

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za elektrotehniko*



LABORATORIJ ZA MODELIRANJE,
SIMULACIJO IN VODENJE

LABORATORIJ ZA AVTONOMNE
MOBILNE SISTEME

Avtonomni mobilni sistemi

Izr. prof. dr. Gregor Klančar

gregor.klancar@fe.uni-lj.si

Satelitski mobilni sistemi

2013/2014

Umetni sateliti



- okoli Zemlje kroži veliko naravnih (Luna) in umetnih satelitov
- Od leta 1957, je bilo cca 4600 izstrelitev, ki je poneslo cca. 6000 satelitov, od tega jih je danes delujočih cca. 800 (podatki za leto 2008)
- cca. 19000 je vesoljskih odpadkov (večjih od 5 cm), ki jih sledijo (ostankov, starih satelitov, eksplozije, trki, ostanki raket)



Umetni sateliti



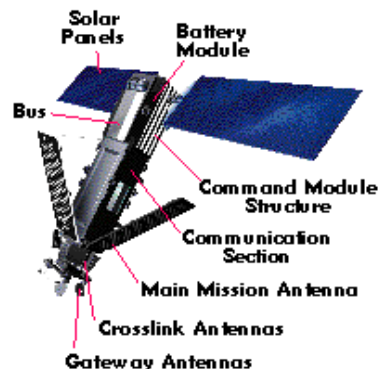
- Sledeni objekti v geostacionarni orbiti (GEO, 35786km nad Zemljo) v nizkih zemljinih orbitah (LEO, nekaj 100km nad Zemljo) in vse vmesne točke



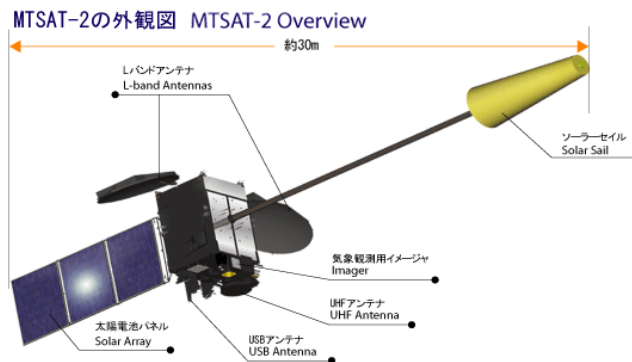
Uporaba Satelitov



- telekomunikacijski (telefonija, televizija in radio): ASTRA, HOTBIRD, W2, HELASSAT, IRIDIUM, INMARSAT, GLOBALSTAR,...



- vremenski: GOES, MTSAT, METEOSAT, NOAA,...



Uporaba Satelitov....



- globalno pozicioniranje (GPS) NAVSTAR GPS (20200 km, ZDA), GLONASS (RU), GALILEO (EU)



- daljinsko zaznavanje, kartiranje, astronomija, vojaški sateliti, različne radioamaterski sateliti in raziskovalni sateliti.

Klasifikacije



- Mikrosateliti (<100kg), Nanosatelit (<10kg), Picosatelit (< 1kg)
- Manjši sateliti, CubeSat standard - kocka 10cm
- Navstar (1800kg, 1000W), Galileo (650kg, 1500W), MTSAT2 (4600kg, 3400W)

<u>Satellite</u>	Resolution (m)	Mass(kg)	
SSTL-NIGERSAT-2 	Panchromatic 2.5 Multispectral 5 m / 32 m (4 band)	300	
VENμS 	<u>Multispectral</u> 5.3 (12 band)	250	
RapidEye 	Multispectral 6.5 (5 band)	150	
<u>LAPAN-TUBSAT</u> 	Panchromatic 6 / 120	50	
PRISM SAT	Panchromatic 13.4	10	

Tirnica satelita

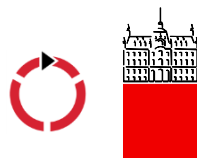


- Prva kozmična hitrost 7,7km/s -> najmanjša hitrost, da se izstrelek ne zaleti nazaj v Zemljo
- Druga kozmična hitrost 11km/s -> izstrelek pobegne od Zemlje
- Satelit kroži okoli Zemlje po eliptični tirnici (geostacionarna tirnica, sončnosinhrona tirnica, leo, ...)
- Pozicijo satelita v tirnici, je določena s pomočjo 6 Keplerjevih elementov, podanih za neko točko ob določenem času (epoha).
- Vsak satelit je opisan s standardnim formatom TLE (Two Line Element-set), ki vsebuje: Keplerjeve elemente, podatke o izstrelitvi, število dnevnih obkrožitev, koeficiente za korekcijo motenj ,...

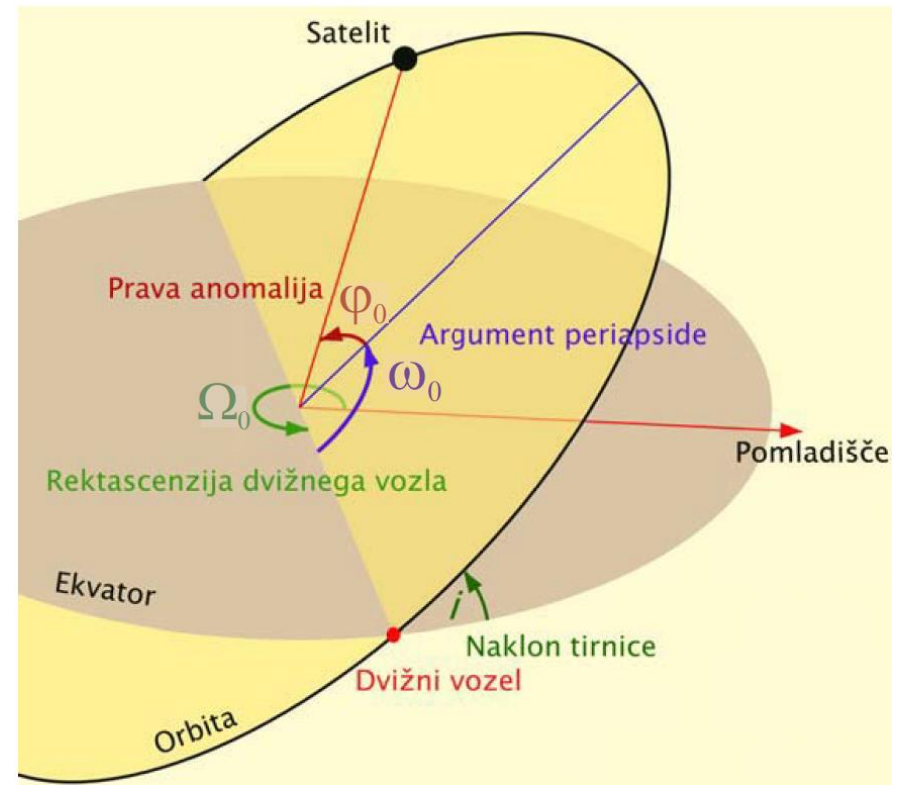
IRIDIUM 33

```
1 24946U 97051C 13215.44831351 .00000191 00000-0 62768-4 0 5336  
2 24946 86.3935 158.1918 0009163 154.3465 344.2201 14.32933672831537
```

Tirnica satelita, Keplerjevi elementi



- Naklon tirnice i (vs. ekvator)
- Rektascenzija dvižnega vozla Ω_0 : kot med pomladiščem (smer sonca ob pomladnem enakonočju) in dvižnim vozлом
- Velika polos a (velikost elipse)
- Ekscentričnost ε (oblika elipse)
- Argument periapside ω_0 : kot med smerjo proti dvižnemu vozlu in smerjo proti periapsidi (točka, kjer je telo najbližje gorišču v katerem se nahaja Zemlja)
- Srednja anomalija v epohi M_0 , definira kje na elipsi je pozicioniran satelit



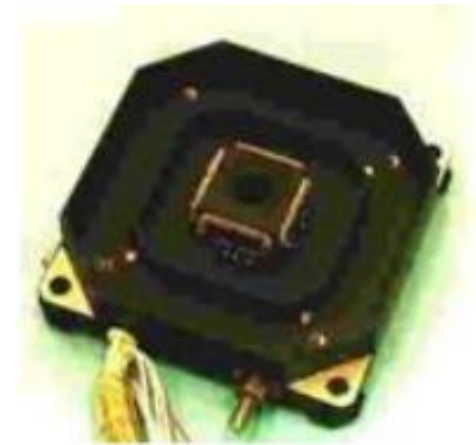
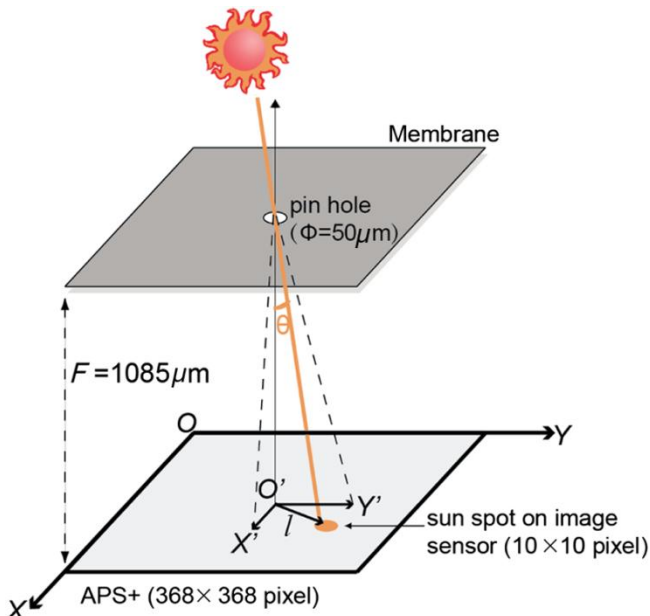


- Večina satelitov mora biti za izvajanje svoje naloge pravilno orientirana
 - Senzorski sistem za oceno orientacije
 - Aktuatorski pogon in regulacijski algoritem
- Obrnjeni proti želeni lokaciji na Zemlji (npr. opazovanje, komunikacija z zemeljsko postajo)
- Stabilizacija in orientacija satelita
 - Tri regulacijske zanke
 - Ocena dejanske orientacije s pomočjo več senzorjev (sledilniki zvezd, senzor sonca, giroskopi...), združevanje informacij
 - Aktuatorji spreminjajo orientacijo vozila (reakcijska kolesa, potisni motorji,...)
 - Regulacijski algoritem skrbi za doseg želenih smeri

Senzorji - senzor sonca



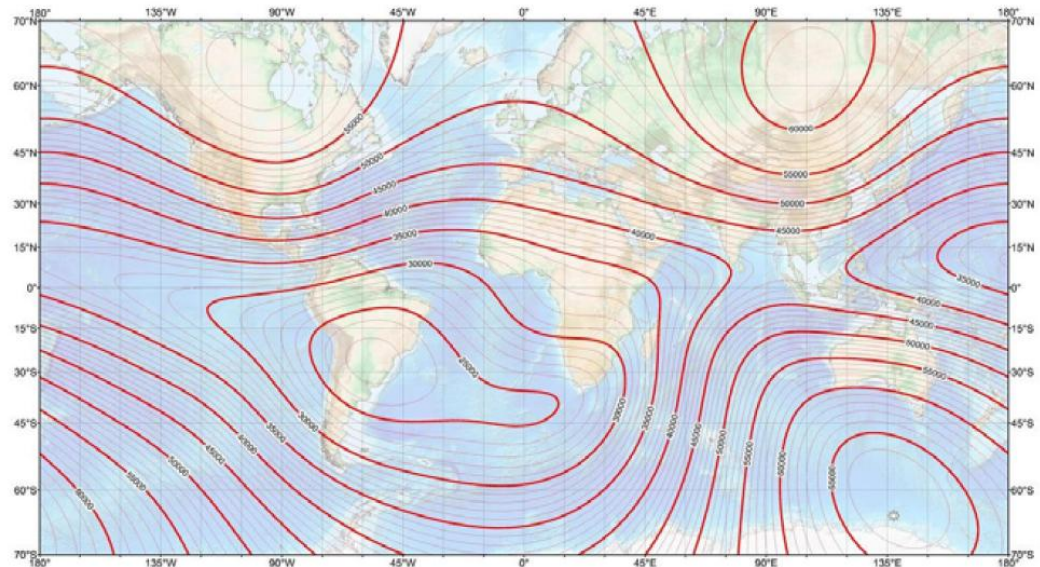
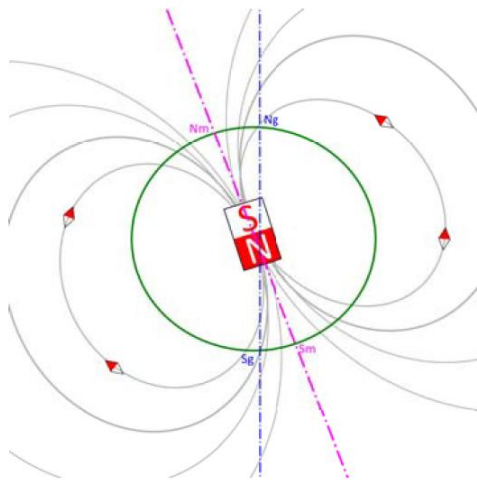
- Zazna smerni vektor sončnih žarkov
- Primerjava izmerjene smeri in referenčne smeri izračunane iz modela sončnega obsevanja -> informacija o orientaciji satelita
- Preprost senzor, natančnost cca. 1°
- Za oceno orientacije rabimo dva lin. neodvisna vektorja znane smeri (npr. sonce in zemeljsko magnetno polje)
- Izvedba: sončne celice, ki hkrati služijo napajanju, namenski senzorji z CCD senzorjem



Senzorji – zemeljsko magnetno polje



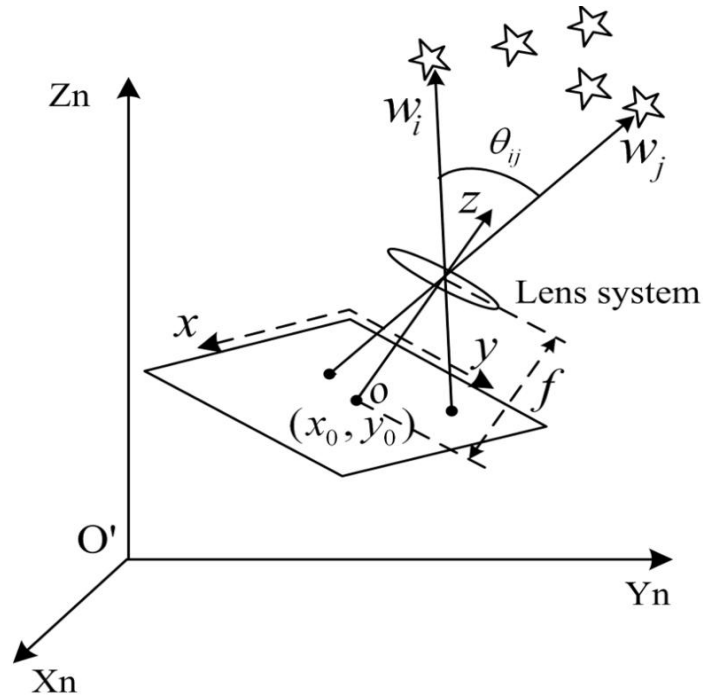
- uporaba v LEO (do 1000km), kjer je polje Zemlje dovolj močno
- smer polja v koordinatnem sistemu senzorja
- primerjava izmerjene smeri in referenčne smeri izračunane iz modela magnetnega polja -> informacija o orientaciji satelita
- model polja: magnetni dipol (slab), IGRF11 model (International Geomagnetic Reference Field, za obdobje 2010-2015)
- -motnje elektronike satelita, -napake modela, + deluje tudi ponoči
- Izvedba: tri ortogonalni senzorji magnetnega polja



Senzorji – sledilnik zvezd



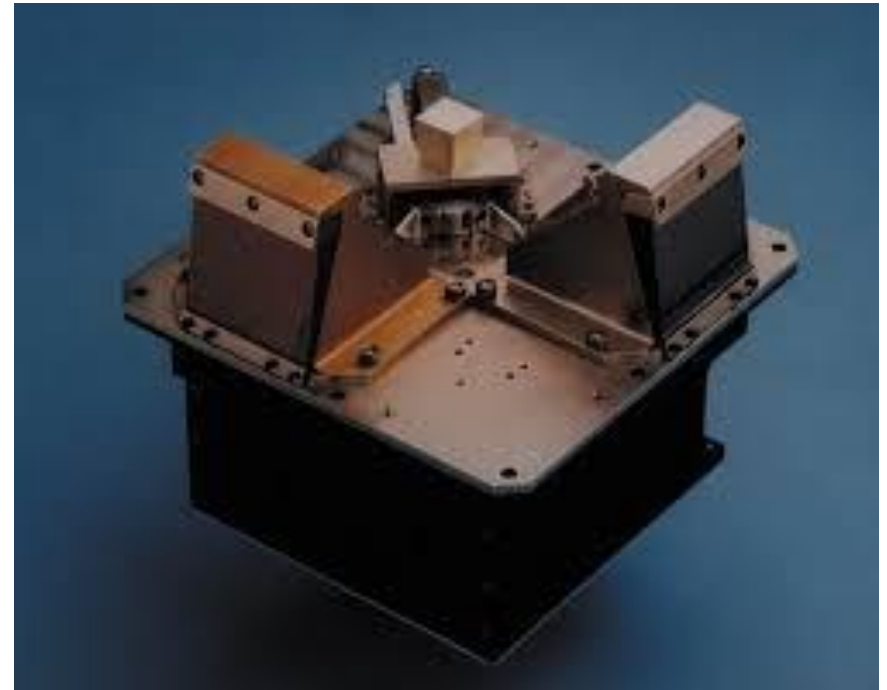
- Orientacija se določi s pomočjo zajete slike ozvezdja in njene primerjave s katalogi zvezdnega neba.
- Sliko iz kamere primerjamo (svetlosti, vzorcev,...) s katalogom ozvezdja.
- Iz najdeni parov se preko algoritma oceni orientacija.
- Zelo natančni senzorji, dragi, veliki, računsko in energetsko zahtevni.



Senzorji – horizont



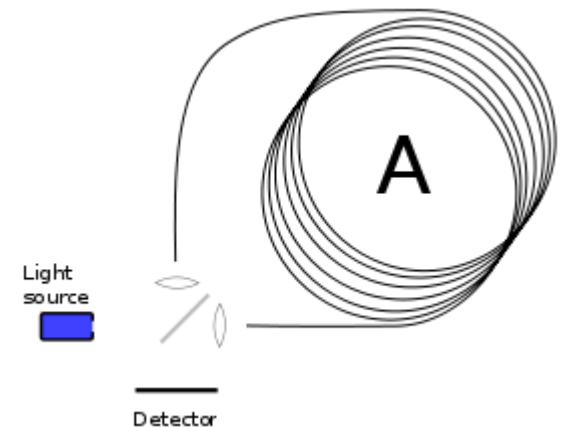
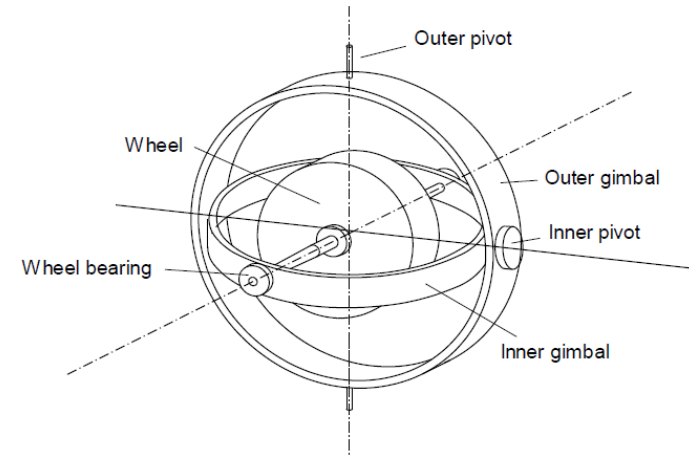
- Določimo relativno pozicijo Zemlje glede na satelit
- Meri infrardeči pas okoli Zemlje
- Dragi in veliki senzorji



Senzorji – giroskop



- Spremembe orientacije
- Prisotno lezenje (uporaba v kombinaciji z absolutnimi senzorji)
- **mehanski giroskopi**: merijo spremembo orientacije (dragi senzorji, mehanski deli, $0.1^\circ/6h$)
- **piezoelektrični in optični giroskopi** merijo hitrost rotacije
 - Piezoelektrični merijo spremembo frekvence vibracij, ki nastane pri rotaciji zaradi Coriolisove sile.
 - optični giroskopi imajo dva laserska žarka, ki potujeta v nasprotni smeri po zanki iz steklenega vlakna. Če se zanka vrti v določeno smer nastane fazni zamik med žarkoma (en ima krajšo pot kot drugi, interferenca). (nimajo mehanskih delov in ne potrebujejo vzdrževanja)

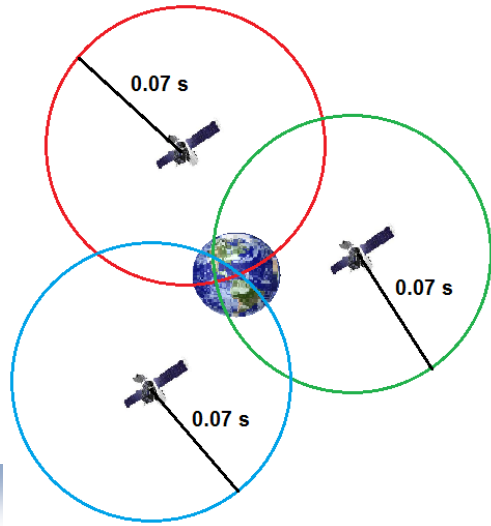
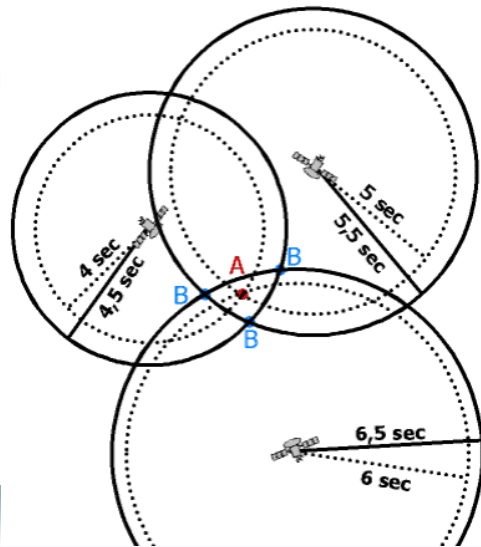
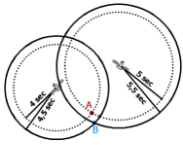


Senzorji – globalni sistem pozicioniranja (GPS)



- Natančno ocenjevanje pozicije (na cca. 10 m), precej bolje kot ocena s Keplerjevimi elementi (cca. 1 km, odvisno od starosti podatkov)
- Možno ocenjevanje tudi orientacije: dve GPS anteni na čim večji razdalji, določitev faznega zamika nosilca v GPS signalu
- Uporaba omejena z dogovorom COCOM- GPS ne deluje (programska omejitev):
 - nad 18 km višine
 - nad 515,4 m/s hitrosti
 - satelit v LEO je na višini npr. 600 km s hitrostjo ~ 7500 m/s.
- Potreben sprejem vsaj 4 satelitov:
 - osnovi meritve časa potovanja GPS signala \rightarrow ocena razdalj do satelitov \rightarrow trilateracija
 - ker ura na sprejemniku ni tako točna (sinhronizirana) rabimo še 4. satelit
 - če se nahaja sprejemnik na zemeljskem geoidu so dovolj trije sateliti (4. razdalja je radij geoida)

2D



Primerjave senzorjev



- najpogosteje uporabljeni senzorji na satelitih

senzor	točnost [°]	prednost	slabost
senzor sonca	0.1	preprost, zanesljiv, poceni	ni uporaben v Zemljini senci
senzor horizonta	0.03	uporaben podnevi in ponoči	drag, slaba ocena kota yaw
magnetometer	1	poceni, stalna pokritost	uporaba le v nizkih orbitah
sledilnik zvezd	0.001	zelo točen	težak, kompleksen, drag
giroskop	0.01/h	hiter	časovno lezenje

Aktuatorji



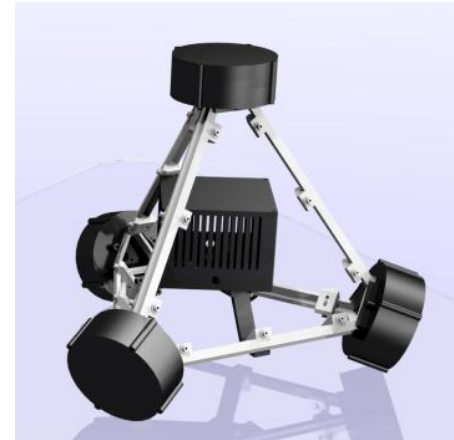
- Z njimi večinoma spreminjamo orientacijo lahko pa tudi pozicijo.
- Izbira aktuatorjev odvisna od misije:
 - LEO omogoča uporabo magnetnega polja
 - Picosateliti omejeni z velikostjo težje implementirat večje aktuatorje (vztrajnike, potisne motorje)
 - Daljinsko zaznavanje, potrebno natančno orientiranje,...

Elektromagnet

- Izkorišča temeljsko magnetno polje v LEO
- Če v polju B tuljavo z N ovoji s ploščino A vzbujaemo s tokom i , dobimo navor:
$$T = B \times iNA$$
- Uporaba možna v pico satelitih za spreminjanje orientacije in v večjih satelitih za razbremenitev reakcijskih koles

Elektromagnet

- Ohranitev vrtilne količine ($J \cdot \omega$): vrtenje reakcijskega kolesa v eno smer bo povzročilo vrtenje satelita v nasprotno s hitrostjo obratnosorazmerno z vztrajnostmi
- Za poljubno orientacijo rabimo tri reakcijska kolesa postavljena medsebojno ortogonalno
- Robustneje je če imamo 4 kolesa v tetraeder konfiguraciji
- Zelo točni, težki, veliki (ni za picosatelit) in dragi



Momentna kolesa

- Se vrtijo stalno, zato imajo giroskopsko stabilnost (držanje smeri kljub pri raznim motnjam)
- **Giroskopska kolesa**, podobno kot momentna, le da je le eno momentno kolo, katerega os vrtenja lahko spreminjamo

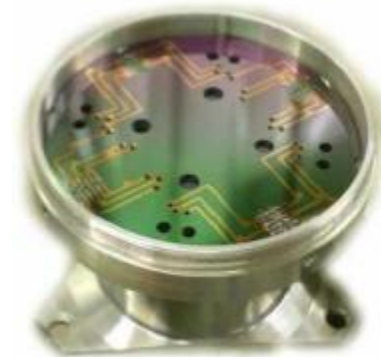
Potisni motorji (thrusters)

- zakon o akciji in reakciji
- Pulzirajoč izhodni plin povzroči premik satelita v nasprotno smer
- Če smer pulzirajočega potisnega ni v smeri zveznice težišče satelita in motor, potem dobimo še navor oz. vrtenje
- Micropotisnimotorji – sile so reda 1mN
- Potrebuje rezervoar potisnega plina- omejen čas delovanja in dodatna teža in volumen

4 N Bipropellant Thruster



NanoSpace's MEMS cold gas thruster



Pasivna orientacija satelita



Za dosego zelene smeri dodatna energija ni potrebna

- **Gradientno težnostno vodenje:** težnost se zmanjšuje z oddaljenostjo od Zemlje. Če je satelit podolgovat, v različnih točkah deluje različna gravitacijska sila, zato se telo postavi z daljšo osjo proti Zemlji. (dolga droga z maso, natančnost $1-10^\circ$)
- **Pasivno magnetno vodenje:** satelit ima interno magnetno polje - je dipol, ki se v zemeljskem magnetnem polju obrne v smeri silnic. (trajni magnet ali zaradi električnih virov in prevodnih površin, natančnost $1-10^\circ$)
- **Stabilizacija z vrtenjem:** satelit se vrti okoli ene osi zato giroskopski efekt odpravi vpliv zunanjih motenj. Vrtenje dosežemo z različno pobarvanimi stranicami satelita -različna sila zaradi sončnega pritiska. Vrtenje dosežemo še s potisnim motorjem, magnetnimi tuljavami,... Lahko se vrti le del satelita (momentno kolo).

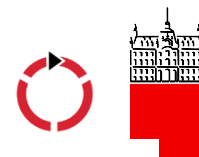
Aktuatorji primerjava



- najpogosteje uporabljeni aktuatorji

metoda	točnost [°]	prednost	slabost
stabilizacija z vrtenjem	0.1-1	preprost, pasiven, poceni	inercijsko orientiran
gradientno težnostna	1-5	pasiven, poceni, preprost	drag, težiščno orientiran
potisni motorji	0.01-1	hiter	cena, potrošen
elektromagneti	1-2	poceni, lahek, počasen, samo LEO	
reakcijska kolesa	0.001- 1	hiter, natančen	cena, teža

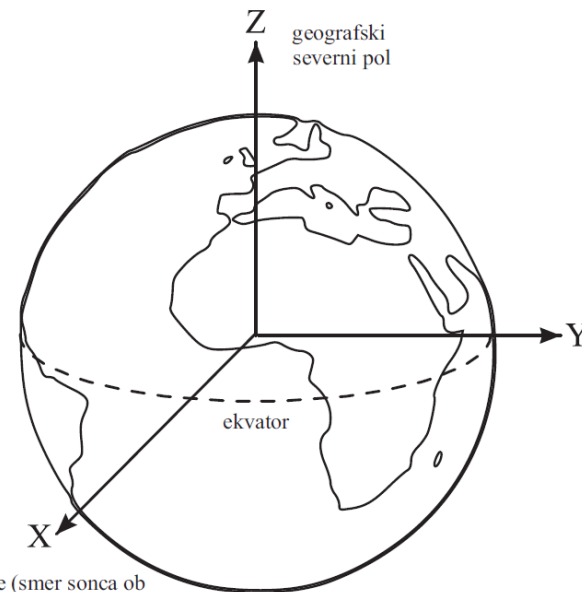
Referenčni koordinatni sistemi



Podajajo položaj in orientacijo satelita.

Inercialni koordinatni sistem z izhodiščem v središču Zemlje (Earth Centered Inertial Frame - ECI)

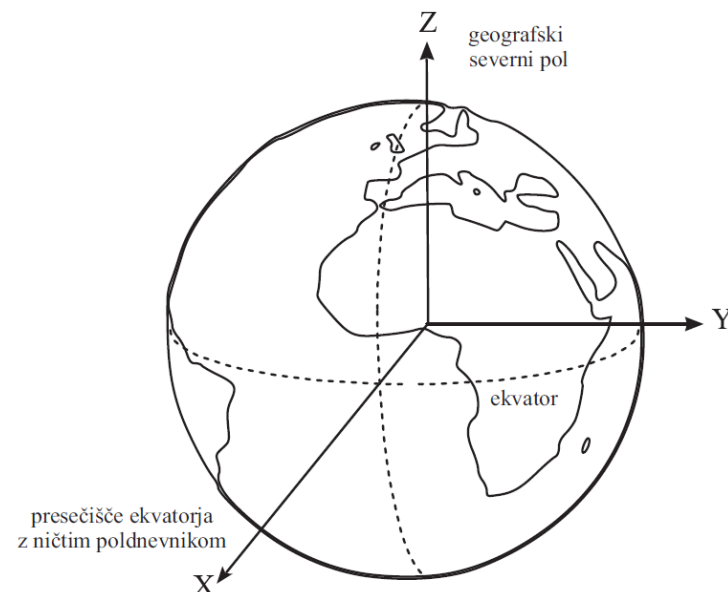
- Inercialni sistem, miruje ali se enakomerno giblje glede na oddaljene zvezde
- V njih veljajo Newtonovi zakoni.



pohladišče (smer sonca ob pomladanskem enakonočju)

Na zemljo pritrjen koordinatni sistem (Earth Centered Earth Fixed Frame - ECEF)

- Se vrti z Zemljo, x os v smeri presečišča ekvatorja z ničtim poldnevnikom, z os v smeri Severnega pola
- Podaja položaj satelita glede na Zemljo.



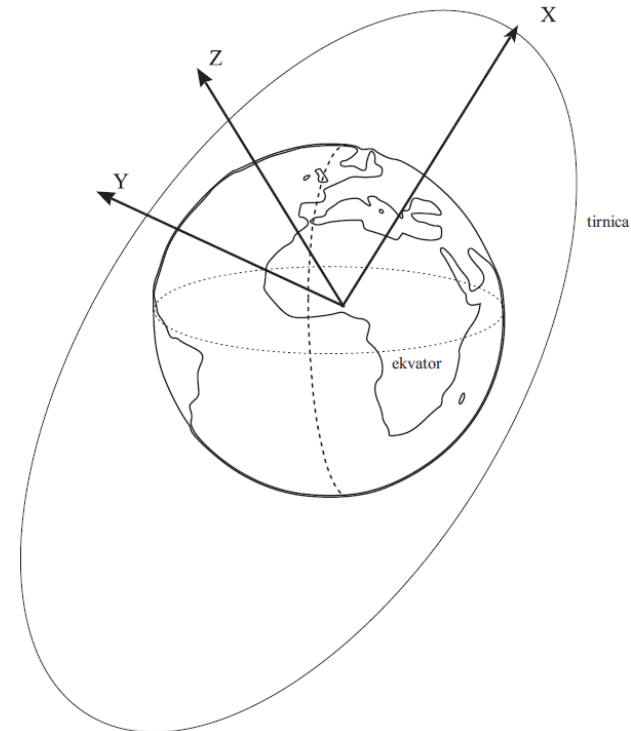
presečišče ekvatorja z ničtim poldnevnikom

Referenčni koordinatni sistemi



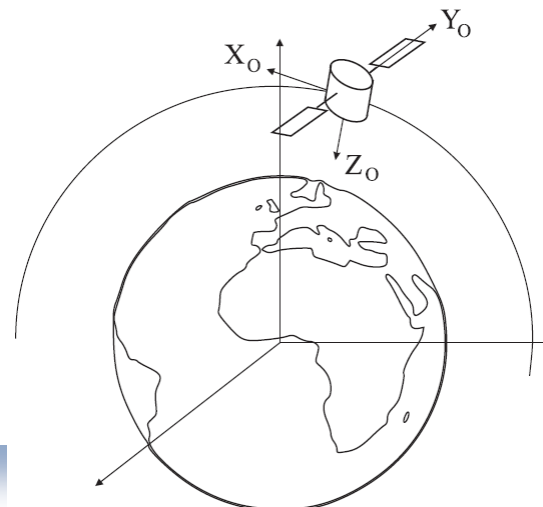
Orbitalni koordinatni sistem z izhodiščem v središču zemlje (Earth Centered Orbit Frame - ECO)

- v njem podani Keplerjevi elementi
- x os v smeri Perigeja, y os v smeri manjše polosi, z os pravokotna na ravnino tirnice

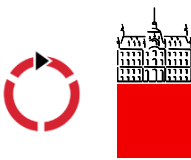


Orbitalni koordinatni sistem (Orbit Frame - O)

- izhodišče v težišču satelita
- Z os proti središču Zemlje, y pravokotna na ravnino tirnice, x os v smeri gibanja.
- Pomemben za izračun orientacije satelita glede na Zemljo.



Predstavitve orientacije



- Referenčni KS je večinoma ECI
- Koordinatni sistem satelita pa označimo z B (Body)
- Orientacijo satelita opišemo z orientacijo B proti ECI, podaja jo matrika transformacije \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- \mathbf{R} transformira vektor \mathbf{v}_{xyz} iz ECI v vektor \mathbf{v}_{uvw} iz B

$$\mathbf{v}_{uvw} = \mathbf{R}\mathbf{v}_{xyz}$$

- \mathbf{R} je matrika smernih cosinusov (DCM), njeni elementi so kosinusi kotov med posameznimi osmi obeh KS
- Elementarne transformacije

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eulerjevi koti

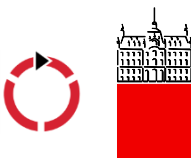


- Eulerjevi koti opišejo orientacijo togega telesa z vrtenjem okoli osi x, y, z ref. KS
- Označbe kotov
 - ϕ - kot valjanja (angl. roll)
 - θ - kot prevračanja (angl. pitch)
 - ψ - kot sukanja (angl. yaw, heading)
- Možnih je 12 kombinacij zasukov okoli osi x, y, z . Pogosta je kombinacija 3-2-1, kjer iz začetne lege (B in ECI sta poravnana) zavrtimo B:
 1. Najprej okrog osi z za kot ψ (kot sukanja - yaw)
 2. Nato okrog nove osi y za kot θ (kot prevračanja - pitch)
 3. Nato okrog nove osi x za kot ϕ (kot valjanja - roll)
- Dobimo (! vrstni red množenj)

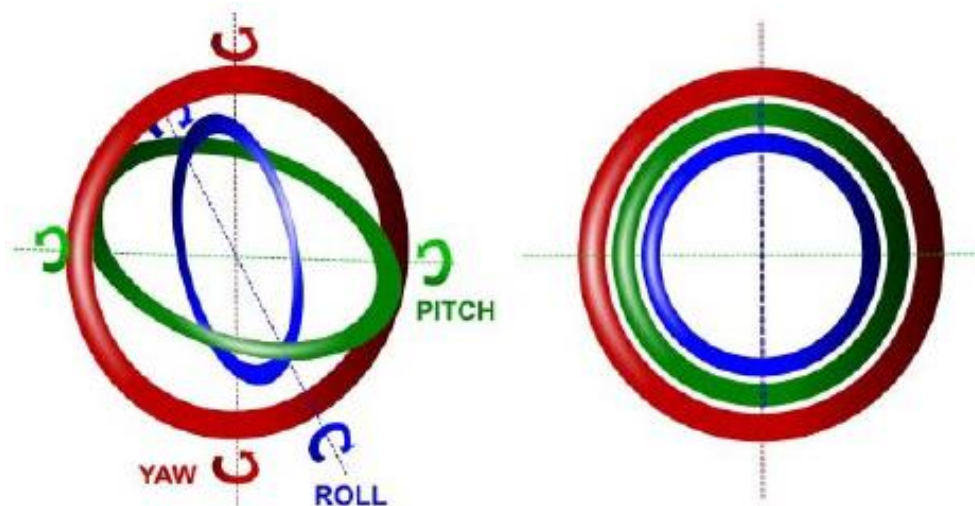
$$R = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Eulerjevi koti...



- Obratna transformacija
$$\phi = \arctan\left(\frac{R_{23}}{R_{33}}\right)$$
$$\theta = -\arcsin(R_{13})$$
$$\psi = \arctan\left(\frac{R_{12}}{R_{11}}\right)$$
- Predstavitev z Eulerjemi koti je kompaktna (ni redundantna)
- Je pa singularna pri $\theta = \pi/2$ takrat imata vrtenje okoli okrog z in x isti učinek





- Podani s 4 parametri, ni problema singularnosti kot pri Eulerjevih kotih
- Splošna oblika

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

- q_0 je skalarni del, q_1, q_2, q_3 pa vektorski del
- Kvaternion definira enotski vektor $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]$ osi vrtenja in kot zasuka $\Delta\Phi$ okoli te osi

$$q_0 = \cos \Delta\Phi/2$$

$$q_1 = e_1 \sin \Delta\Phi/2$$

$$q_2 = e_2 \sin \Delta\Phi/2$$

$$q_3 = e_3 \sin \Delta\Phi/2$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

- Če vektor $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ zavrtimo okoli osi \mathbf{e} za kot $\Delta\Phi$ dobimo vektor \mathbf{v}'

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2}$$

$$\mathbf{q}^* = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k}$$

Kvaternioni...



- Kvaternion, ki ustreza produktu dveh DCM matrik je produkt dveh kvaternionov: Če nek vektor zavrtimo najprej za zasuk \mathbf{q}' , nato še za \mathbf{q} dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'' = \mathbf{q}'\mathbf{q} &= (q'_0q_0 - q'_1q_1 - q'_2q_2 - q'_3q_3) \\ &+ \mathbf{i}(q'_1q_0 + q'_2q_3 - q'_3q_2 + q'_0q_1) \\ &+ \mathbf{j}(-q'_1q_3 + q'_2q_0 + q'_3q_1 + q'_0q_2) \\ &+ \mathbf{k}(q'_1q_2 - q'_2q_1 + q'_3q_0 + q'_0q_3) \end{aligned}$$

- oziroma matrično

$$\begin{bmatrix} q''_0 \\ q''_1 \\ q''_2 \\ q''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix}$$

- Rotacije definirane s kvaternioni so računsko bolj učinkovite kot DCM matrike in ni problemov s singularnostjo kot pri Eulerjevih kotih

Kvaternioni...



- Povezava $Q \leftrightarrow DCM$

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_0) & +q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

$$q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} + R_{22} + R_{33}}$$

$$q_1 = \frac{1}{4q_0} (R_{23} - R_{32})$$

$$q_2 = \frac{1}{4q_0} (R_{31} - R_{13})$$

$$q_3 = \frac{1}{4q_0} (R_{12} - R_{21})$$



- Povezava $Q \leftrightarrow$ Eulerjevi koti

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{bmatrix}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2(q_1q_0 + q_2q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right)$$

$$\theta = -\arcsin(2(q_1q_3 - q_2q_0))$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{2(q_3q_0 + q_1q_2)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right)$$



Primer 7.1. *Imamo referenčni koordinatni sistem (G) in koordinatni sistem togega telesa (L). Na začetku sta oba poravnana, nato tego telo zavrtimo okoli osi x osi za kot $\alpha_x = 90^\circ$ in nato še enkrat okoli nove osi z za kot $\alpha_z = 90^\circ$.
Odgovorite na vprašanja:*

- 1. Kakšna je orientacija togega telesa (DCM matrika \mathbf{R}_G^L) glede na referenčni koordinatni sistem.*
- 2. Določite Eulerjeve kote (notacija 3-2-1), ki opisujejo to transformacijo.*
- 3. Določite kvaternion \mathbf{q}_G^L , ki opisuje to transformacijo.*
- 4. Kakšna je predstavitev vektorja $\mathbf{v} = [0, 0, 1]^T$, podanega v referenčnih koordinatah, v koordinatah togega telesa?*



Primer 7.2. *Imamo referenčni koordinatni sistem (G) in koordinatni sistem tega telesa (L). Na začetku sta oba poravnana, nato togo telo zavrtimo okoli osi x osi za kot $\alpha_x = 90^\circ$ in nato še enkrat okoli nove osi y za kot $\alpha_y = 45^\circ$.
Odgovorite na vprašanja:*

- 1. Kakšna je orientacija tega telesa (DCM matrika \mathbf{R}_G^L) glede na referenčni koordinatni sistem.*
- 2. Določite Eulerjeve kote (notacija 3-2-1), ki opisujejo to transformacijo.*
- 3. Določite kvaternion \mathbf{q}_G^L , ki opisuje to transformacijo.*
- 4. Kakšna je predstavitev vektorja $\mathbf{v} = [0, 0, 1]^T$, podanega v referenčnih koordinatah, v koordinatah tega telesa?*

Kinematika orientacije satelita s kvaternioni



- Iščemo časovno odvisnost (diferencialno enačbo) za vrtenje togega telesa
- če je $\mathbf{q}(t)$ začetna orientacija telesa, ki ga naknadno zavrtimo za $\Delta\mathbf{q}(t)$ dobimo končno orientacijo telesa $\mathbf{q}(t + \Delta t)$

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t)\Delta\mathbf{q}(t)$$

- Velja

$$\Delta\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos \Delta\Phi/2 \\ e_x \sin \Delta\Phi/2 \\ e_y \sin \Delta\Phi/2 \\ e_z \sin \Delta\Phi/2 \end{bmatrix}$$

- Če sta $\mathbf{e}(t)$ in $\Delta\Phi$ med rotacijo konstantna lahko zapišemo

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \left\{ \cos \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) \mathbf{I} + \sin \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & e_z & -e_y \\ e_y & -e_z & 0 & e_x \\ e_z & e_y & -e_x & 0 \end{bmatrix} \right\} \mathbf{q}(t)$$

- oz. za majhne kote

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \left(1 + \frac{\Delta t \boldsymbol{\Omega}}{2} \right) \mathbf{q}(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Kinematika orientacije satelita s kvaternioni...

- Za dobljeno relacijo

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) = \left(1 + \frac{\Delta t \boldsymbol{\Omega}}{2} \right) \mathbf{q}(t)$$

- Določimo odvod kvaterniona in dobimo diferencilano enačbo oz. kinematiko vrtenja satelita

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}$$

- Kjer so vhodi kotne hitrosti vrtenja satelita (v KS satelita) ω_x , ω_y , ω_z

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$



Kinematika orientacije satelita z Eulerjevimi koti

- $\mathbf{R}(t)$ podaj trenutno orientacijo, $\Delta\mathbf{R}(t)$ spremembo orientacije in nova orientacija po vrtenju je

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \Delta\mathbf{R}(t)\mathbf{R}(t)$$

- $\Delta\mathbf{R}(t)$ določimo iz znanih kotnih hitrosti

$$\Delta\mathbf{R}(t) = e^{\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\Omega}' dt} \quad \boldsymbol{\Omega}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Kjer aproksimiramo

$$B = \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\Omega}'(t) dt = \boldsymbol{\Omega}' \Delta t$$

- in razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{R}(t) &= e^B = \\ &= \left(I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \left(I + B + \frac{B^2}{2!} - \frac{\sigma^2 B}{3!} - \frac{\sigma^2 B^2}{4!} + \frac{\sigma^4 B}{5!} + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(I + \frac{\sin \sigma}{\sigma} B + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} B^2 \right)$$

$$\sigma = \Delta t \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$



$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{R}(t) &= e^B = \\ &= \left(I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \left(I + B + \frac{B^2}{2!} - \frac{\sigma^2 B}{3!} - \frac{\sigma^2 B^2}{4!} + \frac{\sigma^4 B}{5!} + \dots \right) = \\ &= \left(I + \frac{\sin \sigma}{\sigma} B + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} B^2 \right)\end{aligned}$$

- Za majhne kote velja

$$\Delta \mathbf{R}(t) = I + B = I + \boldsymbol{\Omega}' \Delta t$$

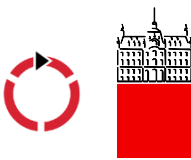
- Končna ocena rotacije je

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = (I + \boldsymbol{\Omega}' \Delta t) \mathbf{R}(t)$$

- Odvod DCM matrike pa

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{\Omega}' \mathbf{R}$$

Dinamika gibanja satelitov



- Vhodni vektor navorov \mathbf{M} , ki delujejo okoli osi satelita povzročijo pospešeno vrtenje satelita
- Newtonov zakon: v inercialnih sistemih je odvod vrtilne količine enak vsoti momentov, ki delujejo na telo

$$\mathbf{M}_{ECI} = \frac{d\mathbf{\Gamma}_{ECI}}{dt}$$

- Vrtilna količina = tenzor vztrajnostnih momentov * vektor kotnih hitrosti

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$$

- \mathbf{J} je konstantna v KS togega telesa, kjer je vrtilna količina

$$\mathbf{\Gamma}_B = \mathbf{R}_{ECI}^B \mathbf{\Gamma}_{ECI}$$

- Njen odvod je

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{ECI}^B}{dt} \mathbf{\Gamma}_{ECI} + \mathbf{R}_{ECI}^B \frac{d\mathbf{\Gamma}_{ECI}}{dt}$$

Dinamika gibanja satelitov...



$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{ECI}^B}{dt} \boldsymbol{\Gamma}_{ECI} + \mathbf{R}_{ECI}^B \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_{ECI}}{dt}$$

Upoštevajoč kinematiko kroženja za prvi člen dobimo

$$\frac{d\mathbf{R}_{ECI}^B}{dt} \boldsymbol{\Gamma}_{ECI} = \boldsymbol{\Omega}' \mathbf{R}_{ECI}^B \boldsymbol{\Gamma}_{ECI} = \boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Gamma}_B$$

In odvod vrtilne količine v B

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_B}{dt} = \boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Gamma}_B + \mathbf{R}_{ECI}^B \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_{ECI}}{dt}$$

V KS togega telesa je \mathbf{J} konstantna, zato velja $\frac{d\boldsymbol{\Gamma}_B}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$

Nadalje velja $\mathbf{R}_{ECI}^B \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_{ECI}}{dt} = \mathbf{R}_{ECI}^B \mathbf{M}_{ECI} = \mathbf{M}$

Kjer je \mathbf{M} vsota vseh navorov na togo telo (navori vodenja + motilni navori)

Upoštevamo še $\boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Gamma}_B = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Gamma}_B = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})$

Dinamika gibanja satelitov...



Končna diferencialna enačba, ki opisuje vrtenje satelita pri podanih vhodnih navorih na osi satelita

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{M} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})) \quad \xrightarrow{=} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{M} - \boldsymbol{\Omega}'(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}))$$

z njeno integracijo dobimo kotne hitrosti. Upoštevajoč kinematiko kroženja pa orientacijo satelita podano s kvaternioni ali DCM matriko

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{q} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \boldsymbol{\Omega}'\mathbf{R}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Upravljanje orientacije satelita z reakcijskimi kolesi



- Simulacijski primer, vhodi v sistem so navori, ki jih povzročijo vztrajniki okoli svojih osi. To povzroči vrtenje satelita ...
- Slika modelne naprave za testiranje - zračni ležaj

