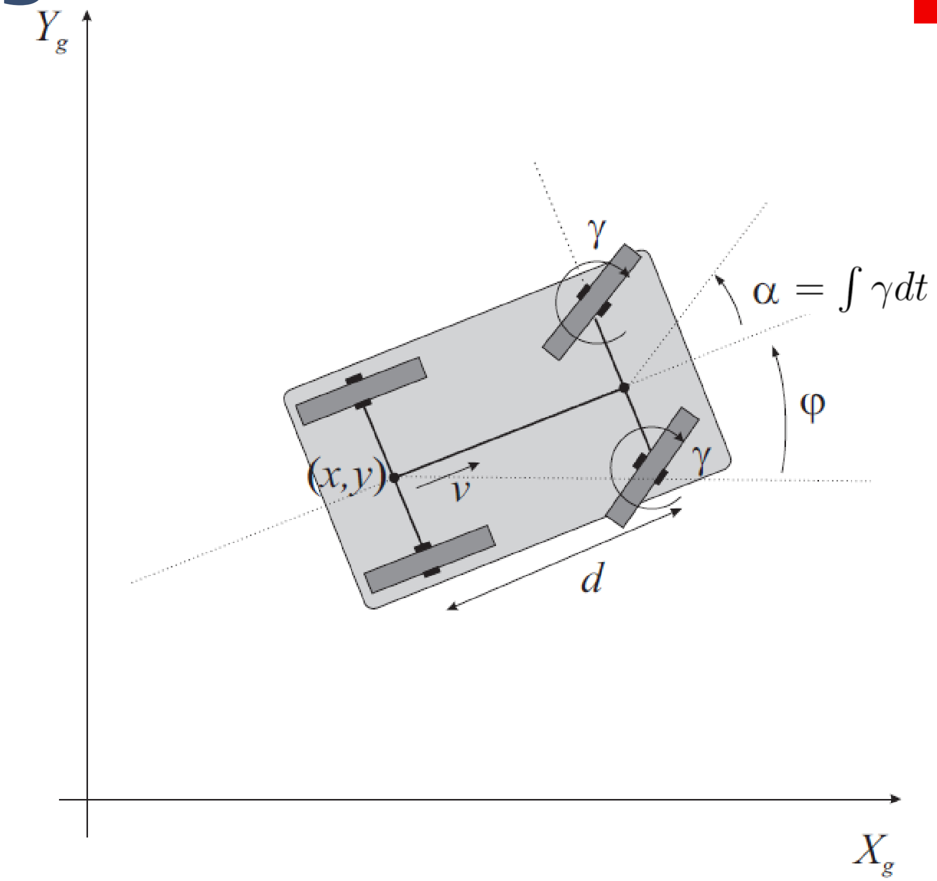
ni možen bočni premik na prednja in zadnja kolesa

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha+\varphi) \\ -\cos(\alpha+\varphi) \\ d\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

možni premiki, kinematika

$$\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2][v, \gamma]^T$$

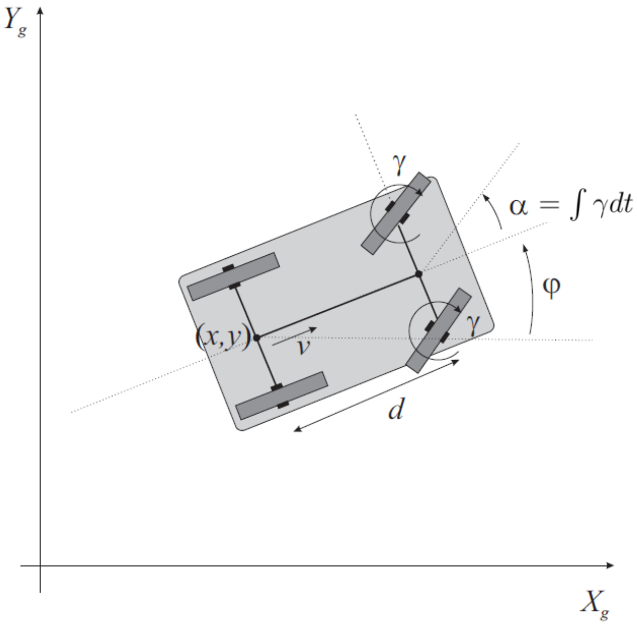
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \\ \frac{1}{d}\tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \gamma \end{bmatrix}$$



imamo 4 stanja in 2 omejitvi – kakšni?

Avtomobil, zadnji pogon…

$$\mathbf{s}_3 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \frac{\partial \mathbf{s}_2}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_1 - \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{d\cos^2\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{s}_4 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3] = \frac{\partial \mathbf{s}_3}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_1 - \frac{\partial \mathbf{s}_1}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sin\varphi}{d\cos^2\alpha} \\ -\frac{\cos\varphi}{d\cos^2\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

s1, s2, s3, s4 so lin. neodvisni -> obe omejitvi neholonomični -> popolnoma neholonomičen sistem -> dimenzija vsebovane porazdelitve = 4 -> DOF=4

Dinamični model z omejitvami

Lagrange-ova formulacija

- sistem brez omejitev gibanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} + g_k + \tau_{d_k} = f_k$$

- sistem z omejitvami gibanja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} + g_k + \tau_{d_k} = f_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{jk}$$

- L – Lagrangian, λ - Lagrange-evi multiplikatorji, P moč zaradi izgub (dušenje), fk – posplošena sila, gk - sile gravitacije, τd- neznane motnje

Dinamični model - matrično

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

kjer so:

$\mathbf{q}$ vektor posplošenih koordinat (dimenzije $n \times 1$),

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$ pozitivno definitna matrika mas in vztrajnosti (dimenzije $n \times n$),

$\mathbf{V}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ vektor Coriolisovih in centrifugalnih členov (dimenzije $n \times 1$),

$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$ vektor sil zaradi trenja oziroma dušenja podlage (dimenzije $n \times 1$),

$\mathbf{G}(\mathbf{q})$ vektor zaradi gravitacijskih sil oziroma navorov (dimenzije $n \times 1$),

$\boldsymbol{\tau}_d$ vektor neznanih motenj, vključno z dinamiko, ki ni zajeta v modelu (dimenzije $n \times 1$),

$\mathbf{E}(\mathbf{q})$ matrika preslikav aktuatorskega prostora v prostor posplošenih spremenljivk (dimenzije $n \times r$),

$\mathbf{u}$ vektor vhodov (dimenzije $r \times 1$),

$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ matrika kinematičnih omejitev (dimenzije $m \times n$)

$\boldsymbol{\lambda}$ vektor omejitvenih sil (Lagrange-ovi multiplikatorji) (dimenzije $m \times 1$).

Dinamični model, prostor stanj

- Dinamični sistem enačb, ki je podvržen *m* kinematičnim omejitvam

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

- Kinematični model

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{v}(t) \xrightarrow{\text{odvajamo}} \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{v}}$$

- Združimo, izrazimo s hitrostmi **v**

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{V} + \mathbf{F} + \mathbf{G} = \mathbf{E}\mathbf{u} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$$

- Znebimo se λ z množenjem **S**′ (velja $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{0}$ oz. $\mathbf{S}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{S}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}^T\mathbf{V} + \mathbf{S}^T\mathbf{F} + \mathbf{S}^T\mathbf{G} = \mathbf{S}^T\mathbf{E}\mathbf{u}$$

- Vpeljemo oznake

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S},\ \widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{S}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{S}^T(\mathbf{V} + \mathbf{F} + \mathbf{G}) \text{ in } \widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{S}^T\mathbf{E}$$

- dobimo

$$\widetilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \widetilde{\mathbf{V}} = \widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}$$

Dinamični model, prostor stanj…

- Definiramo prostor stanj kot

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \mathbf{v}^T]^T$$

- Dobimo končen zapis dinamike in kinematike v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{v} \\ -\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times r} \\ \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

- Kjer je **u** vektor vhodov v sistem (sile oz. navori)

- Pod določenimi pogoji lahko za želene psevdo pospeške sistema določimo potrebne vhoden sile oz. navore

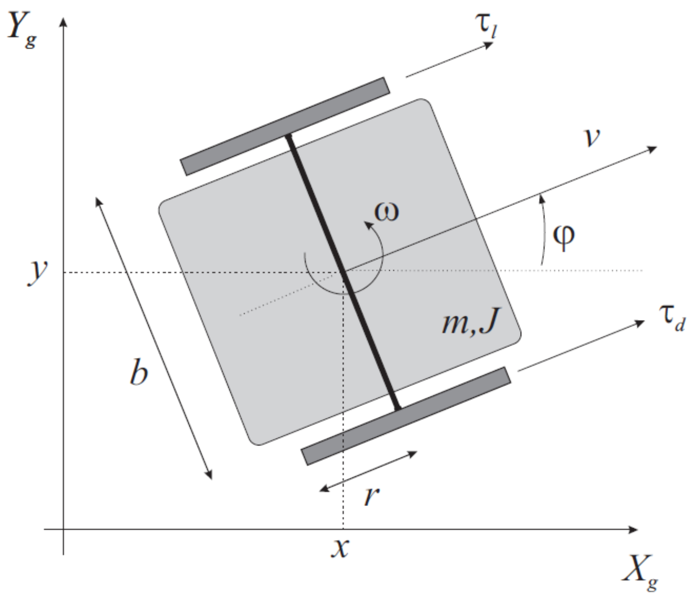
$$\widetilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \widetilde{\mathbf{V}} = \widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{u} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\widetilde{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}} + \widetilde{\mathbf{V}}\right)$$

Dinamični model dif. pogona

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = W_K - W_P = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2$$



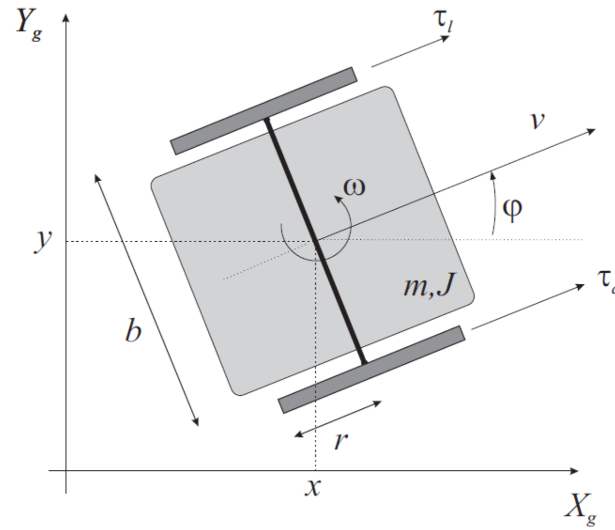
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_k} = f_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{jk}$$

zanemarimo izgube P

$$m\ddot{x} - \lambda_1 \sin\varphi - \tfrac{1}{r}(\tau_d + \tau_l)\cos\varphi = 0$$
$$m\ddot{y} + \lambda_1 \cos\varphi - \tfrac{1}{r}(\tau_d + \tau_l)\sin\varphi = 0$$
$$J\ddot{\varphi} - \tfrac{b}{2r}(\tau_d - \tau_l) = 0$$

Dinamični model dif. pogona …

$$m\ddot{x} - \lambda_1 \sin\varphi - \tfrac{1}{r}(\tau_d + \tau_l)\cos\varphi = 0$$
$$m\ddot{y} + \lambda_1 \cos\varphi - \tfrac{1}{r}(\tau_d + \tau_l)\sin\varphi = 0$$
$$J\ddot{\varphi} - \tfrac{b}{2r}(\tau_d - \tau_l) = 0$$



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} \cos\varphi & \cos\varphi \\ \sin\varphi & \sin\varphi \\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{b}{2} & -\frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Sv} \\ -\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times r} \\ \widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\varphi \\ v\sin\varphi \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{mr} & \frac{1}{mr} \\ \frac{b}{2Jr} & \frac{-b}{2Jr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_l \end{bmatrix}$$