Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Laboratorij za Modeliranje, Simulacijo in Vodenje

Laboratorij za Avtonomne Mobilne Sisteme

Avtonomni mobilni sistemi

Izr. prof. dr. Gregor Klančar

gregor.klancar@fe.uni-lj.si

Nedeterminističnost v mobilnih sistemih

2013/2014

Uvod

- Deterministični dogodki ne obstajajo, so le bolj ali manj verjetni dogodki
- Meritve so podvržene šumu, motnjam, okvaram senzorjem (negotovost)
- Aktuatorji (npr. Motorni pogon), šum, obraba koles, zdrs, okvare
- Nepredvidljivost okolja
- Negotovost delovanja algoritma (zadovoljiva natančnost, delovanja v realnem času)

- Robustni sistemi morajo upoštevati negotovosti

Osnove verjetnosti

- Naključna spremenljivka je ali diskretna ali zvezna
- Diskretne spremenljivke imajo končno število vrednosti (omejena zaloga, npr. met kovanca={lik, cifra})
- Zvezne spremenljivke pa neskočno zalogo vrednosti (npr. teža kovanca)

- Označimo: X – spremenljivka, x- vrednost
- Verjetnost da X zavzame vrednost x je

Diskretne

$$P(X = x)$$

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

Zvezne (*p(x)* –gostota porazdelitve verjetnosti)

$$P(X = x) = 0$$

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx$$

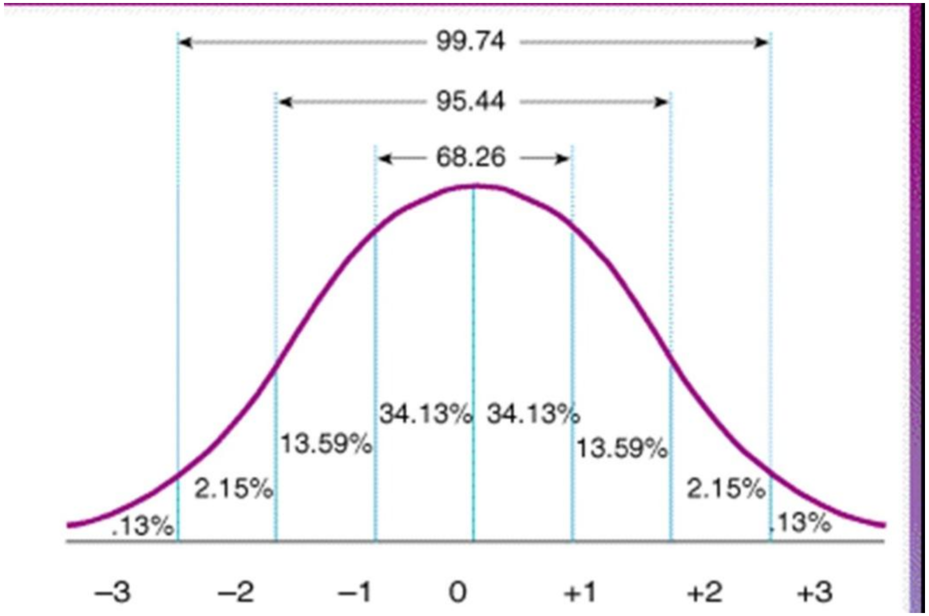
Osnove verjetnosti, normalna porazdelitev

- Je pogosta porazdelitev (ostale: uniformana, Cauchyjeva, Fišerjeva, Študentova t,…)
- Podana z Gaussovo funkcijo (srednjo vrednostjo oz. matematičnim upanjem in standardno deviacijo). Varianca je σ^2

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

$$E[(x-\mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx$$



Za vektor stanj ***x*** in kovariančno matriko Σ

$$p(\mathbf{x}) = \det(2\pi\mathbf{\Sigma})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

Osnove verjetnosti, dva dogodka

- Skupna porazdelitev verjetnosti $$p(x, y) = p(X = x, Y = y)$$
  če sta x in y neodvisna $$p(x, y) = p(x)p(y)$$
- Pogojna verjetnost $$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$
  če sta x in y neodvisna $$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x)$$
- Polna verjetnost

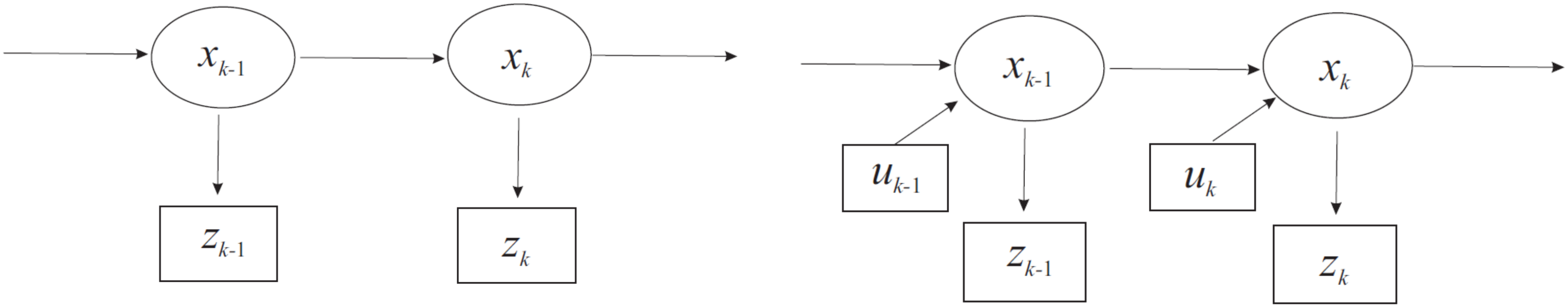
diskretne spremenljivke	zvezne spremenljivke
$\sum_x P(x) = 1$	$\int p(x)dx = 1$
$P(x) = \sum_y P(x, y)$	$p(x) = \int p(x, y)dy$
$P(x) = \sum_y P(x|y)P(y)$	$p(x) = \int p(x|y)p(y)dy$

Osnove verjetnosti, prikriti Markov proces

- Stanje je vsebovano – vsebuje vso informacijo o sistemu za njegov opis v danem trenutku (Markov proces)
- Stanje ni direktno dostopno, lahko jih ocenimo le preko meritve
- Velja:

$$p(x_k|x_0,\cdots,x_{k-1}) = p(x_k|x_{0:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$$

$$p(z_k|x_0,\cdots,x_k) = p(z_k|x_{0:k}) = p(z_k|x_k)$$



Osnove verjetnosti, Bayesovo pravilo

- Nam omogoča, da določene verjetnosti (težje določljive) izrazimo z drugimi

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \qquad P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}$$

- Zapis z normirnim koeficientom

$$P(x|y) = \eta P(y|x)P(x)$$

- Primer: X je stanje robota, ki ga ocenimo preko meritve Y.
  - p(x) je znanje o X pred opravljeno meritvijo - **napovedna ocena** (a priori)
  - p(x|y) znanje o X po opravljeni meritvi - **trenutna ocena** (a posteriori)
  - p(y|x) je statistični model senzorja
  - p(y) je verjetnost meritve y, določimo jo s teoremom polne verjetnosti

$$p(y) = \int p(y|x)p(x)dx$$

Osnove verjetnosti, primer

Do cilja obstajajo tri možne poti. Robot s 70% verjetnostjo izbere prvo, z 10% drugo in z 20% tretjo pot. Na prvi poti ima 5%, na drugi 10% in na tretji 8% možnost naleta na oviro.

1. Kako verjetno je, da robot naleti na oviro?
2. Robot naleti na oviro. Kakšna je verjetnost, da se je to zgodilo na prvi poti?

Označimo:

- izbrano pot z A={A1,A2,A3} in dogodek naleta na oviro z B
- verjetnostjo izbire poti P(A)=[P(A1) P(A2) P(A3)]=[0.7 0.1 0.2]
- Verjetnost ovire na določeni poti

  P(B|A)=[P(B|A1) , P(B|A2) , P(B|A3)]= [0.05 0.1 0.08]

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$
$$P(B) = 0.05 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.08 \cdot 0.2 = 0.061$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.05 \cdot 0.7}{0.05 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.08 \cdot 0.2} = 0.5738$$

Osnove verjetnosti, primer

Robot ima senzor za detekcijo odprtosti vrat. Stanje, ki nas zanima je odprtost vrat $X \in (odprta, zaprta)$*. Verjetnost, da so vrata v objektu odprta je* $P(X = odprta) = 0.4$*. Meritev senzorja* $Z \in (odprta, zaprta)$ *je pošumljena in jo lahko opišemo s sledečimi pogojnimi verjetnostmi*

$$P(Z = odprta|X = odprta) = 0.8$$
$$P(Z = zaprta|X = zaprta) = 0.9$$

Opazimo, da je verjetnost, da senzor izmeri narobe dokaj majhna. Če so vrata odprta je verjetnost napačne meritve 0.2, v primeru pa, da so vrata zaprta pa je verjetnost napačne meritve 0.1. Kolikšna je verjetnost, da so vrata odprta, če senzor zazna odprtost vrat?

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)}$$

$$P(z) = P(z|x)P(x) + P(z|\bar{x})P(\bar{x}) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.38$$

$$P(x|z) = \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.38} = 0.8421$$

Bayesov filter, zaporedne meritve (opazovanje)

- ocena stanja na podlagi zaporednih meritev

$$p(x_k|z_1,\cdots,z_k) = \frac{p(z_k|x_k,z_1,\cdots,z_{k-1})p(x_k|z_1,\cdots,z_{k-1})}{p(z_k|z_1,\cdots,z_{k-1})}$$

- krajši zapis

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k,z_{1:k-1})p(x_k|z_{1:k-1})}{p(z_k|z_{1:k-1})}$$

- ker je stanje vsebovano velja

$$p(z_k|x_k,z_{1:k-1}) = p(z_k|x_k)$$

$$\Downarrow$$

Predikcija stanja iz preteklih meritev

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1})}{p(z_k|z_{1:k-1})}$$

Bayesov filter, opazovanje...

- Predikcijski korak

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1}, z_{1:k-1})p(x_{k-1}|z_{1:k-1})dx_{k-1}$$

vsebovanost stanj

$$p(x_k|z_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|z_{1:k-1})dx_{k-1}$$

$$P(x_k|z_{1:k-1}) = \sum_{x_{k-1}} P(x_k|x_{k-1})P(x_{k-1}|z_{1:k-1})$$

korekcijska ocena iz prejšnjega trenutka

- Korekcijski korak

$$p(x_k|z_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1})}{p(z_k|z_{1:k-1})}$$

$$p(z_k|z_{1:k-1}) = \int p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1})dx_k$$

$$P(z_k|z_{1:k-1}) = \sum_{x_k} P(z_k|x_k)P(x_k|z_{1:k-1})$$

Bayesov filter, opazovanje...

- Najbolj verjetno oceno stanja določimo iz ocenjene porazdelitve gostote verjetnosti $p(x_k|z_{1:k})$

$$E[x_k] = \int x_k p(x_k|z_{1:k}) dx_k$$

- To je matematično upanje, ki minimizira kvadratični pogrešek meritve

- Bayesov filter je predvsem uporaben za diskretne spremenljivke
- Pri zveznih spremenljivkah moramo računati integrale porazdelitve gostote verjetnosti, ki so težavni ali niso eksplicitno rešljivi.

Bayesov filter, opazovanje - primer

Robot ima senzor za detekcijo odprtosti vrat. Stanje, ki nas zanima je odprtost vrat $X \in (odprta, zaprta)$. *Verjetnost, da so vrata v objektu odprta je* $P(X = odprta) = 0.4$. *Meritev senzorja* $Z \in (odprta, zaprta)$ *je pošumljena in jo lahko opišemo s sledečimi pogojnimi verjetnostmi*

$$P(Z = odprta|X = odprta) = 0.8$$
$$P(Z = zaprta|X = zaprta) = 0.9$$

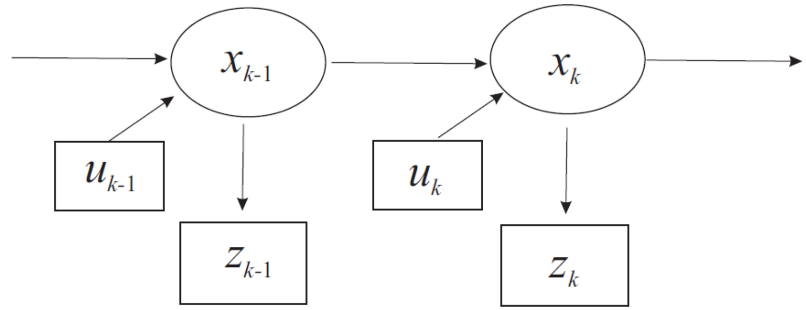
kako se spreminja verjetnost, da so
vrata odprta, če izmerimo tri meritve $z_{1:3} = (odprta, odprta, zaprta)$

$$P(x_k|z_{1:i}) = (0.8421, 0.9771, 0.9046)$$

Bayesov filter, opazovanje in akcija

- Stanje v trenutku k je odvisno od stanja v trenutku k-1 in vhoda v trenutku k

$$p(x_k|x_{k-1}, u_k)$$



- Akcija povečuje negotovost
- Meritev zmanjšuje negotovost
- Zanima nas kako akcije in meritve vplivajo na verjetnost izida stanja
- Bayesov izrek

$$p(x_k|z_{1:k}, u_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k, z_{1:k-1}, u_{1:k})p(x_k|z_{1:k-1}, u_{1:k})}{p(z_k|z_{1:k-1}, u_{1:k})}$$

vsebovanost stanj

Predikcijska ocena verjetnosti

$$p(x_k|z_{1:k}, u_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1}, u_{1:k})}{p(z_k|z_{1:k-1}, u_{1:k})}$$

Bayesov filter, opazovanje in akcija. Predikcijski korak

- Izvajamo, ko še ne poznamo trenutne meritve imamo pa znano vzbujanje v sistem. (meritev bo dostopna v naslednjem času vzorčenja)

$$p(x_k|z_{1:k-1},u_{1:k}) = \int p(x_k|x_{k-1},z_{1:k-1},u_{1:k})p(x_{k-1}|z_{1:k-1},u_{1:k})dx_{k-1}$$

- Upoštevajoč vsebovanost stanj velja

$$p(x_k|x_{k-1},z_{1:k-1},u_{1:k}) = p(x_k|x_{k-1},u_k)$$

- Za oceno stanja v prejšnjem trenutku trenutna akcija ni pomembna

$$p(x_{k-1}|z_{1:k-1},u_{1:k}) = p(x_{k-1}|z_{1:k-1},u_{1:k-1})$$

- Končna ocena porazdelitve verjetnosti predikcije stanja

$$p(x_k|z_{1:k-1},u_{1:k}) = \int p(x_k|x_{k-1},u_k)p(x_{k-1}|z_{1:k-1},u_{1:k-1})dx_{k-1}$$

korekcijska ocena iz prejšnjega trenutka

Bayesov filter, opazovanje in akcija. Korekcijski korak

- Po opravljeni meritvi in predhodno izračunani korekciji izvedemo korekcijo

$$p(x_k|z_{1:k},u_{1:k}) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|z_{1:k-1},u_{1:k})}{p(z_k|z_{1:k-1},u_{1:k})}$$

- Zaupanje v opravljeno meritev določimo s pomočjo polne verjetnosti

$$p(z_k|z_{1:k-1},u_{1:k}) = \int p(z_k|x_k)\underbrace{p(x_k|z_{1:k-1},u_{1:k})}_{\text{predikcijska ocena}}dx_k$$

- Za boljšo preglednost vpeljemo zaupanja (belief), kar označimo z

$$bel_p(x_k) = p(x_k|z_{1:k-1},u_{1:k})$$

$$bel(x_k) = p(x_k|z_{1:k},u_{1:k})$$

Bayesov filter, opazovanje in akcija, primer

Robot ima senzor za detekcijo odprtosti vrat ($Z \in (odprta, zaprta)$) *in aktuator s pomočjo katerega lahko vrata potisne, da se odprejo oziroma aktuatorja ne uporabi, če meni, da so vrata že odprta* ($U \in (potisni, miruj)$). *Stanje, ki nas zanima je odprtost vrat* $X \in (odprta, zaprta)$.

Začetna verjetnost (zaupanje), da so vrata odprta je

$$bel(X_0 = open) = 0.5$$

veljavnost meritev senzorja je podana s statističnim modelom senzorja

$$\begin{array}{ll} P(Z_k = odprta|X_k = odprta) = 0.8 & P(Z_k = zaprta|X_k = odprta) = 0.2 \\ P(Z_k = zaprta|X_k = zaprta) = 0.9 & P(Z_k = odprta|X_k = zaprta) = 0.1 \end{array}$$

Uspeh opravljene akcije potiska vrat pa

$$\begin{aligned} P(X_k = odprta|X_{k-1} = zaprta, U_k = potisni) &= 0.8 \\ P(X_k = zaprta|X_{k-1} = zaprta, U_k = potisni) &= 0.2 \\ P(X_k = odprta|X_{k-1} = odprta, U_k = potisni) &= 1 \\ P(X_k = zaprta|X_{k-1} = odprta, U_k = potisni) &= 0 \end{aligned}$$

v kolikor pa aktuator ne uporabimo pa velja

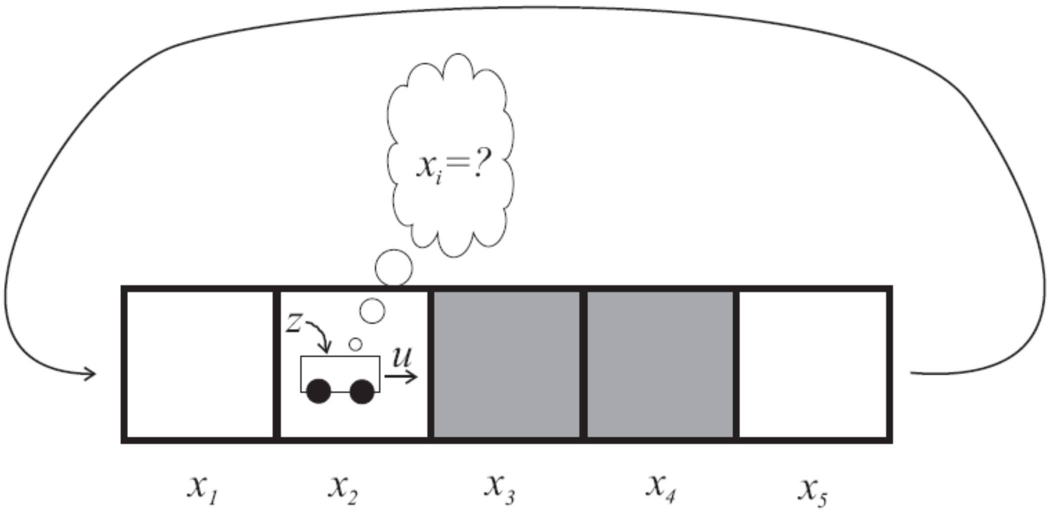
$$\begin{aligned} P(X_k = odprta|X_{k-1} = zaprta, U_k = miruj) &= 0 \\ P(X_k = zaprta|X_{k-1} = zaprta, U_k = miruj) &= 1 \\ P(X_k = odprta|X_{k-1} = odprta, U_k = miruj) &= 1 \\ P(X_k = zaprta|X_{k-1} = odprta, U_k = miruj) &= 0 \end{aligned}$$

Predpostavimo, da robot najprej opravi akcijo in nato prejme meritev. Določite zaupanja na osnovi opravljene akcije $bel_p(x_k)$ *(predikcija) in zaupanje na osnovi meritve* $bel(x_k)$ *(korekcija) za sledeče sekvence opravljenih akcij in zaznanih meritev*

	U_k	Z_k
$k = 1$	*miruj*	*zaprta*
$k = 2$	*potisni*	*odprta*
$k = 3$	*potisni*	*odprta*

Primer lokalizacije - Bayesov filter, opazovanje in akcija

- Enodimenzionalno okolje iz petih celic (diskretno okolje)
- Senzor zaznava svetle in temne celice z neko negotovostjo
- Aktuator premika robota z negotovostjo med celicami
- Robot pozna zemljevid okolice
- Okolje je ciklično

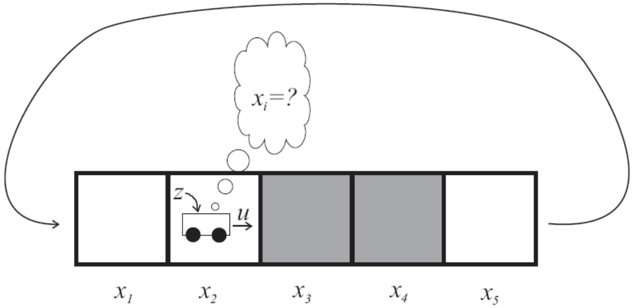


Primer lokalizacije - Bayesov filter, opazovanje in akcija...

Robot se premika v oklici iz primera najprej izvede premik, nato zaznava okolico. Začetna lega robota ni poznana, kar opiše uniformna porazdelitev $p(X_0) = bel(x_0) = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]$.

Premik za u_k *celic v desno v 80% uspešen v 10% pa je za eno celico prekratek ali predolg, kar opiše*

$$p(X_k = i | X_{k-1} = j, U_k = u) = 0.8 \quad za \quad i = j + u$$
$$p(X_k = i | X_{k-1} = j, U_k = u) = 0.1 \quad za \quad i = j + u - 1$$
$$p(X_k = i | X_{k-1} = j, U_k = u) = 0.1 \quad za \quad i = j + u + 1$$



Robot pravilno zazna temno barvo z verjetnostjo 0.6, svetlo barvo pa zazna pravilno z 0.8 verjetnostjo, kar opišemo z

$$p(Z = temna | X = temna) = 0.6 \quad p(Z = svetla | X = temna) = 0.4$$
$$p(Z = svetla | X = svetla = 0.8 \quad p(Z = temna | X = svetla = 0.2$$

Robot v vsakem časovnem trenutku dobi ukaz za premik za eno celico v desno ($u_k = 1$). *Izid meritev za prve tri trenutke so* $z_{1:3} = [svetla, temna, temna]$.

1. *Kakšno je zaupanje v prvem koraku* $k = 1$?
2. *Kakšno je zaupanje v drugem koraku* $k = 2$?
3. *Kakšno je zaupanje v tretjem koraku* $k = 3$?
4. *V kateri celici se robot nahaja z največjo verjetnostjo po tretjem koraku?*

Bayesov filter

- Izpeljan iz Bayesovega pravila, ki ga izvajamo rekurzivno na zaporedju vhodov in meritev
- Predikcijski korak napove oceno verjetnosti za izid stanja na podlagi znanega vhoda (uporaba teorema polne verjetnosti)
- Korekcijski korak popravi (zmanjša negotovost) oceno verjetnosti stanja z uporabo meritve (uporaba Bayesovega izreka)
- Bayesov filter uporaben za diskretne spremenljivke
- Za zvezna spremenljivke pa se večinoma uporablja Kalmanov filter in filter delcev

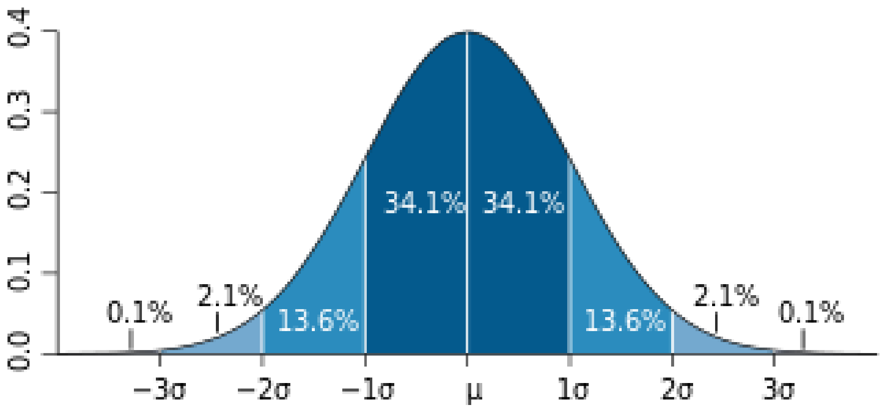
Kalmanov filter (KF)

- Dejansko porazdelitev gostote verjetnosti aproksimira z Gaussovo funkcijo, podano z matematičnim upanjem in varianco.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

$$E[(x-\mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx$$

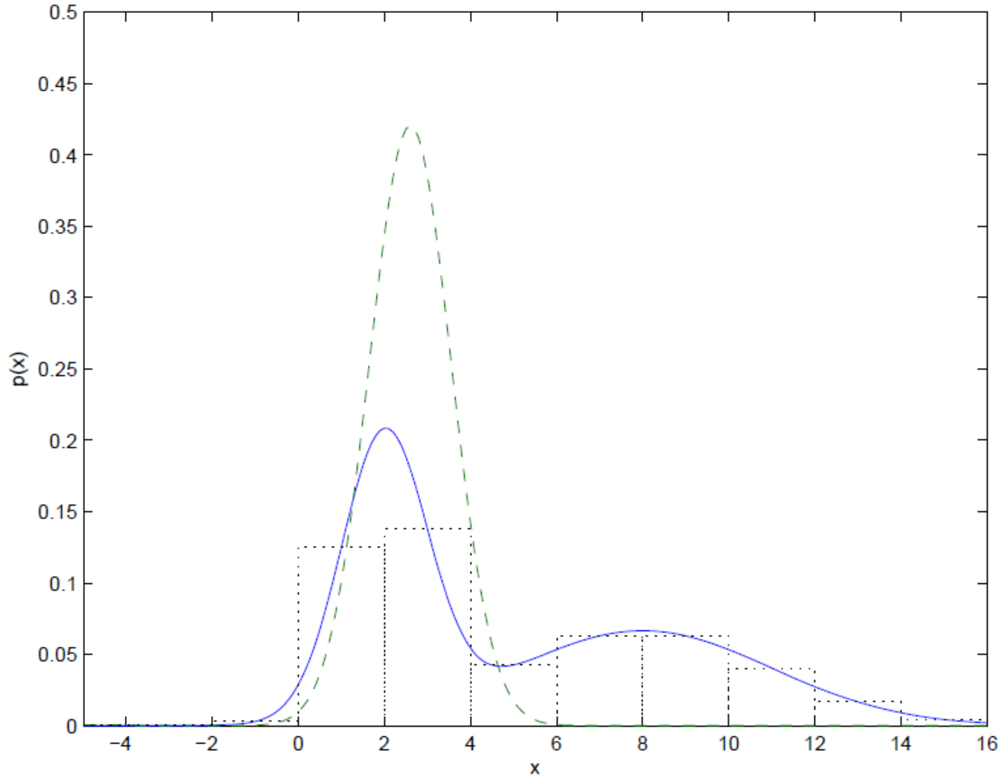


- Kalmanov filter (KF) prepostavlja normalno porazdelitev verjetnosti in posodablja srednjo vrednost in varianco za to porazdelitev.
- Če porazdelitev gostote verjetnosti ni Gaussova funkcija, potem konvergenca KF ni zagotovljena (pri velikih odstopanjih lahko dobljena ocena stanj divergira).
- Aproksimacija porazdelitve verjetnosti z Gaussom poenostavi izračun posodobitve stanj in porazdeliteve verjetnosti.
- Bayesov filter deluje za poljubno obliko porazdelitve verjetnosti, a je omejen (zaradi kompleksnosti izračuna) le na enostavne primere s končnim številom stanj.

Kalmanov filter, primer aproksimacije porazdelitve

Gostota verjetnosti spremenljivke x (polno), aproksimacija z Gaussovo funkcijo (črtkano) in aproksimacija s histogramom (pikčasto).

- Porazdelitev ni unimodalna ni Gaussova
- Lahko jo aproksimiramo s histogramom porazdelitve verjetnosti (diskretiziramo), kar omogoča uporabo Bayesovega filtra
- Lahko jo aproksimiramo z Gaussovo funkcijo za uporabo pri KF



KF, predikcija, korekcija

- S filtrom ocenjujemo vrednosti stanj, ki ga posodabljamo ob znani akciji (vhodu v sistem) in izmerjeni meritvi
- V kolikor je stanje lega MS, govorimo o lokalizaciji.
- Algoritem KF sestoji iz:
  - Predikcijskega koraka: stanje posodobimo glede na znano akcijo (vhod sistema)
  - Korekcijskega koraka: stanje posodobimo na podlagi opravljene meritve. Merjena veličina je lahko stanje neposredno oziroma neka druga veličina, ki je odvisna od stanja sistema.

- Korekcijski korak združuje dva vira informacij: trenutno oceno in meritev senzorja. Vira sta neodvisna -> šuma na enem in drugem sta nekorelirana.

Kako na optimalen način združiti ta dva vira informacij v novo oceno stanja?

KF, korekcijski korak

- Združevanje dveh virov informacij iste veličine v novo oceno na način, ki minimizira negotovost (varianco) nove ocene.

Imamo dve neodvisni oceni spremenljivke x. Prva ocena je podana z vrednostjo x_1 in varianco σ_1^2, druga ocena pa z vrednostjo x_2 in varianco σ_2^2. Kakšna je optimalna linearna kombinacija teh dveh ocen, ki predstavlja oceno stanja $\hat{x}$?

$$\hat{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \qquad \textit{označimo } \omega_2 = \omega \ \textit{in } \omega_1 = 1 - \omega$$

$$\omega = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

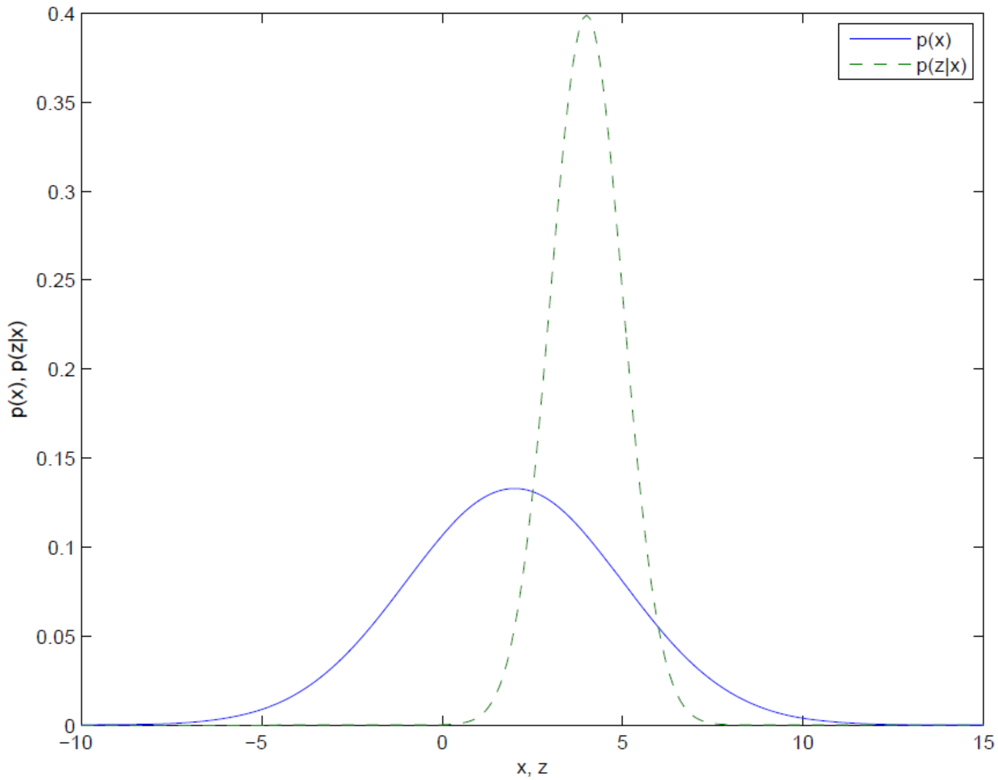
$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^{-1}$$

KF, korekcija - primer

V nekem trenutku imamo podano izhodiščno oceno stanja $x = 2$ *z varianco* $\sigma^2 = 4$. *Nato s senzorjem izmerimo vrednost stanja, ki je podana z vrednostjo* $z = 4$ *in varianco* $\sigma_z^2 = 1$. *Gaussovi porazdelitvi stanja in meritve verjetnosti ilustrira slika*

- Kje pričakujete, da bo nova ocena stanja, bliže 2 ali bliže 4?
- Kakšna je širina (varianca) ocenjene porazdelitve, ožja ali širša od p(x) oz. p(z|x)?
- Določite novo oceno stanja in njeno varianco.

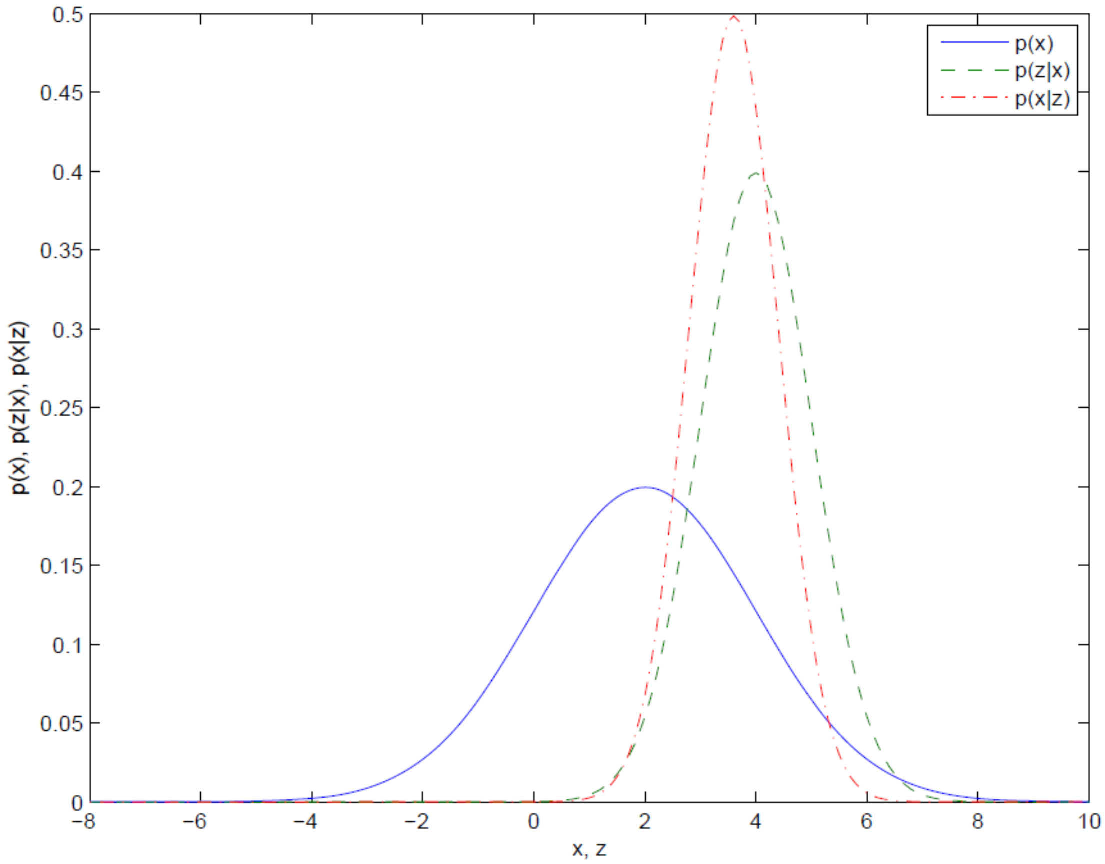


KF, korekcija – primer…

- Nova ocena je bliže meritvi, ker je njena varianca (negotovost) manjša.
- Varianca nove ocene je manjša od obeh prvotnih varianc.

$$x' = \frac{\sigma_z^2 x + \sigma^2 z}{\sigma^2 + \sigma_z^2} = 3.6$$

$$\sigma^{2\prime} = \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right)^{-1} = 0.8$$



KF, korekcija - rekurzivna ocena stanja

- Rekurzivno želimo ocenjevati stanje x(k) na podlagi meritve z(k). V vsakem trenutku imamo podano vrednost trenutne ocene stanja, vrednost meritve in njuni varianci.
- Nova optimalna ocena stanja je kombinacija prejšnje ocene stanja in meritve.

$$\hat{x}(k+1) = (1-\omega)\,\hat{x}(k) + \omega(k)z(k) = \hat{x}(k) + \omega(z(k) - \hat{x}(k))$$

$$\sigma^2(k+1) = \frac{\sigma^2(k)\sigma_z^2(k)}{\sigma^2(k) + \sigma_z^2(k)} = (1-\omega)\sigma^2(k)$$

$$\omega = \frac{\sigma^2(k)}{\sigma^2(k) + \sigma_z^2(k)}$$

KF, predikcijski korak

Imamo izhodiščno oceno stanja $\hat{x}(k)$ *z* $\sigma^2(k)$. *Nato izvedemo akcijo* $u(k)$, *ki predstavlja neposreden premik stanja z negotovostjo* $\sigma_u^2(k)$. *Kakšna je vrednost stanja po premiku in njegova negotovost?*

- Nova ocena stanja po premiku

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + u(k)$$

- Varianca ocene stanja se poveča

$$\sigma^2(k+1) = \sigma^2(k) + \sigma_u^2(k)$$

Kalmanov filter, algoritem

$$\textbf{Kalman\_filter}(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_k, z_k):$$

$$\text{izračun predikcije:}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_{k-1|k-1} + u_k$$
$$\sigma^2_{k|k-1} = \sigma^2_{k-1|k-1} + \sigma_{u}{}^2_k$$

$$\text{izračun korekcije:}$$

$$\omega_k = \frac{\sigma^2_{k|k-1}}{\sigma^2_{k|k-1} + \sigma_{z}{}^2_k}$$
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \omega(z_k - \hat{x}_{k|k-1})$$
$$\sigma^2_{k|k} = (1 - \omega_k)\sigma^2_{k|k-1}$$

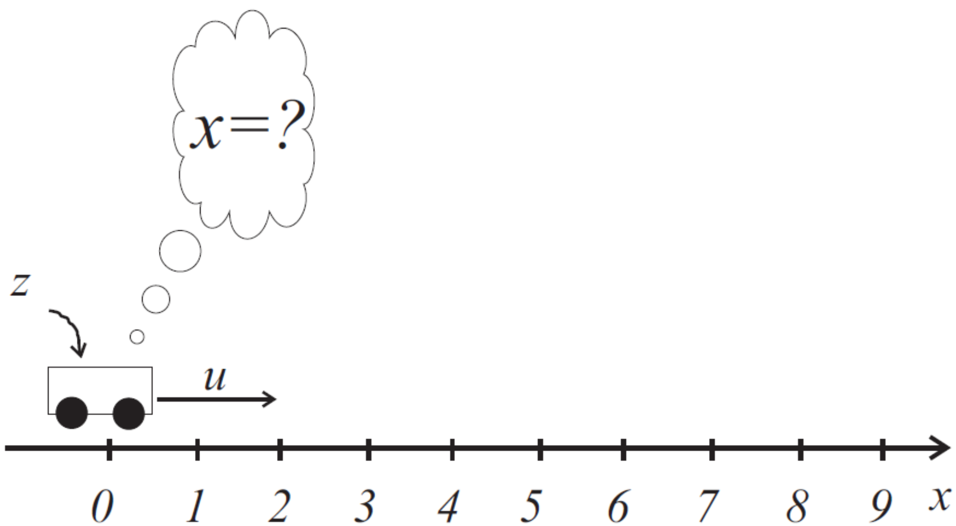
Na podlagi znane akcije izvedemo predikcijo stanja (zveča negotovost), ko je dostopna meritev pa še korekcijo (zmanjša negotovost)

KF, primer

Imamo robota, ki se premika v eni dimenziji. Njegova začetna lega nam je neznana, predvidevamo, da je $\hat{x}_0 = 3$ *in ima veliko negotovost* $\sigma_0 = 100$ *(dejanska pozicija* $x_0 = 0$ *nam ni znana).*

Nato robot v vsakem trenutku $k = 1, \cdots 5$ *premaknemo za* $u_{1:5} = [2, 3, 2, 1, 1]$ *in nato izvedemo meritev lege* $z_{1:5} = [2, 5, 7, 8, 9]$. *Pomik in meritev sta motena s šumom z normalno porazdelitvijo, kar opišemo s konstantno negotovostjo za pomik* $\sigma_u^2 = 2$ *in negotovostjo meritve* $\sigma_z^2 = 4$.

Kakšna je ocena lege robota in negotovost te ocene?



KF – matrični zapis

- Linearni sistem z več vhodi, stanj in izhodi (meriteve) podamo v prostoru stanj

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{w}(k)$$
$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$$

- kjer so:
  - **A** matrika prehajanja stanj
  - **B** vhodna matrika
  - **F** vhodna matrika šuma (Če šum **w** nastopa na vhodu velja **F**=**B**)
  - **C** izhodna matrika
  - **w**(k) vhodni Gaussov šum
  - **z**(k) meritve (izhodi)
  - **v**(k) merilni šum.

- Predpostavimo:
  - Linearen sistem
  - Normalna porazdelitev šumov, šuma **w** in **v** sta neodvisna (nekorelirana)
  - Ker je sistem linearen ima tudi prenesen šum na stanja (iz vhodov in meritev) normalno porazdelitev

$$p(\mathbf{x}) = \det(2\pi\mathbf{P})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}$$

KF – matrični zapis…

- Kovariančni matriki vhodnega in izhodnega šuma sta

$$\mathbf{Q}_k = E\left[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)\right] \qquad \mathbf{R}_k = E\left[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)\right]$$

- **Predikcijski korak KF**

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{Q}_k\mathbf{F}^T\end{aligned}$$

- V predikcijskem koraku določimo napovedno oceno stanja (a priori) iz pretekle ocene stanja in trenutnem vhodu

- **Korekcijski korak KF**

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T\left(\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\end{aligned}$$

- V korekcijskem koraku ocenimo trenutno oceno (a posteriori), ki temelji na predikcijski oceni in trenutni meritvi.
- Predikcijski korak si lahko pripravimo v naprej, ko čakamo na meritev v trenutku k

KF - primer

Mobilni robot se premika v ravnini in svojo lego meri z GPS desetkrat v sekundi (čas vzorčenja $T_S = 0.1\ s$). Meritev je motena z Gausovim šumom, ki ima varianco $10m^2$. Robot se premika s hitrostjo $1\ \frac{m}{s}$ v smeri x in s hitrostjo $0\ \frac{m}{s}$ v smeri y. Varianca Gausovega šuma hitrosti pomika je $1\frac{m^2}{s^2}$. Robot se nahaja v izhodišču $\mathbf{x} = [0,0]^T$, naša ocena začetne lege pa je $\hat{\mathbf{x}} = [3,3]^T$ in je podana z začetno varianco

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Kakšen je časovni potek ocene lege robota in varianca te ocene?

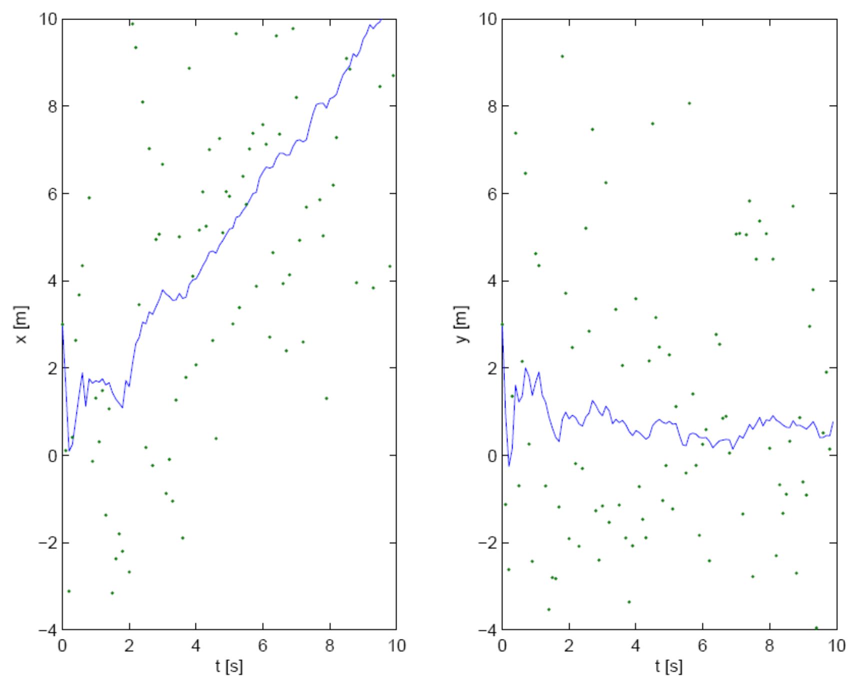
Filtriranje meritev na podlagi modela in meritve ->KF

Model za predikcijo stanja sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} T_S & 0 \\ 0 & T_S \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Model meritve pozicije z GPS:

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$



Razširjeni Kalmanov filter

- KF je izpeljan za lineatne sisteme, vse motnje in šumi pa morajo biti opisljivi z normalno porazdelitvijo šuma
- Gaussov šum na vhodu linearnega procesa se preslika na izhod kot Gaussov, če pa je proces nelinearen pa temu ni tako -> šum izhoda nima normalne porazdelitve
- Če je stopnja nelinearnosti majhna, lahko izhodni šum zadovoljivo aproksimiramo z Gaussovo funkcijo
- Za nelinearen model prehajanja stanj ali model meritve lahko izvedemo linearizacijo okoli trenutnih ocen stanj ->Razširjeni KF (Extended KF = EKF)
- Dobljene linearni model omogoča izračun približeka Gaussove porazdelitve
- V primeru velike nelinearnosti in velikosti negotovosti (amplitude šuma) je napaka, ki jo vpelje linearizacija večja -> slabša konvergenca EKF
- EKF je še zmeraj računsko učinkovit algoritem in zelo pogost v praksi

Razširjeni Kalmanov filter

- Nelinearen proces

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k\right)$$
$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}\left(\mathbf{x}_k\right) + \mathbf{v}_k$$

- Razširjeni Kalmanov filter, predikcija:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k\right)$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{Q}_k\mathbf{F}^T$$

- Razširjeni Kalmanov filter, korekcija:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T\left(\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k)$$
$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}$$

- Določitev Jacobijevih (občutljivostnih) matrik:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}\right|_{\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k\right)}$$
$$\mathbf{F} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}}\right|_{\left(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k\right)} \qquad \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\left(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\right)}$$

EKF izvajamo podobno kot KF:
-Predikcijo z nelin. Modelom
-Ocena kovariančnih matrik šumov
z linearnim modelom

EKF - primer

Primer 9.20. *Mobilni robot z diferencialnim pogonom se premika v ravnini. Vhodni ukaz robota je translatorna hitrost* v_k *in kotna hitrost* ω_k*, ki sta motena z Gaussovim šumom z varianco* $\mathrm{var}(v_k) = 0.1\frac{m^2}{s^2}$ *in* $\mathrm{var}(\omega_k) = 0.1\frac{rad^2}{s^2}$.

Robot ima senzor s pomočjo katerega lahko izmeri razdaljo do markerja, ki se nahaja v koordinatnem izhodišču. Za merjenje svoje orientacije ima robot kompas. Meritev razdalje je motena z Gausovim šumom, ki ima varianco $0.5m^2$ *meritev kota pa z Gausovim šumom* $0.3rad^2$.

Robot se na začetku nahaja v izhodišču z orientacijo $\theta_0 = 0$. *Njegova začetna lega tore je* $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$*, naša ocena začetne lege pa je* $\hat{\mathbf{x}}_0 = [3, 3, \frac{\pi}{4}]^T$ *in je podana z začetno varianco*

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Kakšen je časovni potek ocene lege robota ($\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = [x_k, y_k, \theta_k]^T$) *in varianca te ocene, če robotu ob vsakem času vzorčenja* $T_S = 0.1s$ *pošljemo ukaz* $\mathbf{u} = [v_k, \omega_k]^T = [0.5, 0.5]^T$ *?*

EKF – primer2

Primer 9.21. *Mobilnemu robotu iz primera 9.20 spremenimo le model meritve. Robot ima senzor s pomočjo katerega lahko izmeri razdaljo in kot do markerja, ki se nahaja v koordinatnem izhodišču. Meritev kota je podana v območju* $\alpha \in [-\pi, \pi]$. *Meritev razdalje je motena z Gausovim šumom, ki ima varianco* $0.5m^2$ *meritev kota pa z Gausovim šumom* $0.3rad^2$.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} T_s v_k \cos(\theta_{k-1}) \\ T_s v_k \sin(\theta_{k-1}) \\ T_s \omega_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{{x_k}^2 + {y_k}^2} \\ \arctan \frac{0-y_k}{0-x_k} - \theta_k \end{bmatrix}$$

EKF – primer3

Primer 9.22. *V tem primeru nadgradimo primer 9.21 tako, da lahko opazujemo razdaljo in kot do dveh markerjev hkrati, ki se nahajta pri* $x_{M1} = 0$, $y_{M1} = 0$ *in* $x_{M2} = 5$, $y_{M2} = 5$. *Vsi ostali podatki pa so enaki, kot v primeru 9.21.*

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_{M1} - x_k)^2 + (y_{M1} - y_k)^2} \\ \arctan \frac{y_{M1} - y_k}{x_{M1} - x_k} - \theta_k \\ \sqrt{(x_{M2} - x_k)^2 + (y_{M2} - y_k)^2} \\ \arctan \frac{y_{M2} - y_k}{x_{M2} - x_k} - \theta_k \end{bmatrix}$$

Zložimo izhodno matriko C in kovariančno matriko meritve R

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{x_k}{d_1} & \frac{y_k}{d_1} & 0 \\ -\frac{y_k}{d_1^2} & \frac{x_k}{d_1^2} & -1 \\ \frac{x_k}{d_2} & \frac{y_k}{d_2} & 0 \\ -\frac{y_k}{d_2^2} & \frac{x_k}{d_2^2} & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Nekatere različice Kalmanovega filtra

- EKF
- Unscented Kalman filter
  - Sistemi z izrazito nelinearnostjo
  - Kovariančne matrike šuma se oceni statistišno z neko množico vhodnik točk
  - Te točke se preslika preko nelinearnosti in oceni sredja vrednost in varianca
- Informacijski filter
  - Ocenjuje se informacijska matrika, ki je inverz kovariančne matrike
  - Ocenjuje se informacijski vektor (namesto vektorja stanj)
  - Dualen pristop glede na KF, kjer se poenostavi korekcija (brez inverzije), bolj pa je kompleksna predikcija
- Kalman-Bucy filter je implementacija KF za zvezni opis sistema
- ...

Filter delcev (Particle filter PF)

- Do sedaj smo obravnavali
  - Bayesov filter -uporaba za diskretni prostor stanj s končnim številom izidov
  - KF – uporaba za zvezni prostor stanj, za sisteme ki imajo normalno porazdelitev negotovosti in so linearni (oz. EKF za nelinearne)

- Filter delcev (particle filter - PF) se uporablja za zvezne spremenljivke pri poljubni porazdelitvi negotovosti
- Porazdelitev gostote verjetnosti trenutne ocene stanja simuliramo z množico N delcev

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}\right)$$

- Oceno stanja pa dobimo s povprečjem ocen stanj posameznih delcev. Bolj verjetni delci imajo več potomcev, zato ocena stanja lahko konvergira k pravi vrednosti.
- Vsak delec predstavlja svojo oceno stanja. Dobimo neparametričen opis porazdelitve verjetnosti, ki je primeren za poljubno porazdelitev.
- Porazdelitev šuma je lahko poljubna in sistem je lahko nelinearen.

Filter delcev – algoritem, predikcija, korekcija

Algoritem:

- Določimo začetno populacijo delcev po prostoru (uniformno ali zgoščeno okoli pričakovanih vrednosti stanj)
- **Korak predikcije**: z znanim vhodom in negotovostjo vhoda napovemo nova stanja za vse delce. Nova ocena stanja vsakega delca je torej odvisna od prejšnje ocene, vzbujanja in šuma vzbujanja (šum poskrbi za razpršitev delcev).
- **Korak korekcije**: dejansko izmerjeno meritev primerjamo s simuliranimi meritvami delcev (inovacija oz. residual).
  - Bolj verjetni delci imajo manjšo inovacijo

$$innov_k^i = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^i$$

  - Ocenimo uteži delcev (njihovo pomembnost). Utež predstavlja pogojno verjetnost za izid meritve pri oceni stanja delca.

$$w_k^i = p(\mathbf{z}_k | \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^i)$$

  - Uteži ocenimo z normalno porazdelitvijo

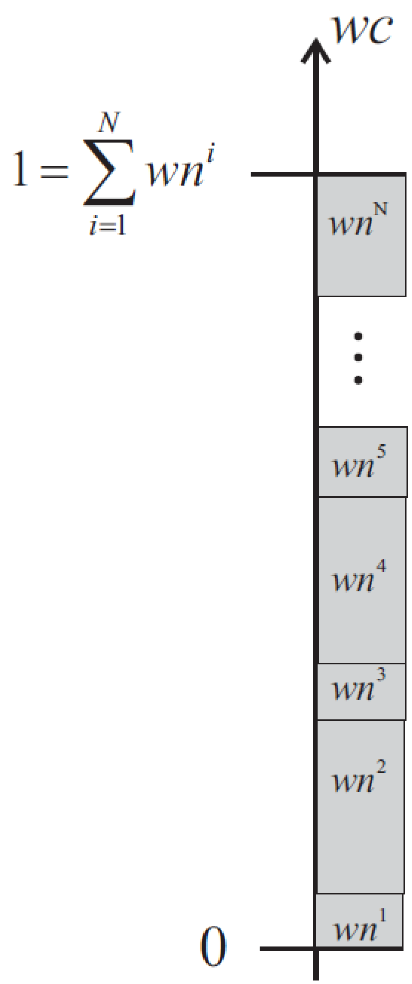
$$w_k^i = \det(2\pi\mathbf{R})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(innov_k^i)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{i}nnov_k^i)}$$

Filter delcev – algoritem, nova populacija

- **Korekcijski korak …**
  - Določimo **nov nabor delcev** (ponovno vzorčenje oz. resampling) glede na ocenjene uteži, tako, da imajo bolj verjetni delcev več potomcev.
  - Ponovno vzorčenje izvedemo tako, da naključno izberemo N delcev tako, da je verjetnost izbora proporcionalna uteži delca (**Importance sampling**)
  - Bolj verjetne delce izberemo večkrat, manj verjetne pa manjkrat.

Filter delcev – algoritem, nova populacija ...

- Možnih več načinov nove populacije delcev. Bistvo je, da naključno izbiramo delce in da je verjetnost izbora za bolj verjetne delce večja. Ena od možnosti je:
  - Normiramo trenutne uteži delcev, da je vsota norm. uteži =1
  - Uteži delcev nanizamo (komulativno) v poltrak, kot prikazuje slika, kjer bolj verjetni delci (večja utež) zavzamejo večji del poltraka vrednostiod 0 do 1.
  - Naključno (uniformna porazdelitev) izberemo N števil na intervalu od 0 do 1 in izberemo delce, ki jim pripadajo naključno izbrana števila.
- Trenutno oceno PF dobimo s povprečjem ocen stanj posameznih delcev.



Filter delcev – celoten algoritem

Filter_delcev($\hat{\mathbf{x}}^i_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{z}_k$):

Inicializacija: če $k > 0$ potem:
množico N delcev $\mathbf{x}^i_k$ postavi na naključne
začetne vrednosti stanj glede na porazdelitev $p(\mathbf{x}_0)$.

Predikcija:
za vsak delec $\hat{\mathbf{x}}^i_{k-1|k-1}$ izvedi premik z modelom
premika in znanim vhodom $\mathbf{u}_k$, kateremu dodaj naključno vrednost
glede na šumne lastnosti, ki so del modela premika. Model premika
podaja $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k)$. Dobljena predikcija delcev je podana z naborom
$\hat{\mathbf{x}}^i_{k|k-1}$.

Korekcija:
Za vsak delec $\hat{\mathbf{x}}^i_{k|k-1}$ **oceni vrednost meritve**, ki bi jo sistem izmeril, če bi
njegovo stanje ustrezalo stanju delca.

Glede na dejansko izmerjeno meritev in primerjave z ocenjenimi meritvami
delcev **oceni pomembnost delcev**.

Določi nov nabor delcev glede na njihovo pomembnost (ang. importance
sampling), kjer iz nabora delcev naključno izberete delce z verjetnostjo, ki
je proporcionalna njihovi pomembnosti torej $p(\mathbf{z}_k|\hat{\mathbf{x}}^i_{k|k-1})$. Bolj verjetni delci
so izbrani večkrat, manj verjetni delci pa manjkrat.

Ocena stanja filtra $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ je enaka povprečni vrednosti stanj delcev.

Filter delcev – primer 1

Primer 9.23. *Z uporabo filtra delcev ocenjujemo najbolj verjetno stanje iz primera 9.22. V implementaciji uporabimo $N = 300$ delcev. Vsi ostali podatki pa so enaki, kot v primeru 9.22.*

Primer 9.22. *V tem primeru nadgradimo primer 9.21 tako, da lahko opazujemo razdaljo in kot do dveh markerjev hkrati, ki se nahajta pri $x_{M1} = 0$, $y_{M1} = 0$ in $x_{M2} = 5$, $y_{M2} = 5$. Vsi ostali podatki pa so enaki, kot v primeru 9.21.*

Uporabimo model za premik in meritev:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} T_s v_k \cos(\theta_{k-1}) \\ T_s v_k \sin(\theta_{k-1}) \\ T_s \omega_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_{M1} - x_k)^2 + (y_{M1} - y_k)^2} \\ \arctan \frac{y_{M1} - y_k}{x_{M1} - x_k} - \theta_k \\ \sqrt{(x_{M2} - x_k)^2 + (y_{M2} - y_k)^2} \\ \arctan \frac{y_{M2} - y_k}{x_{M2} - x_k} - \theta_k \end{bmatrix}$$

Filter delcev – primer 2

Primer 9.24. *Z uporabo filtra delcev ocenjujemo najbolj verjetno stanje iz primera 9.23, kjer spremenimo meritve, tako da merimo le razdaljo do markerjev. V implementaciji uporabimo $N = 500$ delcev. Vsi ostali podatki pa so enaki, kot v primeru 9.23.*

Uporabimo več delcev, ker je informacije v meritvah manj kot v prejšnjem primeru. Uporabimo model za premik in meritev:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} T_s v_k \cos(\theta_{k-1}) \\ T_s v_k \sin(\theta_{k-1}) \\ T_s \omega_k \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{z}}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_{M1} - x_k)^2 + (y_{M1} - y_k)^2} \\ \sqrt{(x_{M2} - x_k)^2 + (y_{M2} - y_k)^2} \end{bmatrix}$$