

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

DIGITALNO VODENJE

Sašo Blažič

Ljubljana 2013

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

681.51(075.8)(0.034.2)

BLAŽIČ, Sašo

Digitalno vodenje [Elektronski vir] / Sašo Blažič ; [izdajatelj] Fakulteta za elektrotehniko. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Založba FE in FRI, 2013

Način dostopa (URL):

<http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Blazic/DigitalnoVodenjeUcbenik.pdf>

ISBN 978-961-243-230-0 (pdf)

266334464

Copyright © 2013 Založba FE in FRI. All rights reserved.
Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih
brez predhodnega dovoljenja Založbe FE in FRI prepovedano.

URL: <http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Blazic/DigitalnoVodenjeUcbenik.pdf>

Recenzenta: prof. dr. Drago Matko, prof. dr. Igor Škrjanc
Založnik: Založba FE in FRI, Ljubljana
Izdajatelj: Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: mag. Peter Šega
1. izdaja

Predgovor

Delo je namenjeno predvsem študentom prvega letnika druge stopnje bolonjskega študija programa Elektrotehnika. Čeprav je učbenik mišljen v prvi vrsti kot gradivo za predmet Digitalno vodenje na smereh Avtomatika in informatika ter Robotika, je lahko koristen pripomoček za vse, ki se ukvarjajo ali se želijo seznaniti s področjem digitalnega vodenja. Delo na poglobljen način obravnava problematiko digitalnega vodenja, pri čemer je glavni poudarek na razumevanju konceptov. Ker je snov dokaj teoretično zahtevna, jo ves čas dopolnjujejo in ilustrirajo rešeni problemi. Poleg teoretičnih primerov so gradivu dodani tudi primeri reševanja problemov digitalnega vodenja znotraj programskega paketa MATLAB. Še več tovrstnih primerov lahko bralec dobi na spletni strani <http://msc.fe.uni-lj.si> na domači strani predmeta.

Na koncu bi se rad zahvalil vsem, ki so kakor koli prispevali k izdaji tega učbenika. V prvi vrsti se zahvaljujem prof. dr. Dragu Matku, ki me je uvedel na to področje in bil dolga leta moj mentor. Prof. Matko je bil tudi pionir področja digitalnega vodenja v Sloveniji ter dolgoletni predavatelj predmetov *Diskretni regulacijski sistemi* in *Računalniško vodenje procesov*, s čimer je pomembno vplival na sedanji izgled učbenika. Zahvalil bi se tudi vsem sodelavcem Laboratorija za avtonomne mobilne sisteme ter Laboratorija za modeliranje, simulacijo in vodenje, ki so prispevali svoj delež z različnimi neformalnimi in formalnimi debatami.

Ljubljana, januar 2013

Sašo Blažič

Kazalo

1	Uvod v digitalno vodenje	1
2	Osnovni koncepti sistemov digitalnega vodenja	7
2.1	Bločna shema sistema digitalnega vodenja	8
2.2	Problematika kvantizacije	11
2.2.1	Časovna kvantizacija	12
2.2.2	Kvantizacija po amplitudi	14
3	Obravnavo diskretnih in vzorčenih signalov	17
3.1	Obravnavo zveznih signalov v frekvenčnem prostoru	17
3.1.1	Fourierova vrsta	17
3.1.2	Fourierova transformacija	20
3.2	Diskretni signali	23
3.3	Vzorčeni signali	25
3.3.1	Vzorčenje signalov s pulzi končne širine	25
3.3.2	Idealno impulzno vzorčenje	27

3.3.3	Vzorčeni diskretni signali	30
3.4	Rekonstrukcija zveznega signala iz vzorcev	32
3.4.1	Teorem o vzorčenju	32
3.4.2	Rekonstrukcija z zadrževalnim vezjem	39
3.5	Oblike Fourierove transformacije	43
3.6	Z-transformacija	50
3.6.1	Z-transformacija elementarnih funkcij	52
3.6.2	Teoremi z-transformacije	56
3.7	Inverzna z-transformacija	65
3.7.1	Uporaba tabel z-transformacije	67
3.7.2	Uporaba izreka o residuih	69
3.7.3	Metoda parcialnih ulomkov	73
3.7.4	Metoda deljenja	76
3.8	Parsevalov teorem	78
3.9	Povezava med ravninama z in s	79
4	Zapis diskretnih sistemov	87
4.1	Diferenčne enačbe	87
4.2	Diskretna prenosna funkcija	89
4.3	Diskretna konvolucija	92
4.4	Predstavitev sistema v prostoru stanj	93
4.4.1	Predstavitev zveznega sistema v prostoru stanj	93

4.4.2	Predstavitev diskretnega sistema v prostoru stanj	94
4.4.3	Zapis sistema v prostoru stanj	97
4.4.4	Odziv diskretnega sistema	101
4.4.5	Ravnovesno stanje diskretnega sistema	106
4.5	Prostor stanj in prenosna funkcija	107
5	Lastnosti diskretnih sistemov	109
5.1	Linearnost in časovna spremenljivost	109
5.2	Frekvenčni odziv diskretnih sistemov	111
5.3	Stabilnost diskretnega sistema	117
5.3.1	Modificirani Routhov kriterij	118
5.3.2	Juryjev stabilnostni kriterij	119
5.3.3	Direktna metoda Ljapunova	123
5.3.4	Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme	128
5.4	Vodljivost diskretnih sistemov	131
5.5	Spoznavnost diskretnih sistemov	132
5.6	Ekvivalentnost sistemov v prostoru stanj	135
5.6.1	Diagonalna kanonična oblika	136
5.6.2	Vodljivostna regulatorna kanonična oblika	139
5.6.3	Spoznavnostna observatorska kanonična oblika	143
6	Pretvorba zveznih dinamičnih sistemov v diskretni prostor	147

6.1	Metode prilagajanja frekvenčnega odziva	149
6.1.1	Tustinovo pravilo	152
6.1.2	Metoda predkrivljenja frekvenc	156
6.2	Metode prilagajanja časovnega odziva	159
6.2.1	Določanje diskretnega ekvivalenta prenosne funkcije z metodo stopnične invariance	159
6.2.2	Določanje diskretnega ekvivalenta zapisa v prostoru stanj z metodo stopnične invariance	167
6.3	Primerjava lastnosti zveznega in pripadajočega diskretiziranega sistema	171
6.3.1	Enosmerno ojačenje	171
6.3.2	Poli sistema	172
6.3.3	Ničle sistema	173
7	Algoritmi digitalnega vodenja	177
7.1	Načrtovanje vodenja na osnovi diskretne prenosne funkcije	177
7.2	Diskretni proporcionalno-integrirno-diferencirni regulatorji	181
7.2.1	Pretvorba diskretnega algoritma PID iz zveznega regulatorja	182
7.2.2	Relacije med parametri tipičnega diskretnega regulatorja PID	187
7.2.3	Določitev parametrov diskretnega regulatorja PID	189
7.2.4	Modificirani diskretni PID algoritmi	190
7.3	Splošni linearni regulator in premikanje polov	191
7.3.1	Diofantske enačbe	192

7.3.2	Diofantske enačbe nad polinomi	193
7.4	Regulator stanj	198
7.4.1	Načrtovanje regulatorja stanj z metodo premikanja polov .	199
7.4.2	Optimalni regulator stanj	201
7.5	Opazovalnik stanj ali observator stanj	206
7.5.1	Odprtozančni opazovalnik stanj	206
7.5.2	Luenbergerjev opazovalnik stanj	207
7.5.3	Trenutni opazovalnik stanj	209
7.5.4	Optimalni opazovalnik stanj ali Kalmanov filter	211
7.5.5	Princip dualnosti	215
7.6	Razširitev osnovnega regulatorja stanj	215
7.6.1	Regulator stanj na osnovi opazovalnika stanj	215

A Tabela z-transformacije 219

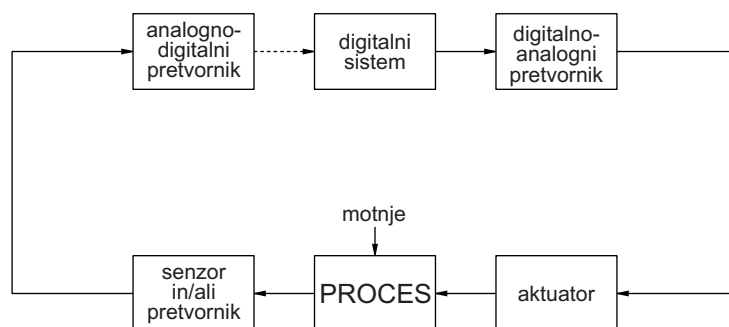
Poglavje 1

Uvod v digitalno vodenje

Digitalno vodenje (angl. *digital control*) je vodenje, ki je izvedeno z digitalnim računalnikom, mikroprocesorskim sistemom, programirljivim vezjem (npr. takšnim v tehnologiji FPGA) ali kakršnem koli drugem digitalnem elektronskem sistemu. Izraz digitalno vodenje poudarja vrsto realizacije vodenja in s tem praktični vidik vodenja. Skupno vsem sistemom digitalnega vodenja je dejstvo, da vodenje »ne deluje« ves čas, ampak se novi ukazi pošljejo le ob diskretnih časovnih trenutkih, ki jih običajno narekuje prihod nove informacije o stanju v vodenem sistemu (ki je tudi omejena na diskretne časovne trenutke) ter izvedba algoritma vodenja. Izvedba digitalnega vodenja običajno vključuje pretvorbo regulirane analogne veličine v digitalno obliko, izvedbo algoritma vodenja v digitalnem elektronskem vezju ter pretvorbo digitalne regulirne veličine v analogni signal. Vse te operacije zahtevajo precej časa, zato jih je mogoče izvajati le v diskretnih časovnih trenutkih.

Časovno diskretno vodenje (angl. *discrete time control*) je izraz, ki je zelo soroden izrazu digitalno vodenje. Izraz poudarja časovno diskretizacijo signalov, ki nastopajo v sistemu, in s tem teoretični vidik vodenja. S problemom se spopademo tako, da definiramo vzorčene signale (angl. *sampled signals*). Najbolj pogosto predpostavimo, da so le-ti vzorčeni z enakomernimi časovnimi presledki, kar omogoča uporabo uveljavljenih metod za analizo in načrtovanje sistemov časovno diskretnega vodenja (včasih jih imenujemo tudi diskretni regulacijski sistemi).

Kot smo že povedali, je digitalno vodenje vrsta vodenja, pri katerem je vodenje izvedeno s pomočjo digitalnega sistema. To pomeni, da se signali na svoji poti vsaj nekaj časa prenašajo v digitalni obliki. Najbolj poenostavljena shema sistema digitalnega vodenja je prikazana na sliki 1.1. Spodnji del slike je enak kot



Slika 1.1: Osnovna bločna shema sistema digitalnega vodenja

pri realizaciji z analognim vodenjem. Razlika se pojavi v zgornjem delu, kjer potrebujemo poseben pretvornik, ki pretvori analogni signal na izhodu analognega sensorja v digitalno veličino, ki se kasneje obdela v digitalnem sistemu (tipično je to digitalni računalnik ali mikrokrmilnik). Digitalni signal, ki ga da na izhodu digitalni sistem, je seveda potrebno znova pretvoriti v analogno obliko, za kar skrbi digitalno-analogni pretvornik. Shema na sliki 1.1 nakazuje na dejstvo, da je vodenje običajno povratnozančno, kar pa seveda ni nujno. Možno je realizirati tudi odprtozančno digitalno vodenje oz. digitalno krmiljenje, pri katerem krmilna veličina ni odvisna od izhodne veličine procesa, zaradi česar je ena povezava na sliki 1.1 prikazana s črtkano črto. V veliki večini primerov bomo v nadaljevanju obravnavali povratnozančne sisteme digitalnega vodenja.

Sistemi vodenja so v svojem razvoju prevzemali čedalje širši spekter opravil, ki jih je veliko lažje izvesti z digitalnim sistemom kot z analognim. Ta opravila običajno izvaja digitalni računalnik, ki zaradi svoje arhitekture operacije izvaja sekvenčno, kar v celotni sistem vodenja vnaša časovno diskretnost. V splošnem pa ni nujno, da je ravno digitalni računalnik tisti del regulacijske zanke, ki zahteva časovno vzorčenje, to je zajemanje podatkov s časovno periodo T . Včasih namreč takšno obravnavo vsiljuje narava procesa ali delovanje sensorja oz. aktivatorja. Naštejmo nekaj takšnih primerov:

- V kemični industriji se pogosto uporabljajo naprave za avtomatsko analizo (npr. plinski kromatograf). Takšna naprava vzame najprej vzorec snovi, ki jo želi analizirati. Nato izvede analizo, za kar potrebuje določen čas, in šele po zaključku analize lahko dobimo rezultat preiskave in naprava lahko postopek ponovi.
- Drug primer takšnega procesa je radar. Z rotirajočo radarsko anteno lahko določeni objekt »vidimo« le enkrat na obrat antene. Isti princip velja pri stabilizaciji rotirajočih satelitov, ki svojo referenčno točko (npr. zvezdo) »vidijo« le enkrat na obrat.

- Pri raziskavah s sonarjem igra bistveno vlogo hitrost razširjanja zvoka. Nov impulz lahko namreč oddamo šele, ko smo registrirali odboj prejšnjega impulza. Minimalno periodo vzorčenja lahko izračunamo iz hitrosti razširjanja zvoka in maksimalnega dosega sonarja.
- V nekaterih primerih lahko spremenimo regulirno oz. krmilno veličino le v določenih časovnih trenutkih. Pri tiristorskih usmernikih lahko spremenimo kot vžiga le enkrat na periodo. Položaj rotacijsko stabiliziranega satelita lahko spreminjamo v smereh, ki sta pravokotni na os vrtenja, le z enim raketnim motorjem. Pri tem pa je možno proizvesti želeni moment le enkrat na obrat.

Sistem digitalnega vodenja na sliki 1.1 ima pred klasičnim regulacijskim sistemom, ki bi bil realiziran z analognimi komponentami, vrsto prednosti. Oglejmo si nekatere:

- Digitalno realizirani parametri niso podvrženi »lezenju« in so neobčutljivi na vplive okolja (temperatura, motnje).
- Digitalna realizacija omogoča poljubno natančnost nastavitve parametrov in izvedbe operacij. Analogne izvedbe lahko včasih pri tem povzročajo velike težave (npr. analogni množilniki).
- Digitalni spomin je bistveno lažje realizirati kot analogni.
- Koncept digitalnega vodenja omogoča enostavnejšo izvedbo klasičnih regulacijskih sistemov ter možnost realizacije širokega spektra sodobnih regulacijskih algoritmov, kot so adaptivno, prediktivno, mehko, multivariabilno, hibridno vodenje itn.
- Večja fleksibilnost, predvsem pri povezovanju z nadrejenimi računalniki (hierarhično vodenje) in nadzornimi sistemi.

Ne glede na algoritem digitalnega vodenja, ki ga bomo uporabili, se je potrebno zavedati kompleksnosti sistema digitalnega vodenja. Pri prehodu iz analognega vodenja v digitalno obliko se namreč porajajo naslednja vprašanja:

- Povratnozančni sistem vodenja na sliki 1.1 sestavljajo tako časovno zvezni kot časovno diskretni gradniki. Katera orodja je potrebno uporabiti za določitev časovnih in frekvenčnih odzivov tovrstnih mešanih sistemov?

- Algoritme digitalnega vodenja lahko dobimo z diskretizacijo zveznih algoritmov ali pa tako, da jih razvijemo od začetka kot povsem digitalne algoritme. Kako je potrebno izvesti diskretizacijo zveznih algoritmov in katere tehnike so uporabne pri povsem digitalnem pristopu?
- Pričakovati je, da bo zelo zmogljiv digitalni sistem vodenja zahteval hitro vzorčenje signalov, kar za seboj potegne veliko računsko zahtevnost algoritmov. Kako je potrebno izbrati čas vzorčenja glede na ostale systemske parametre?
- Sistemi digitalnega vodenja vnašajo v sistem tako zakasnitve zaradi vzorčenja kot pogrešek kvantizacije, ki mu včasih rečemo tudi šum kvantizacije. Oboje je možno znižati na račun povečanih stroškov strojne opreme. Kakšen vpliv na učinkovitost vodenja imata ta dva faktorja?
- Katere strategije (kot npr. multipleksiranje signalov) je smiselno uporabiti v določenem primeru, če upoštevamo praktične vidike in stroške izvedbe?

Izredno pomembno vlogo pri izvedbi sistema digitalnega vodenja imata tudi uporabljena strojna oprema (angl. *hardware*) in pripadajoča strojno-programaska oprema (angl. *firmware*). Glede na uporabljeno infrastrukturo je namreč potrebno prilagoditi algoritme vodenja, pripadajoče parametre ipd. Če program teče na mikrokrmilniku ali programirljivem vezju, se program običajno piše v razvojnem okolju na razvojnem računalniku (običajno je to osebni računalnik). Glede na vrsto uporabljene strojne opreme se spreminja tudi način programiranja, ki je lahko v zbirnem jeziku (angl. *assembler*) ali višjenivojskem programskem jeziku (npr. C, C++, C#, Java), kar se običajno uporablja v zadnjih letih. Na vsak način se je potrebno zavedati omejitev, ki jih prinaša uporabljena oprema. Te pa so povezane s hitrostjo izvajanja operacij, natančnostjo računanja, sistemom prekinitev (angl. *interrupt*), specifikami operacijskega sistema (če je uporabljen) ipd. V nadaljevanju se z izvedbenimi vidiki sistemov digitalnega vodenja več ne bomo ukvarjali, temveč se bomo posvetili algoritmom vodenja.

Povejmo še nekaj besed o notaciji, ki bo uporabljena v učbeniku. Če ne bo drugače povedano, bomo zvezne časovne signale označevali z indeksom z , npr. $y_z(t)$, $u_z(t)$. S tem jih bomo ločili od diskretnih signalov, ki bodo v učbeniku v večini. Ti bodo označeni brez indeksa oz. z indeksom, različnim od z , npr. $y(k)$, $x_2(k)$. V učbeniku bodo nastopale še druge vrste signalov, ki jih bomo posebej predstavili, npr. vzorčeni signali $y^*(t)$. Tudi pri opisu sistemov bomo zvezne sisteme opisovali z indeksom z , npr. zvezna prenosna funkcija $G_z(s)$, matrike zapisa zveznega sistema v prostoru stanj \mathbf{A}_z , \mathbf{b}_z , \mathbf{c}_z^T , d_z . Diskretni sistemi bodo zapisani brez indeksa ali pa bo uporabljen kakšen drug indeks, npr. diskretna

prenosna funkcija $G_2(z)$, matrike zapisa diskretnega sistema v prostoru stanj \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T , d .

Poglavje 2

Osnovni koncepti sistemov digitalnega vodenja

Tipično shemo sistema digitalnega vodenja prikazuje slika 2.1. Na tej shemi nastopajo razne vrste signalov, zato si najprej oglejmo nekaj osnovnih pojmov o vrstah signalov:

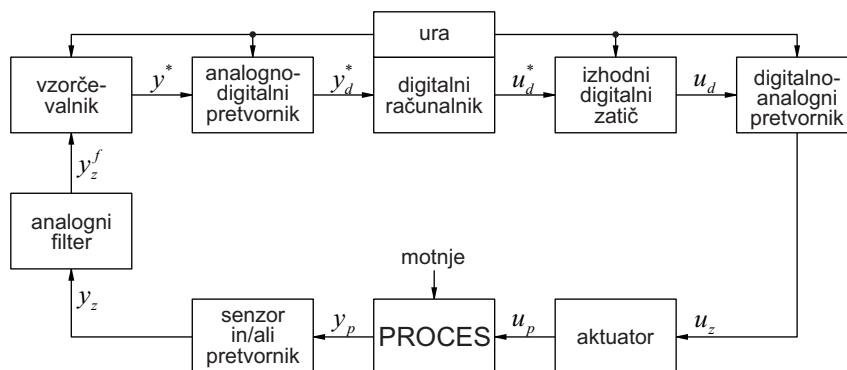
Časovno zvezni signal je funkcija, ki je definirana na zveznem časovnem intervalu in katere amplituda lahko zavzame zvezno področje vrednosti ali pa končno število možnih vrednosti.

Analogni signal je funkcija, ki je definirana na zveznem časovnem intervalu in katere amplituda lahko zavzame zvezno področje vrednosti. Analogni signal je torej posebni primer časovno zveznega signala.

Kvantizacija je pojem, ki opisuje proces predstavitve spremenljivke z naborom različnih vrednosti. Kvantizirana spremenljivka lahko zavzame le različne vrednosti.

Časovno diskretni signal je funkcija, ki je definirana le v posameznih časovnih trenutkih. To pomeni, da je neodvisna spremenljivka, to je čas, kvantizirana. Če lahko zavzame amplituda časovno diskretnega signala zvezno področje vrednosti, pravimo takemu signalu vzorčeni (angl. *sampled*) signal. Vzorčeni signal dobimo z vzorčenjem časovno zveznega signala v diskretnih časovnih trenutkih.

Digitalni signal je funkcija, kjer sta čas in amplituda kvantizirani veličini. Digitalni signal lahko vedno predstavimo z nizom števil, pri čemer je vsako število zapisano s končnim številom digitov.



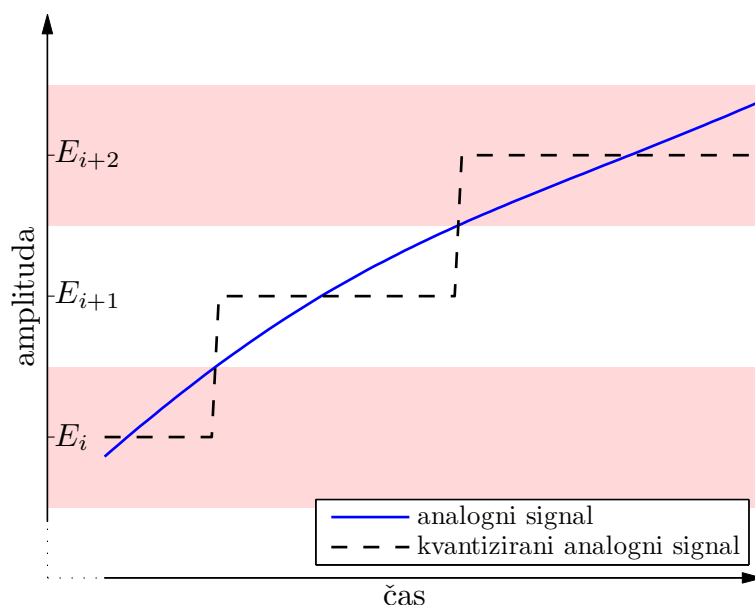
Slika 2.1: Tipična bločna shema sistema digitalnega vodenja

V praksi pojma časovno diskretni in digitalni signal pogosto pomenita isto. Ker pa je velik del teorije časovno diskretnih signalov uporaben tudi za digitalne signale, ni potrebno vedno strogo ločiti obeh pojmov. Izraz časovno diskretni signal se bolj pogosto uporablja pri teoretičnih raziskavah, izraz digitalni pa se uporablja pri opisu realizacije aparaturne in programske opreme.

2.1 Bločna shema sistema digitalnega vodenja

Na sliki 2.1 najprej pretvorimo fizikalno veličino y_p v analogni električni signal y_z . Le-tega nato običajno filtriramo z analognim filtrom (le-ta mora izločiti vse frekvence, ki so višje od polovice frekvence vzorčenja) in izhodni signal filtra y_z^f , ki je zopet analogni signal, vzorčimo s časovno periodo T . Tako dobimo vzorčeni signal y^* , ki ga v analogno-digitalnem (A/D) pretvorniku pretvorimo v digitalni signal y_d^* . Standardna oblika predstavitve digitalnih signalov je njihov zapis v binarnem številskem sistemu. Število nivojev m , ki jih lahko predstavimo s številom, ki ima n bitov, je 2^n . Velja tudi obratno: če zahtevamo m nivojev, je število potrebnih bitov najmanjše celo število, ki je večje ali enako $\log_2 m$. Zato moramo vzorce kvantizirati v enega izmed standardnih nivojev, ki jih dobimo glede na število bitov A/D pretvornika. Najbolj razširjena metoda kvantizacije je, da predpišemo vsakemu vzorcu najbližji standardni nivo E_i , kar prikazuje slika 2.2. Vodoravni pasovi na sliki 2.2 ilustrirajo področje merjene vrednosti, ki se zaokrožuje k istemu standardnemu nivoju. Resolucija A/D pretvornika je definirana kot razdalja med dvema sosednjima standardnima nivojema in je enaka širini vodoravnih pasov na sliki 2.2.

Proces kvantizacije vzorca in njegova prevedba v binarno število se imenuje A/D pretvorba. V splošnem mora biti dinamika signala združljiva z dinamiko upo-

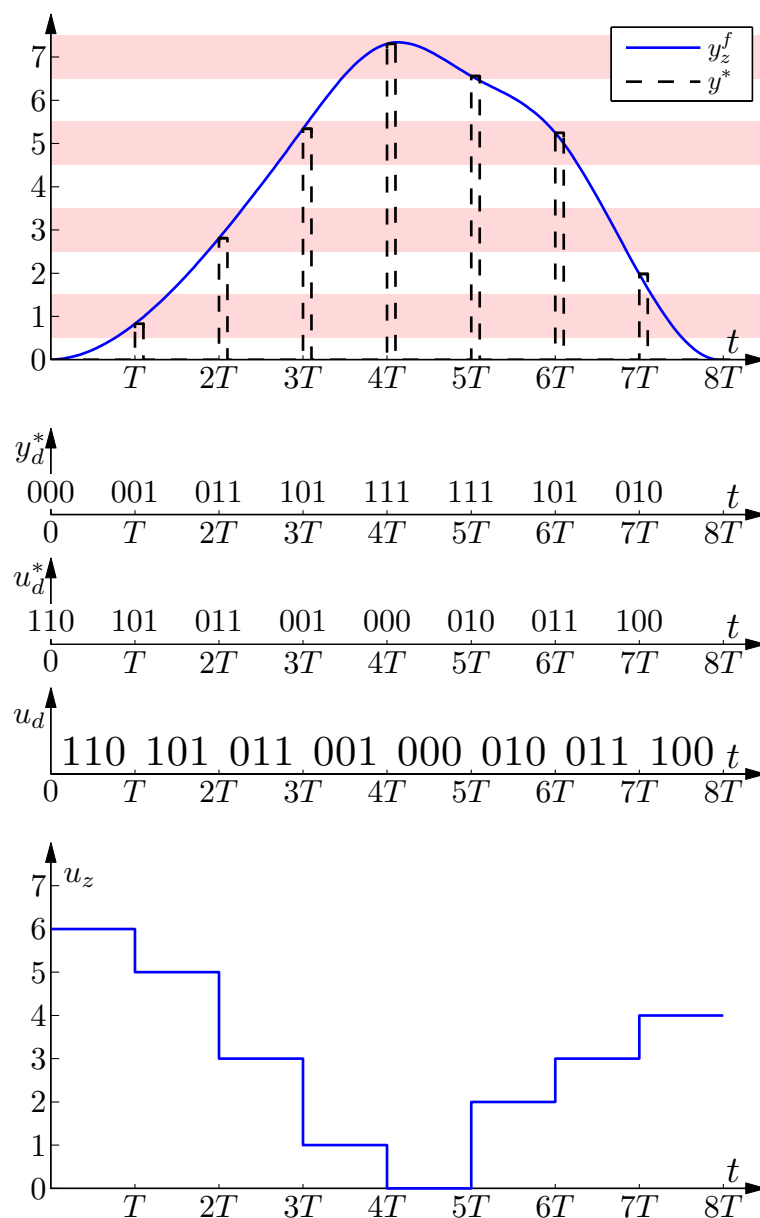


Slika 2.2: Kvantizacija analognega signala – kvantizirani analogni signal dobimo tako, da analogni signal zaokrožimo k najbližjemu standardnemu nivoju E_i

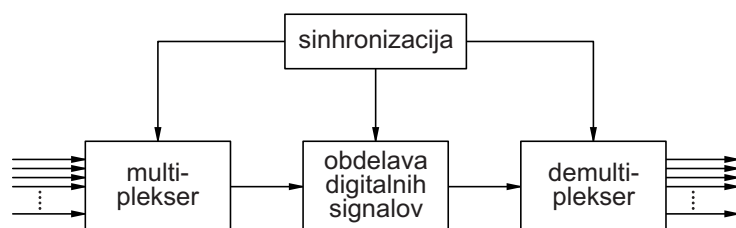
rabljenega A/D pretvornika, število bitov pa zadostno za zahtevano natančnost. Digitalni računalnik, ki lahko obravnava le digitalne signale, nato po ustreznem algoritmu izračuna digitalni signal u_d^* , ki ga s pomočjo izhodnega zatiča in digitalno-analognega (D/A) pretvornika pretvorimo v časovno zvezni signal u_z (vmesni signal u_d je časovno zvezni signal, katerega amplituda je podana v digitalni obliki). Izhodni zatič zapolni »vrzeli« med impulzi, ki jih da digitalni računalnik. V teoriji vzorčenih signalov se takšno vezje imenuje zadrževalnik ničtega reda, ki ga bomo obravnavali v razdelku 3.4.2. Signal u_z je vhodni signal v aktuator ali aktivator, ki analogni signal u_z pretvori v fizikalno veličino u_p , le-ta pa dejansko vstopa v proces. Vse opisane pretvorbe morajo biti seveda sinhronizirane, za kar skrbi ura.

Na namišljenem primeru ilustrirajmo obliko signalov v bločni shemi na sliki 2.1. Predpostavimo, da se lahko analogni signal spreminja med 0 in 7 V in uporabimo 8 možnih nivojev (v prirastkih po 1 V) za binarna števila. Slika 2.3 prikazuje časovne poteke signalov s slike 2.1.

Slika 2.1 predstavlja seveda tipično konfiguracijo sistema digitalnega vodenja. Dejanska konfiguracija pa se seveda od le-te lahko razlikuje. Če sta senzor oz. aktuator konstruirana tako, da imata izhodni oz. vhodni signal v digitalni obliki, odpadeta A/D oz. D/A pretvornik.



Slika 2.3: Časovni potek signalov s slike 2.1 – na zgornji sliki sta prikazana analogni signal $y_z^f(t)$ in vzorčeni signal $y^*(t)$, naslednja slika prikazuje digitalna števila y_d^* na izhodu A/D pretvornika, nato sledi izračun regularne veličine u_d^* v digitalnem računalniku, zaporedje digitalnih števil v registru izhodnega zatiča u_d in končno pretvorba v analogni signal $u_z(t)$ v digitalno-analognem pretvorniku

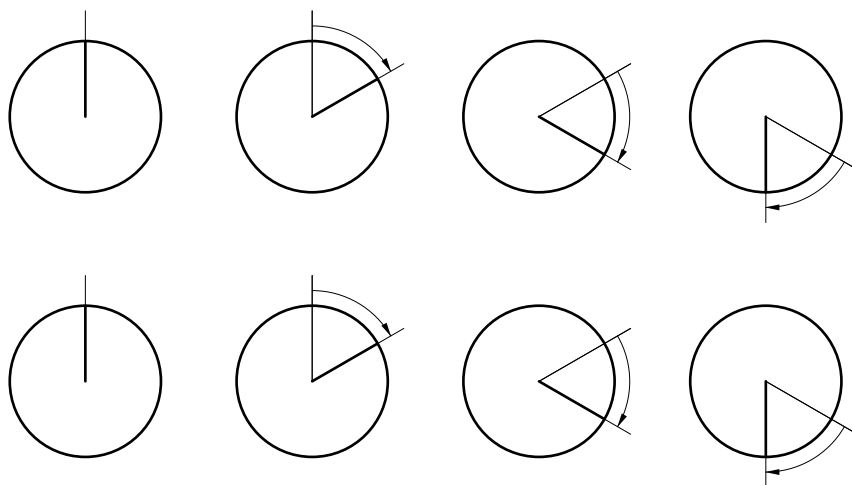


Slika 2.4: Multipleksiran sistem

Dokaj zapleten postopek A/D pretvorbe, obravnavanje tako dobljenih digitalnih signalov in končno D/A pretvorba tvorijo tako kompliciran proces, da običajno ni ekonomičen za obravnavanje enega samega signalnega kanala. Bistvena prednost digitalnega koncepta je možnost obravnave večjega števila kanalov z isto aritmetično enoto. To lahko dosežemo s t.i. časovnim multipleksiranjem. Na sliki 2.3 smo lahko videli, da je bila med posameznimi vzorci relativno dolga perioda. V tej periodi lahko vodimo v računalnik vzorce drugih signalov. Ta koncept ilustrira slika 2.4. Posamezne kanale beremo drugega za drugim, vzorčene vrednosti pa v istem vrstnem redu pretvorimo v binarna števila, ki jih nato obdelamo in ustrezno ločimo v originalne kanale s pomočjo demultiplekserja. Te kanale nato vodimo v ustrezne D/A pretvornike. Seveda morajo biti A/D pretvorba, obravnavanje signalov in D/A pretvorba medsebojno sinhronizirani.

2.2 Problematika kvantizacije

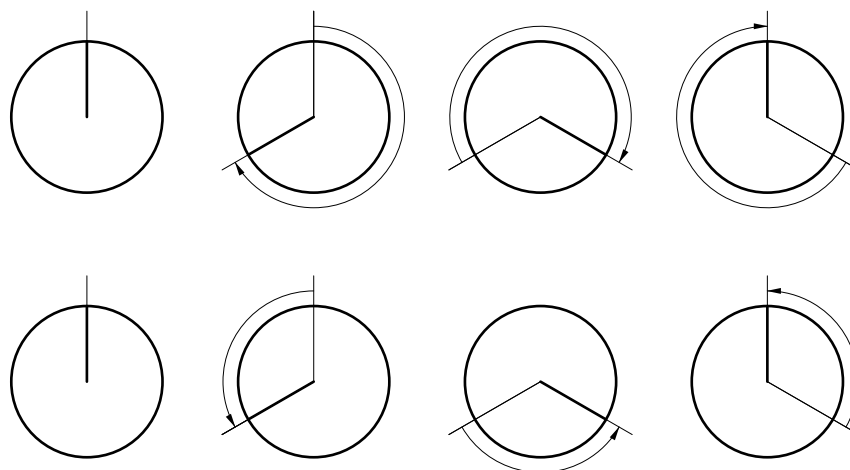
Osnovno vprašanje, ki nastane pri opisanem postopku digitalnega vodenja procesov je, ali smo izgubili kaj informacije. Navsezadnje smo signal vzorčili le v diskretnih časovnih intervalih, pri kvantizaciji pa smo dejansko amplitudo nadomestili z najbližjo standardno vrednostjo. Teorem o vzorčenju (bolj podrobno ga bomo obravnavali v razdelku 3.4.1) pravi, da lahko frekvenčno omejeni signal teoretično rekonstruiramo iz diskretnih vzorcev, če je frekvenca vzorčenja vsaj dvakrat višja od najvišje frekvence signala. V praksi izberemo frekvenco vzorčenja višjo, in sicer zato, da lahko zagotovimo praktično izvedbo. Vhodni analogni signal običajno filtriramo z analognim vhodnim filtrom, ki zagotovi zahtevi po frekvenčni omejenosti vhodnega signala.



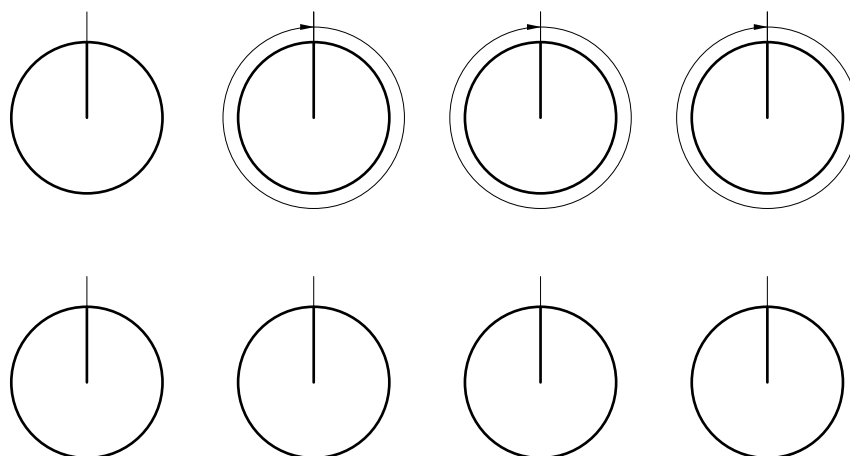
Slika 2.5: Zaporedje slik kolesa pri frekvenci vrtenja, ki je manjša od $\frac{f_s}{2}$
 (zgoraj – ilustracija dejanske smeri vrtenja kolesa,
 spodaj – ilustracija navidezne smeri vrtenja)

2.2.1 Časovna kvantizacija

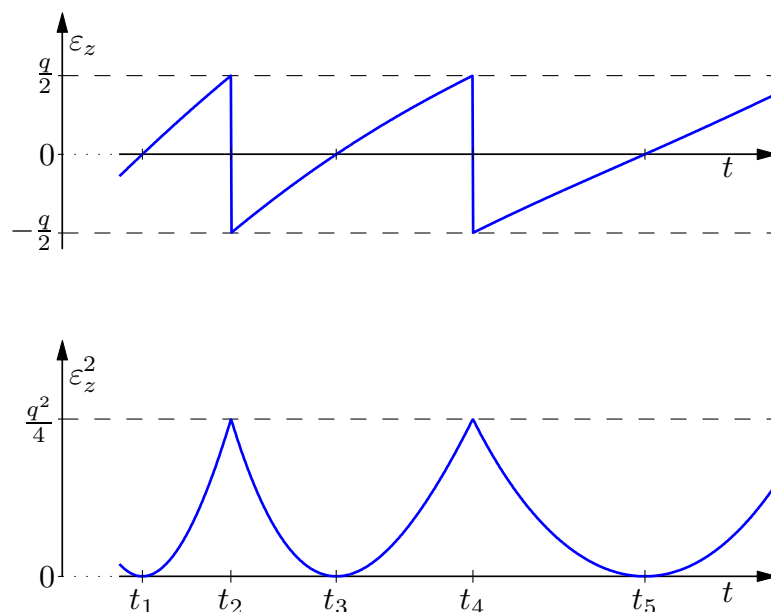
Če frekvenca vzorčenja ni dovolj velika, se pojavi fenomen zgibanja frekvenc ali prestavitve frekvenc (angl. *aliasing*). Vzemimo primer: če vzorčimo signal, ki vsebuje frekvence od 0 do 5 kHz, s frekvenco vzorčenja 6 kHz, ki je seveda prenizka, in poskušamo rekonstruirati signal, se frekvence nad 3 kHz prestavijo (5 kHz v 1 kHz; 4,5 kHz v 1,5 kHz; 4 kHz v 2 kHz, itd.), kar vodi k nepopravljivi popačenosti signala. Primer tega fenomena je »efekt kolesa prerijske kočije«, ki je znan iz filmov o divjem zahodu. Ker ustreza vsaka sličica filma diskretnemu vzorcu, se kolo navidezno vrti nazaj oz. zelo počasi naprej, če je kot zasuka kolesa prevelik glede na hitrost snemanja. Ilustrirajmo ta pojav z nekaj slikami. Zaradi nazornosti predpostavimo, da ima kolo eno samo prečko. Če je frekvenca vrtenja kolesa manjša od polovice frekvence snemanja (vzorčenja), dobimo nepopačeno sliko o vrtenju kolesa (slika 2.5). V primeru, ko je frekvenca vrtenja kolesa večja od polovice frekvence vzorčenja (slika 2.6 zgoraj), pa se nam zdi, da se kolo vrti nazaj (slika 2.6 spodaj). Če je frekvenca vrtenja kolesa enaka frekvenci vzorčenja (slika 2.7 zgoraj), imamo občutek, da kolo stoji (slika 2.7 spodaj). V resnici ima kolo večje število prečk, zato se slika ponovi že pri ustrezno manjšem kotu zasuka kolesa, napačno predstavo o vrtenju kolesa pa dobimo že pri ustrezno manjši frekvenci vrtenja kolesa.



Slika 2.6: Zaporedje slik kolesa pri frekvenci vrtenja, ki je večja od $\frac{f_s}{2}$
 (zgoraj – ilustracija dejanske smeri vrtenja kolesa,
 spodaj – ilustracija navidezne smeri vrtenja)



Slika 2.7: Zaporedje slik kolesa pri frekvenci vrtenja, ki je enaka f_s
 (zgoraj – ilustracija dejanske smeri vrtenja kolesa,
 spodaj – ilustracija navidezne smeri vrtenja)



Slika 2.8: Potek kvantizacijskega pogreška $\varepsilon_z(t)$ in njegovega kvadrata $\varepsilon_z^2(t)$ za primer s slike 2.2

2.2.2 Kvantizacija po amplitudi

Pogrešek zaradi kvantizacije po amplitudi lahko poljubno zmanjšamo s povečanjem števila bitov A/D pretvornika. V praksi seveda obstaja zgornja meja števila bitov, zato obstaja tudi t.i. *šum kvantizacije*. Naj bosta E_{max} in E_{min} maksimalna oz. minimalna vrednost signala in q resolucija A/D pretvornika, t.j. razdalja med dvema sosednjima standardnima nivojema. Z uporabo prej definiranih n in m lahko zapišemo

$$q = \frac{E_{max} - E_{min}}{2^n} = \frac{E_{max} - E_{min}}{m} \quad (2.1)$$

Raziščimo sedaj vpliv resolucije A/D pretvornika na šum kvantizacije. Najprej definirajmo kvantizacijski pogrešek $\varepsilon_z(t)$ kot razliko med analognim signalom in kvantiziranim analognim signalom. Potek kvantizacijskega pogreška za primer na sliki 2.2 ob upoštevanju $q = E_{i+2} - E_{i+1} = E_{i+1} - E_i$ prikazuje zgornji graf na sliki 2.8. Vidimo, da se kvantizacijski pogrešek $\varepsilon_z(t)$ povečuje do maksimalne vrednosti $\frac{q}{2}$, preskoči na minimalno vrednost $-\frac{q}{2}$ in se spet povečuje proti $\frac{q}{2}$, kasneje pa se takšen potek ponavlja. Opazimo lahko, da je časovni potek signala na vsakem od intervalov $[t_i, t_{i+1}]$ približno linearen, hkrati pa vidimo, da je srednja vrednost signala približno enaka 0. Ker nas zanima moč kvantizacijskega pogreška, bomo v nadaljevanju predpostavili, da je potek kvantizacijskega pogreška na vsakem od

intervalov $[t_i, t_{i+1}]$ linearen. Ob upoštevanju te predpostavke iščemo srednjo kvadratično vrednost oz. varianco, ki je direktno proporcionalna moči šuma. Kvadrat kvantizacijskega pogreška $\varepsilon_z^2(t)$ prikazuje spodnji graf na sliki 2.8. Ker je srednja kvadratična vrednost $\varepsilon_z^2(t)$ na vseh intervalih $[t_i, t_{i+1}]$ zaradi omenjene predpostavke enaka, jo izračunajmo na intervalu $[t_1, t_2]$, na katerem imata funkciji $\varepsilon_z(t)$ in $\varepsilon_z^2(t)$ naslednji matematični zapis:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z(t) &= \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{q}{2} \quad t \in [t_1, t_2] \\ \varepsilon_z^2(t) &= \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{q}{2} \right)^2 \quad t \in [t_1, t_2]\end{aligned}\tag{2.2}$$

Sedaj lahko izračunamo varianco

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_z^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{q}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{q^2}{4(t_2 - t_1)^3} \int_{t_1}^{t_2} (t - t_1)^2 dt = \frac{q^2}{4(t_2 - t_1)^3} \frac{(t - t_1)^3}{3} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{q^2}{12}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Opazimo lahko, da je rezultat odvisen samo od resolucije A/D pretvornika, ne pa od dolžine signala oz. strmine kvantizacijskega pogreška na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$. Kvadratni koren srednjekvadratične vrednosti (standardna deviacija) pa je

$$\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}\tag{2.4}$$

to je $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -kratna vrednost maksimalnega pogreška kvantizacije.

Zaključek

Glede na predhodno analizo lahko zaključimo, da pri vzorčenju ne izgubimo nobene informacije, če izberemo dovolj visoko frekvenco vzorčenja, z izbiro zadostnega števila bitov A/D pretvornika pa lahko zmanjšamo pogrešek kvantizacije na poljubno nizek nivo. Ta koncept nam dopušča predstavitev časovno zveznega signala v obliki vrste diskretnih binarnih števil, ki jih lahko obdelujemo direktno z digitalnimi vezji.

Poglavje 3

Obravnava diskretnih in vzorčenih signalov

V tem poglavju bomo vpeljali koncepta diskretnih in vzorčenih signalov. Ta pristop nam bo omogočil določiti zvezo med prostoroma časovno zveznih signalov in časovno diskretnih oz. digitalnih signalov. Matematična orodja, ki jih bomo potrebovali, bodo različne oblike Fourierove transformacije, z -transformacija in inverzna z -transformacija. Zanimali nas bodo tudi teoretični in praktični vidiki rekonstrukcije zveznega signala iz vzorčenega signala.

3.1 Obravnava zveznih signalov v frekvenčnem prostoru

V tem poglavju bo ena glavnih tem frekvenčna analiza diskretnih signalov, zato se za uvod spomnimo frekvenčne analize zveznih signalov.

3.1.1 Fourierova vrsta

Prikažimo najprej nekaj osnovnih zvez Fourierove vrste. Zvezno periodično funkcijo s periodo T , ki zadošča določenim omejitvam (ki pa običajno v inženirski praksi ne predstavljajo nobenih ovir) lahko zapišemo v obliki neskončne vsote

harmoničnih izrazov

$$x_z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_1 t} \quad (3.1)$$

kjer so koeficienti c_m podani z izrazom

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_z(t) e^{-jm\omega_1 t} dt \quad (3.2)$$

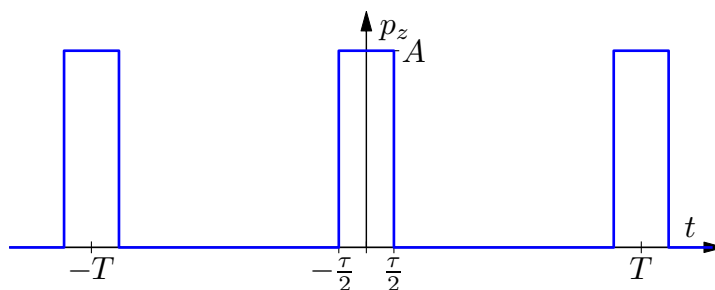
Pri tem pomenijo:

- T je perioda funkcije,
- $f_1 = \frac{1}{T}$ je osnovna ciklična frekvenca,
- $\omega_1 = 2\pi f_1$ je osnovna krožna frekvenca in
- m je celo število, ki definira red harmoničnega izraza.

Koeficienti c_m so v splošnem kompleksna števila, zato jih lahko zapišemo v naslednji obliki

$$c_m = |c_m| e^{j\phi_m} \quad (3.3)$$

pri čemer serijo koeficientov c_m imenujemo frekvenčni spekter danega periodičnega signala, serija $|c_m|$ predstavlja amplitudni spekter, serija $\phi_m = \angle c_m$ pa fazni spekter. **Bistvena značilnost frekvenčnega spektra periodične funkcije je njegova frekvenčna diskretnost**, saj vsebuje le enosmerno komponento, komponento osnovne frekvence f_1 (prvo harmonsko komponento) in komponente celoštevilčnih mnogokratnikov osnovne frekvence (višje harmonske komponente).



Slika 3.1: Vlak pulzov

 **Primer 3.1**

Določite frekvenčni spekter vlaka pulzov, ki ga prikazuje slika 3.1.

Izračunati moramo serijo koeficientov c_m za ta primer:

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jm\omega_1 t} dt = \frac{A}{-jm\omega_1 T} e^{-jm\omega_1 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = Ad \frac{\sin m\pi d}{m\pi d} \quad (3.4)$$

kjer je $d = \frac{\tau}{T}$ ter smo upoštevali $\omega_1 T = 2\pi f_1 T = 2\pi$ in definicijo sinusne funkcije s kompleksnimi števili

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (3.5)$$

Vsi koeficienti c_m so realni. Slika 3.2 prikazuje frekvenčni spekter vlaka pulzov, kjer smo z negativno amplitudo prikazali komponente s fazo -180° . Potrebno je poudariti, da je serija koeficientov c_m seveda parametrirana po parametru m , vendar pa so koeficienti na sliki 3.2 prikazani v odvisnosti od frekvence f , s čimer želimo poudariti, da vsak koeficient c_m predstavlja amplitudo harmoničnega signala s frekvenco $m\frac{1}{T}$. Z upoštevanjem enačb

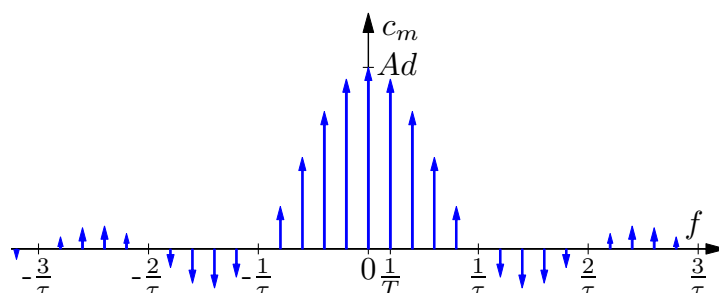
$$\begin{aligned} f &= m\frac{1}{T} \\ d &= \frac{\tau}{T} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ugotovimo, da je $md = f\tau$, tako da lahko c_m v izrazu (3.4) zapišemo v odvisnosti od frekvence f :

$$c_m = Ad \frac{\sin f\pi\tau}{f\pi\tau} \Big|_{f=m\frac{1}{T}} \quad (3.7)$$

kjer smo poudarili, da enačba velja le pri frekvencah, ki so večkratniki osnovne harmonske frekvence.

V teoriji obdelave signalov zelo pogosto naletimo na funkcijo, ki ima v števcu sinus nekega argumenta, v imenovalcu pa ta isti argument. Taki funkciji rečemo kardinalni sinus (angl. *cardinal sine*). Izvirna definicija funkcije izhaja iz mate-

Slika 3.2: Frekvenčni spekter vlaka pulzov za $d = \frac{1}{5}$

matične literature:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Tej funkciji rečemo tudi nenormirani kardinalni sinus (angl. *unnormalized sinc function*). Na področju inženirstva in še posebej obdelave signalov pa se uporablja druga definicija za kardinalni sinus:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

ki mu rečemo tudi normirani kardinalni sinus (angl. *normalized sinc function*). V programskem paketu MATLAB je implementirana slednja definicija, držali pa se je bomo tudi v tem učbeniku. Pomembno dejstvo je, da je funkcija $\text{sinc}(x)$ povsod analitična (pri $x = 0$ pride do krajsanja pola in ničle). Z upoštevanjem definicije normiranega kardinalnega sinusa (3.9) lahko koeficiente Fourierove vrste (3.4) oz. (3.7) zapišemo v bolj kompaktni obliki:

$$c_m = Ad \text{sinc}(md) = Ad \text{sinc}(f\tau) \Big|_{f=m\frac{1}{T}} \quad (3.10)$$

3.1.2 Fourierova transformacija

V prejšnjem poglavju smo določili spekter periodičnega signala, v tem poglavju pa bomo podali nekaj osnov Fourierove transformacije, ki omogoča določitev spektra neperiodičnega signala. Omejili se bomo na signale, ki vsebujejo končno energijo. V tem primeru lahko zapišemo Fourierovo transformacijo zveznega signala $x_z(t)$ v naslednji obliki

$$X_z(f) = \mathcal{F}\{x_z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.11)$$

Fourierova transformacija $\mathcal{F}\{\cdot\}$ je linearni operator, ki operira nad časovno zveznim (in običajno realnim) signalom $x_z(t)$ in daje kot rezultat kompleksno funkcijo $X_z(f)$, ki jo včasih imenujemo tudi Fourierova transformiranka. Ena od oblik zapisa Fourierove transformacije je tudi naslednja:

$$x_z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_z(f) \quad (3.12)$$

Pripadajoča inverzna Fourierova transformacija, ki transformira signal iz frekvenčnega prostora nazaj v časovni prostor se glasi

$$x_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_z(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.13)$$

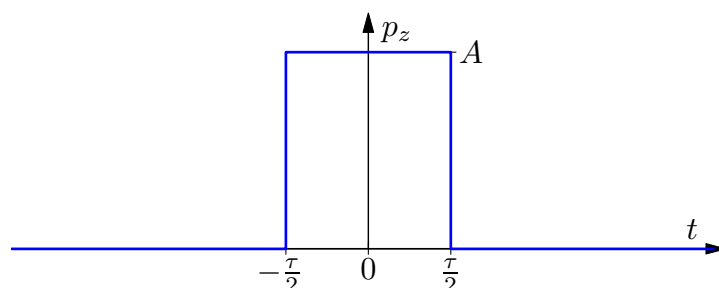
Frekvenčni spekter neperiodične funkcije je v splošnem kompleksen, zato lahko zapišemo

$$X_z(f) = |X_z(f)| e^{j\phi_z(f)} \quad (3.14)$$

Bistvena značilnost frekvenčnega spektra neperiodične zvezne funkcije je njegova zveznost, saj vsebuje v območju, kjer je različen od 0, komponente vseh frekvenc. Tabela 3.1 podaja nekaj osnovnih lastnosti Fourierove transformacije.

Tabela 3.1: Osnovne lastnosti Fourierove transformacije

	$x_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f)$
	$y_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$Y_z(f)$
linearnost	$ax_z(t) + by_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$aX_z(f) + bY_z(f)$
odvajanje	$\frac{d^n x_z(t)}{dt^n}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$(j2\pi f)^n X_z(f)$
integriranje	$\int_{-\infty}^t x_z(\tau) d\tau$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{X_z(f)}{j2\pi f}$
zakasnitev	$x_z(t - a)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$e^{-j2\pi fa} X_z(f)$
modulacija	$e^{j2\pi f_0 t} x_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f - f_0)$
skaliranje	$x_z(at)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{1}{a} X_z\left(\frac{f}{a}\right)$
konvolucija	$\int_{-\infty}^{\infty} x_z(\tau) y_z(t - \tau) d\tau$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f) Y_z(f)$
množenje	$x_z(t) y_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\int_{-\infty}^{\infty} X_z(\varphi) Y_z(f - \varphi) d\varphi$
dualnost	$X_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$x_z(-f)$



Slika 3.3: Neperiodični pulz

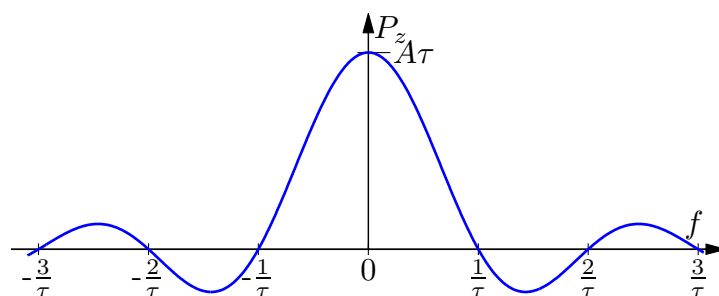
**Primer 3.2**

Določite Fourierovo transformacijo neperiodičnega pulza, ki ga prikazuje slika 3.3.

Z uporabo formule (3.11) izračunamo Fourierovo transformacijo signala $p_z(t)$:

$$P_z(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau) \quad (3.15)$$

kjer smo upoštevali definicijo funkcije sinc (3.9). Ker je funkcija $p_z(t)$ soda funkcija, je njena Fourierova transformacija realna funkcija. Slika 3.4 prikazuje frekvenčni spekter neperiodičnega pulza. Negativna amplituda pomeni zopet fazo signala -180° .



Slika 3.4: Frekvenčni spekter neperiodičnega pulza

3.2 Diskretni signali

Signali predstavljajo pomemben koncept sistemske teorije. Z njimi predstavimo časovni potek neke veličine. V naravi so praktično vsi signali zvezni – tako po amplitudi kot tudi po času. Pojem *diskretni signal* (včasih ga imenujemo tudi *časovno diskretni signal*) je povezan s diskretizacijo neodvisne spremenljivke signala. Gre torej za odvisno spremenljivko, ki je definirana le v diskretnih točkah pripadajoče neodvisne spremenljivke. Pri uporabi v vodenju diskretne signale običajno dobimo z vzorčenjem zveznih signalov, čeprav to v splošnem ni nujno. Diskretne signale lahko namreč generira poljubni diskretni proces (npr. matematični algoritem), pri čemer neodvisna spremenljivka ni nujno čas, ampak poljubna veličina.

Diskretni signal si lahko predstavljamo kot neskončno zaporedje števil. Signal ima poljubno ime, ki ga običajno pišemo z malo začetnico. Neodvisna spremenljivka, ki jo običajno označujemo s k , lahko zavzame poljubno celo število. Primer diskretnega signala je $x(k)$:

$$x(k) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\} \quad (3.16)$$

Pri zapisu v enačbi (3.16) je potrebno opozoriti na dve pomanjkljivosti:

- Iz zapisa ni lepo razvidno, kateri vrednosti neodvisne spremenljivke k pripada določeni element. Običajno se signali sicer začnejo pri $k = 0$, ni pa nujno. Nekateri avtorji to rešujejo tako, da pod elementom pri $k = 0$ narišejo puščico:

$$x(k) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \} \quad (3.17)$$

- Ker je zaporedje v enačbi (3.16) predstavljeno kot neskončno zaporedje, je nemogoče enolično določiti nadaljevanje. Četudi se nam zdi, da lahko kakšno enostavno zaporedje predstavimo le z nekaj členi, je mogoče določiti neskončno bolj kompleksnih zaporedij, ki imajo enak začetni del.

Zgornji težavi odpravimo, če člen zaporedja zapišemo analitično. To pomeni, da diskretni signal napišemo kot matematično funkcijo celoštevilskega argumenta k . Za primer iz enačbe (3.16) bi torej zapisali:

$$x(k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & k = 2l, l \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & k = 2l + 1, l \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

kjer \mathbb{N}_0 označuje množico pozitivnih celih števil, ki vključuje tudi element 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ (\mathbb{Z}^+ je množica pozitivnih celih števil). Obravnavani signal je mogoče zapisati na še bolj kompakten način:

$$x(k) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (3.19)$$

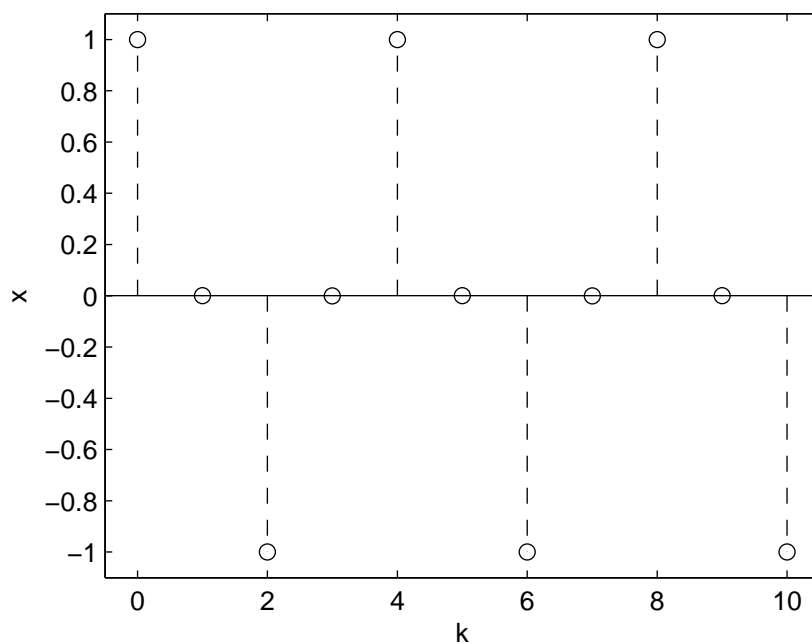
V programskem paketu MATLAB je risanju diskretnih signalov namenjena funkcija `stem`. Tako bi lahko obravnavani signal narisali z naslednjim zaporedjem ukazov:

```

k = 0:10; % signal izrisujemo na intervalu [0,10]
x = cos(k * pi/2);
stem(k,x,'--o')
axis([-0.5 10.5 -1.1 1.1]) %spremenimo mejne vrednosti koordinatnih osi
xlabel('k')
ylabel('x')

```

Rezultat zgornje kode je prikazan na sliki 3.5. Funkcija `stem` ima podobne parametre kot funkcija `plot` za risanje zveznih signalov.



Slika 3.5: Izris diskretnega signala iz enačbe 3.19 z MATLAB-ovo funkcijo `stem`

3.3 Vzorčeni signali

Vzorčeni signali predstavljajo zvezo med časovno zveznimi signali in časovno diskretnimi oz. digitalnimi signali. V nadaljevanju bomo ločili pojma vzorčeni signal in vzorčeni diskretni signal. Pojem *vzorčeni signal* opisuje časovno zvezni signal, sestavljen iz vlaka pulzov, informacija o amplitudi originalnega signala pa je shranjena bodisi v amplitudi bodisi v ploščini teh pulzov. Tovrstna oblika vzorčenih signalov (označujemo jih z zvezdico, npr. $x^*(t)$) je pomembna pri teoretični analizi in izpeljavi enačb, iz praktičnega vidika pa je manj uporabna. Pojem *vzorčeni diskretni signal* opisuje časovno diskretni signal oz. zaporedje vzorcev (npr. $x(k)$), ki smo ga dobili z vzorčenjem časovno zveznega signala (npr. $x_z(t)$), pri čemer sta amplituda zveznega signala v trenutku vzorčenja in amplituda pripadajočega vzorca enaki. Tovrstna oblika zapisa je izredno uporabna za obdelavo z digitalnim računalnikom.

3.3.1 Vzorčenje signalov s pulzi končne širine

Vzorčeni signal dobimo z vzorčenjem časovno zveznega signala v časovnih intervalih s periodo T , kar prikazuje slika 3.6. Frekvenco vzorčenja definiramo z izrazom

$$f_s = \frac{1}{T} \quad (3.20)$$

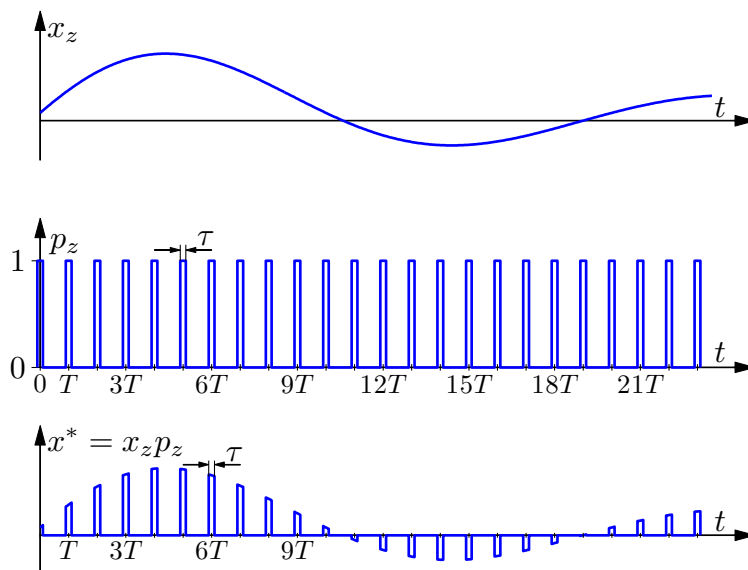
Vzorčimo tako, da množimo zvezni signal $x_z(t)$ z vlakom pulzov $p_z(t)$ (periodični signal s periodo T in trajanjem impulzov τ). Rezultirajoči signal tako sestoji iz serije relativno ozkih pulzov, katerih amplituda je modulirana z originalnim časovno zveznim signalom. To vrsto vzorčenih signalov imenujemo pulzno amplitudno modulirani signal. Označimo z $x^*(t)$ vzorčeni signal in z $x_z(t)$ originalni časovno zvezni signal. Vzorčeni signal $x^*(t)$ lahko smatramo kot produkt $x_z(t)$ in hipotetičnega vlaka pulzov $p_z(t)$

$$x^*(t) = x_z(t)p_z(t) \quad (3.21)$$

Izrazimo $p_z(t)$ v obliki Fourierove vrste

$$p_z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_s t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm2\pi f_s t} \quad (3.22)$$

kjer je $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ krožna frekvenca vzorčenja. Koefficienti c_m imajo frekvenčni potek v obliki $Ad \operatorname{sinc}(md)$ (glej primer 3.1). Z uvrstitvijo enačbe (3.22)



Slika 3.6: Ilustracija vzorčenja z vlakom pulzov končne širine

v (3.21) dobimo

$$x^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m x_z(t) e^{jm\omega_s t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m x_z(t) e^{jm2\pi f_s t} \quad (3.23)$$

Frekvenčni spekter vzorčenega signala dobimo s Fourierovo transformacijo te enačbe. Vsak sumand desne strani izraza lahko transformiramo s pomočjo lastnosti modulacije iz tabele 3.1:

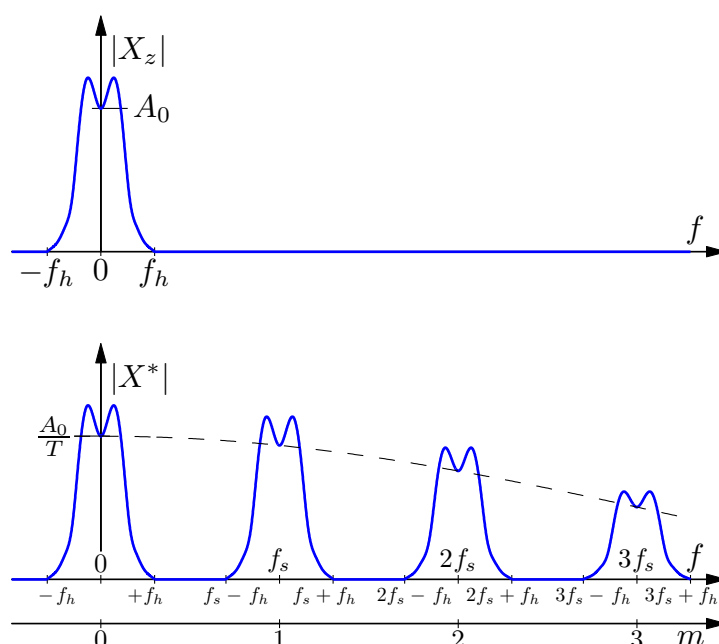
$$e^{j2\pi f_0 t} x_z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_z(f - f_0) \quad (3.24)$$

Tako dobimo

$$X^*(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m X_z(f - mf_s) \quad (3.25)$$

Glede na enačbo (3.25) frekvenčni spekter vzorčenega signala sestoji iz spektra originalnega signala (pomnoženega s c_0) in iz neskončnega števila za vrednost frekvence vzorčenja in njenih mnogokratnikov premaknjenih kopij originalnega spektra (pomnoženih s c_m , $m \neq 0$). Iz primera 3.1 oz. slike 3.2 vidimo, da gre c_m z naraščanjem m proti 0, zato komponente z višanjem frekvence počasi izginjajo. Po drugi strani je pomembno, kakšna je povezava med amplitudama spektrov $X_z(f)$ in $X^*(f)$ pri nizkih frekvencah. Iz primera 3.1 vemo, da je $c_0 = Ad = \frac{A\tau}{T}$. Če izberemo vlak pulzov tako, da je ploščina pod posameznimi pulzi enaka 1 ($A\tau = 1$) in se kopije spektrov med seboj ne prekrivajo, velja:

$$X^*(f) = \frac{1}{T} X_z(f) \quad |f| < \frac{f_s}{2} \quad (3.26)$$



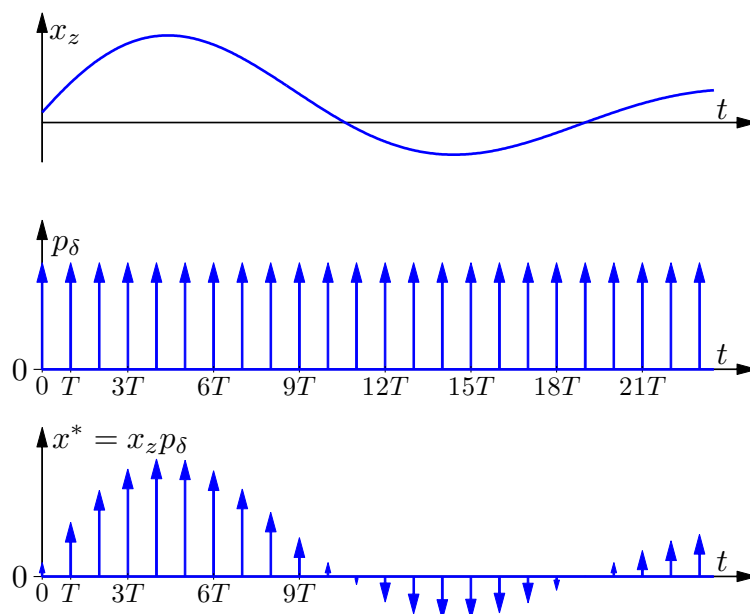
Slika 3.7: Frekvenčni spekter vzorčenega signala (vzorčenje z vlakom pulzov končne širine in ploščine 1) – zgornja slika prikazuje spekter originalnega signala, spodnja pa spekter vzorčenega signala

Predpostavimo, da je frekvenčni spekter originalnega signala frekvenčno omejen, kjer je f_h najvišja frekvenca v signalu. Tipični potek $X_z(f)$ in $X^*(f)$ prikazuje slika 3.7, kjer je prikazan le majhen del negativnega frekvenčnega območja $X^*(f)$. Črtkana črta prikazuje ovojnico, ki je glede na rezultat primera 3.1 in enačbo (3.25) enaka $\frac{1}{T} \frac{\sin m\pi d}{m\pi d} = \frac{1}{T} \text{sinc}(md)$.

3.3.2 Idealno impulzno vzorčenje

V prejšnjem razdelku smo vzorčili signale z vlakom pulzov končne širine. Vzemimo sedaj limitni primer, ko gre širina pulzov proti 0, njihova amplituda pa proti neskončnosti, hkrati pa ohranimo ploščino pod impulzi enako 1. Tako dobimo idealno impulzno vzorčenje, ki ga ilustrira slika 3.8, kjer dolžina in smer puščice predstavljata ploščino pod impulzom, ki je seveda lahko tudi negativna, če je vrednost signala ob trenutku vzorčenja negativna.

Če zopet označimo vzorčeni signal z $x^*(t)$ in originalni časovno zvezni signal z



Slika 3.8: Ilustracija idealnega impulznega vzorčenja

$x_z(t)$, lahko s pomočjo vlaka impulzov

$$p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.27)$$

zapišemo vzorčeni signal v naslednji obliki

$$x^*(t) = x_z(t)p_\delta(t) = x_z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.28)$$

Edine vrednosti $x_z(t)$, ki vplivajo na rezultat so tiste, katerih argument je $t = kT$. Zato lahko zapišemo alternativno obliko enačbe (3.28):

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)\delta(t - kT) \quad (3.29)$$

Obe obliki bomo potrebovali kasneje. Iz prve bomo razvili spektralne lastnosti vzorčenega signala, druga pa interpretira vzorčeni signal kot serijo enakomerno oddaljenih impulzov, katerih uteži predstavljajo vrednosti originalnega signala v trenutkih vzorčenja.

Čeprav ne more analogni vzorec katerega koli vzorčenega signala, ki ga dobimo direktno iz časovno zveznega signala, nikoli doseči ekstremne vrednosti širine ($\tau = 0$), ima ta koncept dve bistveni prednosti:

- Če je širina pulza majhna glede na časovne konstante sistema, predstavlja impulzno vzorčenje dobro aproksimacijo in vodi k enostavnejši analizi.
- Če analogni signal vzorčimo in pretvorimo v digitalno obliko, ga lahko smatramo kot število, ki se pojavi v določenem časovnem trenutku. Zaporedje števil, ki se pojavi v računalniku, lahko predstavlja z matematičnega stališča uteži vlaka impulzov. Ta koncept je zelo važen in ga bomo uporabljali pri nadaljnji obravnavi digitalnih signalov.

Frekvenčni spekter vzorčenega signala dobimo s pomočjo predstavitve vlaka impulzov $p_\delta(t)$ v obliki Fourierove vrste

$$p_\delta(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jm2\pi f_s t} \quad (3.30)$$

kjer smo upoštevali

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jm2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T} e^{-jm2\pi f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3.31)$$

Z upoštevanjem enačb (3.28) in (3.30) dobimo

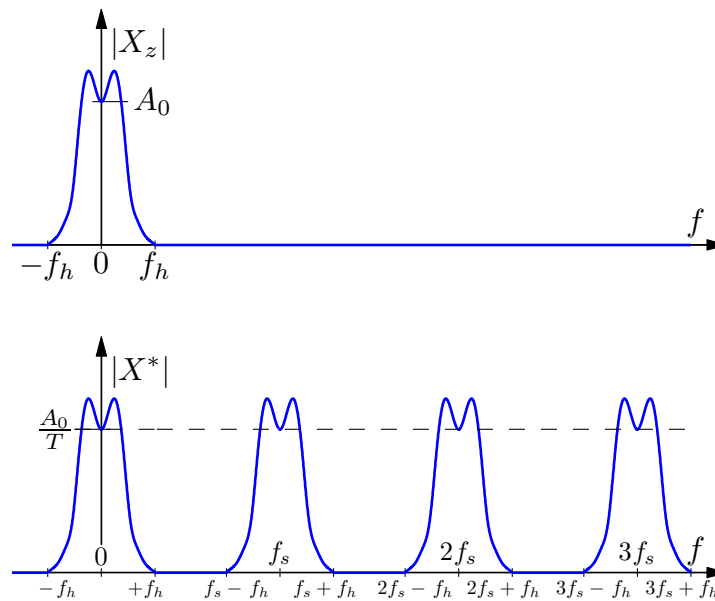
$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{jm2\pi f_s t} \quad (3.32)$$

in s Fourierovo transformacijo te enačbe ter upoštevanjem (3.24) še

$$X^*(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_z(f - mf_s) \quad (3.33)$$

Slika 3.9 prikazuje tipični potek $X_z(f)$ in $X^*(f)$ pri idealnem impulznem vzorčenju. Spet lahko opazimo, da velja pri nizkih frekvencah relacija (3.26), ker smo vzorčili z impulzi ploščine 1. Edina razlika med spektroma pri idealnem in neidealnem vzorčenju je ta, da spektralne komponente pri neidealnem vzorčenju z višanjem frekvence izginjajo, pri idealnem vzorčenju pa ostajajo konstantne.

Iz slike 3.9 oz. enačbe (3.33) lahko vidimo, da frekvenčni spekter vzorčenega signala ni direktna preslikava frekvenčnega spektra originalnega signala v neskončno število premeščenih verzij. Posamezni frekvenčni spektri vzorčenega signala so frekvenčnemu spektru originalnega signala le proporcionalni preko konstante $\frac{1}{T}$. Zato mora imeti nizkoprepustni filter, s katerim želimo rekonstruirati



Slika 3.9: Frekvenčna spektra originalnega (zgoraj) in vzorčenega signala (spodaj) pri idealnem impulznem vzorčenju

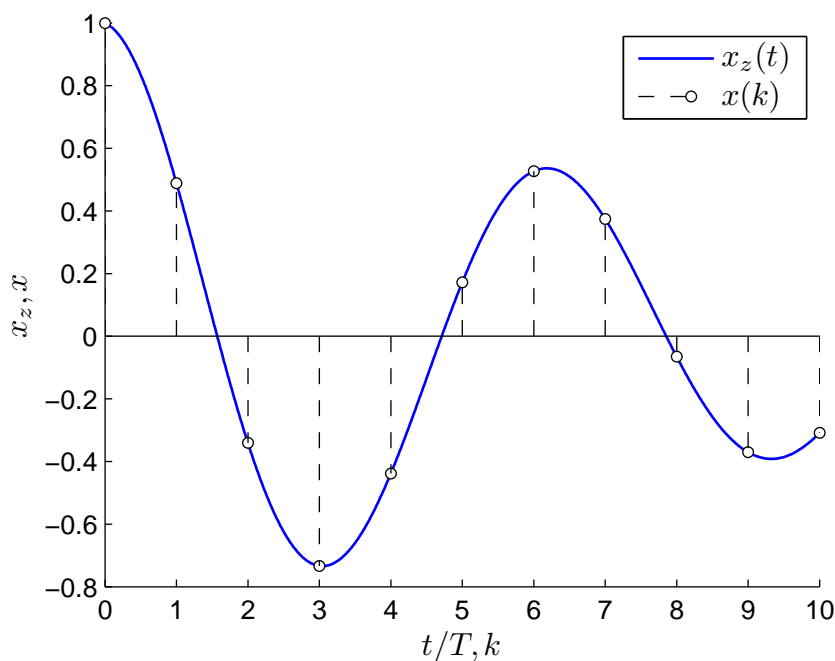
signal, ojačenje enosmernih komponent enako T . Amplitudni spekter signala se pri procesu vzorčenja množi z $\frac{1}{T}$, pri rekonstrukciji pa se amplitudni spekter »popravi« z množenjem s T .

Bistveni zaključek tega razdelka je, da je spekter impulzno vzorčenega signala periodična funkcija frekvence. Perioda v frekvenčnem prostoru je enaka frekvenci vzorčenja f_s . Vzorčenje v časovnem prostoru vodi torej do periodičnosti funkcije v frekvenčnem prostoru.

3.3.3 Vzorčeni diskretni signali

V splošnem ni nujno, da je diskretni signal dobljen z vzorčenjem zveznega signala, čeprav pri sistemih digitalnega vodenja to običajno drži. V razdelkih 3.3.1 in 3.3.2 smo obravnavali koncept vzorčenja z matematičnega vidika. Spomnimo se enačbe (3.29), ki pravi, da se v procesu vzorčenja zveznega signala $x_z(t)$ v vzorčeni signal $x^*(t)$ prenese zgolj informacijo o vrednosti zveznega signala v trenutkih vzorčenja – takrat je zvezni čas t enak večkratniku periode vzorčenja T . Vzorčeni diskretni signal $x(k)$ dobimo torej tako, da v zveznem signalu nadomestimo neodvisno spremenljivko t s kT :

$$x(k) = x_z(t)|_{t=kT} = x_z(kT) \quad (3.34)$$

Slika 3.10: Zvezni signal $x_z(t)$ in vzorčeni signal $x(k) = x_z(kT)$

Slika 3.10 prikazuje primer zveznega signala $x_z(t)$. Na sliki je prikazan tudi vzorčeni diskretni signal $x(k) = x_z(kT)$.



Primer 3.3

Obravnavamo zvezni signal:

$$x_z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t + 1 & 0 \leq t < 8 \\ 0 & t \geq 8 \end{cases} \quad (3.35)$$

Določite vzorčeni signal $x^*(t)$ in vzorčeni diskretni signal $x(k)$, če je perioda vzorčenja enaka 2.

Vzorčeni signal $x^*(t)$ dobimo z upoštevanjem enačbe (3.29):

$$x^*(t) = \delta(t) + 3\delta(t - 2) + 5\delta(t - 4) + 7\delta(t - 6) \quad (3.36)$$

Vzorčeni diskretni signal $x(k)$ pa dobimo z upoštevanjem enačbe (3.34):

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 2k + 1 & 0 \leq k < 4 \\ 0 & k \geq 4 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.37)$$

Primer 3.3 je odprl še eno vprašanje. Kako je z vzorčenjem nezveznih signalov? Problem seveda predstavljajo vzorci, ki nastopijo v trenutku nezveznosti signala. V enačbi (3.35) je navedeno, kakšni sta vrednosti $x_z(0)$ in $x_z(8)$. Če vrednost signala v trenutku nezveznosti ni eksplicitno podana ali pa je signal podan v grafični obliki, načeloma pri diskretizaciji upoštevamo pravilo desne limite, kar pomeni:

$$x(k) = \lim_{t \rightarrow (kT)^+} x_z(t) \quad (3.38)$$

kjer znak $+$ nakazuje, da izračunamo limito, ko se t približuje kT z desne.

3.4 Rekonstrukcija zveznega signala iz vzorcev

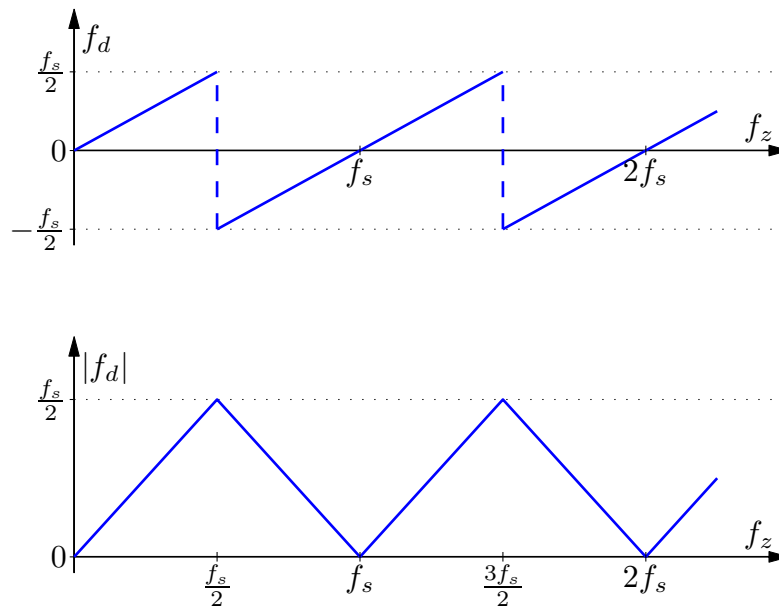
Pri vzorčenih signalih ne gre prezreti dejstva, da se večino informacije na prvi pogled izgubi. Diskretni signal nosi informacijo le o vrednosti zveznega signala v trenutkih vzorčenja, ves interval med trenutki vzorčenja pa je prezrt. Če pa je zvezni signal frekvenčno omejen, nam teorem o vzorčenju zagotavlja rekonstrukcijo signala, če so izpolnjeni nekateri pogoji.

3.4.1 Teorem o vzorčenju

Še enkrat se spomnimo slik 3.7 in 3.9, kjer smo obravnavali vzorčenje frekvenčno omejenega zveznega signala. Da bi lahko rekonstruirali originalni signal iz vzorčenega, se posamezne komponente spektrov ne smejo prekrivati, kar vodi do zahteve, da mora biti frekvenca vzorčenja več kot dvakrat višja od najvišje frekvence originalnega signala

$$f_s > 2f_h \quad (3.39)$$

Če bi v neenačbi (3.39) dopustili enakost, potem bi se posamezni deli spektra $X^*(f)$ na slikah 3.7 in 3.9 dotikali in ne bi mogli rekonstruirati frekvenčne vsebine pri frekvenci f_h (in vseh frekvencah, ki se od nje razlikujejo za celi mnogokratnik frekvence vzorčenja). Če pa je izpolnjen pogoj (3.39), je mogoče originalni



Slika 3.11: Vpliv vzorčenja na zgibanje – povezava med frekvenco zveznega signala f_z in pripadajočo osnovno frekvenco vzorčenega diskretnega signala f_d

signal rekonstruirati tako, da ohranimo le osnovni del spektra signala na sliki 3.7 (ali 3.9), medtem ko moramo vse preslikane dele pri višjih frekvencah odstraniti s filtrom. Originalni signal glede na sliko 3.7 (ali 3.9) torej dobimo iz vzorčenega s pomočjo nizkoprepustnega filtra, ki ima mejno frekvenco nekje med f_h in $f_s - f_h$. Ker idealnih filtrov ni (vsi praktični filtri imajo končno hiter prehod iz frekvenčnega področja, kjer prepuščajo, v frekvenčno področje, kjer ne prepuščajo), je potrebna večja rezerva med f_h in $f_s - f_h$. Razlika med omenjenima frekvencama znaša $(f_s - f_h) - f_h = f_s - 2f_h$ in jo lahko pri signalu z dano frekvenco f_h povišamo le z zvišanjem frekvence vzorčenja f_s .

Definirajmo še nekaj osnovnih pojmov vzorčenja:

Zgibanje (angl. *aliasing*) je pojav, ko se več različnih frekvenc zveznega signala v procesu vzorčenja preslika v eno frekvenco vzorčenega signala. Do tega pride zaradi neustrezno izbrane frekvence vzorčenja. Pri vzorčenju različnih zveznih signalov lahko dobimo enak vzorčeni signal in po vzorčenju ni mogoče določiti originalnega signala. Povezavo med frekvenco originalnega zveznega signala in frekvenco signala po vzorčenju prikazuje slika 3.11.

Frekvenca zgibanja ali Nyquistova frekvenca (angl. *Nyquist frequency*) je definirana kot polovica frekvence vzorčenja ($f_0 = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$). **Nyquistova frekvenca je lastnost sistema vzorčenja.** Če ima namreč sistem

vzorčenja določeno Nyquistovo frekvenco f_0 , lahko teoretično iz vzorčenega signala v popolnosti rekonstruiramo vsak originalni signal, ki je frekvenčno omejen s frekvenco f_h , nižjo od f_0 . Če zvezni signal vsebuje tudi frekvence, višje ali enake f_0 , pride do zgibanja oz. navidezne premaknitve frekvenc navzdol. Iz tako vzorčenega signala originalnega signala ni mogoče rekonstruirati z nobenim filtrom.

Nyquistova hitrost (angl. *Nyquist rate*) je enaka dvakratni vrednosti najvišje frekvence v zveznem signalu ($2f_h$). **Nyquistova hitrost je lastnost frekvenčno omejenega signala.** Zvezni signal z določeno Nyquistovo hitrostjo lahko teoretično rekonstruiramo iz vzorčenega signala, če je frekvenca vzorčenja višja od Nyquistove hitrosti signala.



Primer 3.4

Dan je časovno zvezni signal

$$y_z(t) = \sin 2\pi f_z t \quad (3.40)$$

Če ta zvezni signal vzorčimo s periodo vzorčenja T , dobimo naslednji vzorčeni diskretni signal

$$y_d(k) = \sin 2\pi f_z kT \quad (3.41)$$

Vemo, da zaradi efekta zgibanja obstaja neskončno mnogo frekvenc f_z , pri katerih dobimo enako zaporedje vzorcev $y_d(k)$. V tej množici frekvenc iščemo tisto (označimo jo s f_d), ki je po absolutni vrednosti najmanjša. Frekvenco f_d lahko interpretiramo kot osnovno frekvenco diskretnega signala. Grafično prikažite povezavo med frekvenco zveznega signala f_z in pripadajočo osnovno frekvenco vzorčenega diskretnega signala f_d .

Frekvenco f_d smo definirali kot najnižjo frekvenco (po absolutni vrednosti), pri kateri je za vsako celoštevilsko vrednost spremenljivke k izpolnjen pogoj:

$$\sin 2\pi f_d kT = \sin 2\pi f_z kT \quad (3.42)$$

Sinusna funkcija je periodična in daje enako vrednost, če argumentu prištejemo ali odštejemo poljubni mnogokratnik števila 2π , zato mora za vsak k veljati

$$2\pi f_d kT + 2\pi l = 2\pi f_z kT \quad \exists l \in \mathbb{Z} \quad (3.43)$$

oziroma

$$k(f_d T) + l = k(f_z T) \quad \exists l \in \mathbb{Z} \quad (3.44)$$

Ker je enačbo potrebno rešiti za vsak k , mora biti celo število l večkratnik števila k ($l = l'k$). Po krajšanju s k dobimo enačbo:

$$f_d T + l' = f_z T \quad (3.45)$$

Ker iščemo najmanjšo rešitev enačbe za f_d , jo dobimo tako, da za l' izberemo celo število, ki je najbližje $f_z T$. Dobimo ga z uporabo funkcije round:

$$l' = \text{round}(f_z T) \Rightarrow f_d = f_z - \frac{1}{T} \text{round}(f_z T) = f_z - f_s \text{round}\left(\frac{f_z}{f_s}\right) \quad (3.46)$$

Odvisnost frekvence f_d vzorčenega signala od frekvence f_z originalnega signala prikazuje slika 3.11. Zgoraj je prikazana odvisnost, ki jo določa enačba (3.46). Koncept negativnih frekvenc se redko uporablja, saj imajo za posledico enak amplitudni spekter in zgolj po predznaku različen fazni spekter kot njihova pozitivna različica, zato je bolj ilustrativen spodnji graf na sliki 3.11, ki jasno prikazuje zgibanje frekvenc.

Sledi teorem o vzorčenju, ki je en temeljnih rezultatov na področju teorije signalov. V literaturi nosi ime po mnogih znanstvenikih (Nyquist, Shannon, Kotelnikov, Whittaker idr.), ki so na različne načine prišli do različnih globin tega rezultata.

Izrek 1: Teorem o vzorčenju (Nyquist–Shannon)

Naj bo $x_z(t)$ frekvenčno omejen zvezni signal, katerega spekter se v celoti nahaja na frekvenčnem intervalu $[0, f_h]$. Zvezni signal je popolnoma določen, če poznamo njegove vzorce $x_z(kT)$, ki si sledijo v stalnih časovnih intervalih širine T oz. so pridobljeni s frekvenco vzorčenja $f_s = \frac{1}{T}$, pri čemer mora veljati

$$f_s > 2f_h \quad \text{oz.} \quad T < \frac{1}{2f_h} \quad (3.47)$$

Rekonstruirani signal $x_z(t)$ je določen z enačbo:

$$x_z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT) \frac{\sin \pi f_s (t - kT)}{\pi f_s (t - kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT) \text{sinc}(f_s (t - kT)) \quad (3.48)$$



Dokaz:

Če se še enkrat spomnimo slike 3.9, ugotovimo, da zvezni signal lahko rekonstruiramo iz vzorčenega, če frekvenca vzorčenja presega dvakratno vrednost najvišje frekvence, ki je prisotna v signalu. Ali z drugimi besedami: rekonstrukcija je možna, če je spekter signala pri vseh frekvencah, ki so višje ali enake polovici frekvence vzorčenja, enak 0. Slika 3.9 podaja tudi navodilo, kako teoretično rekonstruirati signal. To storimo tako, da vzorčeni signal peljemo skozi idealni nizkoprepustni filter. Nizkoprepustni filter ojači vso frekvenčno vsebino pod polovico frekvence vzorčenja s T (fazo pusti nespremenjeno) in popolnoma odstrani vso frekvenčno vsebino nad polovico frekvence vzorčenja. Frekvenčni odziv takšnega idealnega nizkoprepustnega filtra $G_{id}(j2\pi f)$ je prikazan na zgornji polovici slike 3.12. Rekonstruirani spekter $\hat{X}_z(f)$ dobimo tako, da množimo spekter vzorčenega signala $X^*(f)$ s frekvenčnim odzivom idealnega filtra $G_{id}(j2\pi f)$:

$$\hat{X}_z(f) = X^*(f)G_{id}(j2\pi f) \quad (3.49)$$

Množenje v frekvenčnem prostoru ustreza konvoluciji v časovnem prostoru. To pomeni, da rekonstruirani signal $\hat{x}_z(t)$ dobimo s konvolucijo impulznega odziva idealnega nizkoprepustnega filtra in vzorčenega signala

$$\hat{x}_z(t) = x^*(t) * g_{id}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_z(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) g_{id}(t - \tau) d\tau \quad (3.50)$$

kjer smo upoštevali enačbo za zapis vzorčenega signala (3.28). Najprej zamenjamo vrstni red integriranja in seštevanja

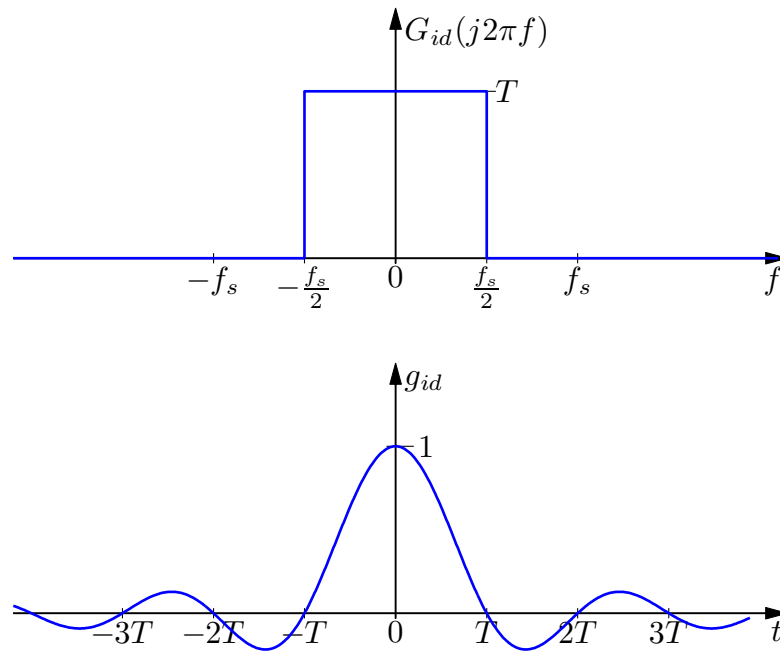
$$\hat{x}_z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_z(\tau) g_{id}(t - \tau) \delta(\tau - kT) d\tau \quad (3.51)$$

Nato upoštevamo presejalno lastnost impulzne funkcije, ki pravi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - \tau_0) d\tau = f(\tau_0) \quad (3.52)$$

Zato lahko v enačbi (3.51) τ nadomestimo s kT , integral in $\delta(\tau - kT)$ pa odpadeta:

$$\hat{x}_z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT) g_{id}(t - kT) \quad (3.53)$$



Slika 3.12: Frekvenčni odziv (zgoraj) in impulzni odziv (spodaj) idealnega nizkoprepustnega filtra

Sedaj moramo izračunati le še $g_{id}(t)$, ki ga dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo (3.13) frekvenčnega odziva $G_{id}(j2\pi f)$:

$$\begin{aligned}
 g_{id}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{id}(j2\pi f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} T e^{j2\pi ft} df = \\
 &= \frac{T}{j2\pi t} e^{j2\pi ft} \Big|_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} = \frac{T}{\pi t} \sin(\pi f_s t) = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \text{sinc}(f_s t) \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Impulzni odziv idealnega nizkoprepustnega filtra $g_{id}(t)$ je prikazan na spodnji polovici slike 3.12. Če enačbo (3.54) vnesemo v enačbo (3.53), vidimo, da je $\hat{x}_z(t)$ enak $x_z(t)$, ki ga podaja enačba (3.48), s čimer smo slednjo dokazali. ■

Enačbo za rekonstrukcijo zveznega signala (3.48) imenujemo tudi Whittaker–Shannonova interpolacijska formula. Z njo lahko rekonstruiramo zvezni frekvenčno omejeni signal iz njegovih vzorcev. Čeprav je enačba (3.48) odlično izhodišče za rekonstrukcijo vzorčenih signalov na mnogih področjih, pa ni primerna za uporabo v povratnozančnem vodenju. Iz slike 3.12 namreč vidimo, da je idealni filter nekavzalen (njegov impulzni odziv je za negativne čase različen od 0). To po-

sledično pomeni, da za določitev vrednosti signala $x_z(t)$ v poljubnem časovnem trenutku potrebujemo tudi vzorce iz prihodnosti. To pri sistemih vodenja, kjer obdelujemo signale v realnem času ne pride v poštev, zato bomo uporabili drugačne vrste filtrov za rekonstrukcijo. Običajno bodo temu namenu služila zadrževalna vezja.

Primer 3.5

Obravnavamo zvezni signal:

$$x_z(t) = 2 \sin(\pi t) + 4 \sin(4\pi t) \quad (3.55)$$

Kolikšna je najmanjša frekvenca, s katero je potrebno vzorčiti signal, da pri rekonstrukciji ne pride do napake zaradi zgibanja frekvenc. Kako izgleda rekonstruirani zvezni signal, če signal $x_z(t)$ vzorčimo s frekvenco, ki je natančno dvakrat višja od najvišje frekvence, ki je zastopana v signalu.

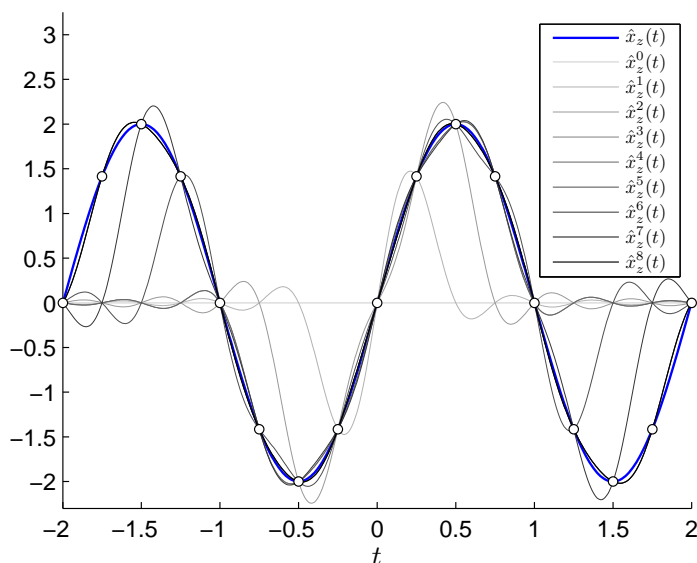
V signalu sta zastopani frekvenci 0,5 Hz in 2 Hz. Najvišja frekvenca v signalu je 2 Hz (Nyquistova hitrost je v tem primeru 4 Hz), torej je potrebno signal vzorčiti s frekvenco, višjo od 4 Hz. Drugi del od nas zahteva rekonstrukcijo signala pri vzorčenju s frekvenco 4 Hz, za katero pa vemo, da je prenizka za rekonstrukcijo signala. Najprej pogledjmo, kakšen signal dobimo po vzorčenju:

$$x(k) = (2 \sin(\pi t) + 4 \sin(4\pi t)) \Big|_{t=kT=\frac{k}{4}} = 2 \sin(\pi \frac{k}{4}) + 4 \sin(\pi k) = 2 \sin(\pi \frac{k}{4}) \quad (3.56)$$

kjer zadnji člen odpade, ker je k celo število. Ker se je vsa informacija o drugem členu signala v postopku vzorčenja izgubila, je razumljivo, da tega dela signala ni mogoče rekonstruirati z nobenim postopkom. Poglejmo si, kako s pomočjo Whittaker–Shannonove interpolacijske formule postopno izvajamo rekonstrukcijo zveznega signala. V ta namen definirajmo naslednjo družino signalov (ki so prikazani na sliki 3.13):

$$\hat{x}_z^K(t) = \sum_{k=-K}^K x_z(kT) \operatorname{sinc}(f_s(t - kT)) \quad K \in \mathbb{N}_0 \quad (3.57)$$

kar pomeni, da v interpolacijski formuli ne seštejemo vseh členov, pač pa le nekaj členov okrog $k = 0$. Funkcija $\hat{x}_z^0(t)$ (na sliki 3.13 je prikazan z najtanjšo in najsvetlejšo črto) je v tem primeru identično enaka 0, ker je ničti vzorec signala enak 0. Funkcija $\hat{x}_z^1(t)$ v trenutkih vzorčenja $k = -1, k = 0$ in



Slika 3.13: Zvezni signal $x_z(t)$ in družina signalov $x_z^K(t)$, ki jih dobimo v postopku rekonstrukcije ($K = 0, 1, 2, \dots, 8$)

$k = 1$ sovpada z vzorčeno funkcijo, v ostalih trenutkih vzorčenja je enaka 0. Z naraščanjem K (krivulje na sliki 3.13 so čedalje temnejše in debelejše) funkcija pravilno opiše vrednost signala pri vzorcih od $k = -K$ do $k = K$, zunaj tega intervala pa ne. Najbolj pomembno pa je, da se z naraščanjem K izboljšuje kakovost interpolacije med dvema trenutkoma vzorčenja. Izkaže se, da z limitiranjem K proti neskončno $\hat{x}_z^K(t)$ limitira proti:

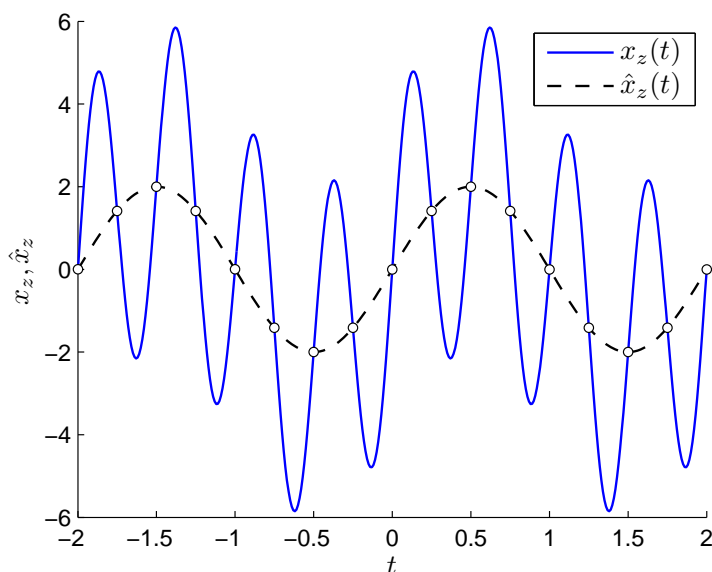
$$\lim_{K \rightarrow \infty} \hat{x}_z^K(t) = \hat{x}_z(t) = 2 \sin(\pi t) \quad (3.58)$$

kar je napovedal tudi teorem o vzorčenju. Na sliki 3.14 so prikazani $x_z(t)$ z neprekinjeno črto, $\hat{x}_z(t)$ s črtkano črto in vzorci diskretnega signala s krožci.

3.4.2 Rekonstrukcija z zadrževalnim vezjem

V razdelku 3.3.1 smo omenili, da lahko rekonstruiramo originalni časovno zvezni signal iz njegovih vzorcev s pomočjo nizkoprepustnega filtra, v razdelku 3.4.1 pa smo spoznali teoretične zahteve za rekonstrukcijo zveznega signala iz vzorčenega.

V tem razdelku bomo spoznali, da lahko proces rekonstrukcije izvedemo tudi s pomočjo zadrževalnega vezja, ki predstavlja neke vrste nizkoprepustni filter.



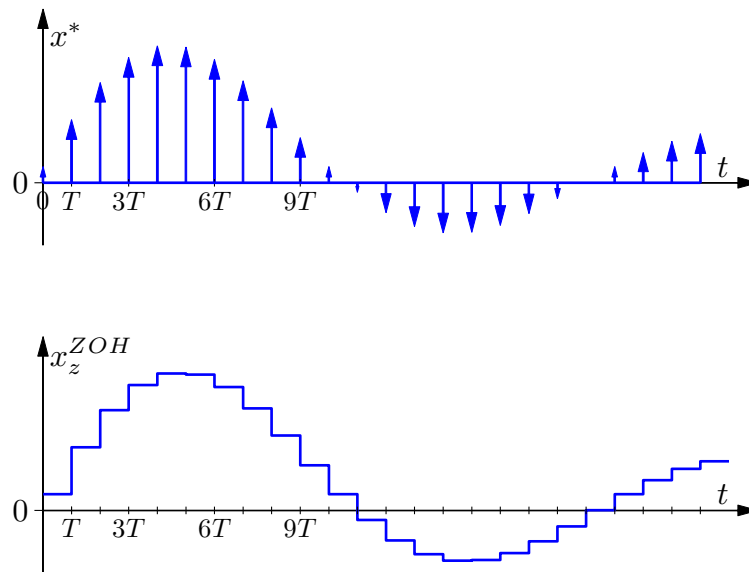
Slika 3.14: Zvezni signal $x_z(t)$ (neprekinjena črta), rekonstruirani signal $\hat{x}_z(t)$ (črtkana črta), vzorčeni signal (krožci)

Čeprav je bilo razvitih več vrst zadrževalnih vezij, se bomo omejili na zadrževalno vezje ničtega reda.

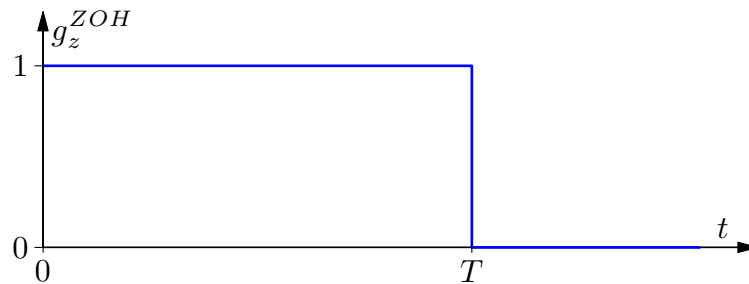
Zadrževalnik ničtega reda (angl. *zero-order hold*, s kratico *ZOH*) sprejme vrednost impulza na začetku intervala vzorčenja in drži njegovo vrednost do začetka naslednjega intervala, kar ilustrira slika 3.15.

Na tem mestu ne bomo obravnavali realizacije zadrževalnika ničtega reda, omenimo naj le, da je ta sistem običajno že vsebovan v D/A pretvorniku, ki drži analogno vrednost do naslednjega trenutka vzorčenja.

V nadaljevanju bomo poiskali prenosno funkcijo zadrževalnika ničtega reda. Kot vemo, je prenosna funkcija zveznega sistema enaka Laplaceovi transformaciji impulznega odziva sistema, impulzni odziv sistema pa je odziv sistema na enotni impulz $\delta(t)$. S slike 3.15 lahko vidimo, da zadrževalnik ničtega reda na vходу sprejme serijo neskončno ozkih in neskončno visokih impulzov. Na izhodu zadrževalnika pa dobimo signal, ki se spremeni ob trenutku vzorčenja (na vrednost, ki je enaka površini pod vhodnim impulzom), nato pa zadrževalnik drži konstantno vrednost do konca trajanja ene periode vzorčenja. Glede na povedano zlahka pridemo do impulznega odziva zadrževalnika ničtega reda, ki ga prikazuje slika 3.16. Ker lahko odziv zadrževalnika ničtega reda sestavimo iz dveh skočnih funkcij, ki sta druga proti drugi premaknjeni za čas T , je Laplaceova transforma-



Slika 3.15: Delovanje zadrževalnika ničtega reda – zgornji graf prikazuje signal, ki vstopa v zadrževalnik, spodnji pa signal, ki iz njega izstopa



Slika 3.16: Impulzni odziv zadrževalnika ničtega reda

cija odziva na enotin impulz podana z izrazom:

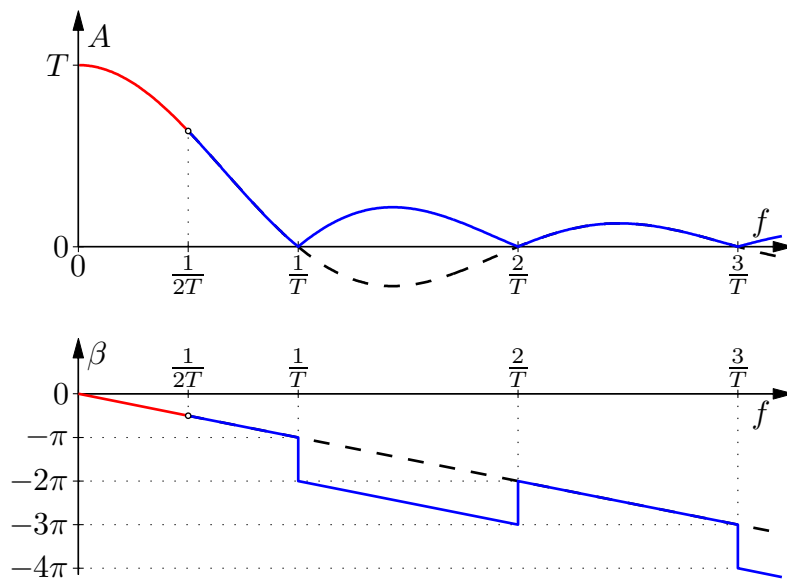
$$G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}\{g_z^{ZOH}(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (3.59)$$

Frekvenčni odziv zadrževalnika ničtega reda dobimo, če s v enačbi (3.59) nadomestimo z $j\omega$. Po nekaj matematičnih operacijah dobimo amplitudni odziv $A(f)$ in fazni odziv $\beta(f)$ v naslednji obliki

$$A(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \operatorname{sinc}(fT) = \frac{\operatorname{sinc}(\frac{f}{f_s})}{f_s} \quad (3.60)$$

$$\beta(f) = -\pi f T = -\pi \frac{f}{f_s}$$

Amplitudni in fazni odziv glede na enačbo (3.60) sta prikazana na sliki 3.17



Slika 3.17: Amplitudni (zgoraj) in fazni (spodaj) odziv zadrževalnika ničtega reda – črtkana črta prikazuje odziva glede na enačbo (3.60), modra izvlečena popravljena odziva, rdeča pa področje uporabe, omejeno z zahtevami teorema o vzorčenju

s črtkano črto. Velja poudariti, da rezultat, ki ga podaja enačba (3.60) glede na definicijo amplitudnega odziva ni povsem pravilen, saj mora biti amplitudni odziv nenegativen. To pomeni, da je potrebno izračunati absolutno vrednost amplitudnega odziva, hkrati pa je potrebno fazo spremeniti za $-\pi$ pri frekvencah, kjer je $A(f)$ v enačbi (3.60) negativen. Popravljeni amplitudni in fazni odziv sta prikazana na sliki 3.17 z izvlečeno krivuljo.

Veliko bolj pomembno kot razlika med črtkano in izvlečeno krivuljo na sliki 3.17 je, na katerem intervalu smemo definirati frekvenčni odziv sistema. Osnovna predpostavka pri definiciji frekvenčnega odziva je namreč, da se sistem na vzbujanje določene frekvence odzove s signalom enake frekvence. Teorem o vzorčenju pa ima za posledico, da pride do zgibanja frekvenc, če dosežemo oz. presežemo Nyquistovo frekvenco vzorčevalnika, ki je definirana kot $f_0 = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2T}$. To pomeni, da se takrat sistem več ne odzove s signalom vzbujaalne frekvence, frekvenčni odziv pri tej frekvenci pa posledično nima smisla. Zato je frekvenčni odziv definiran zgolj na frekvenčnem intervalu $[0, f_0)$, kar prikazujeta rdeči krivulji na sliki 3.17.

Iz slike 3.17 lahko izluščimo dve pomembni dejstvi:

- Zadrževalnik ničtega reda je pravzaprav tip nizkoprepustnega filtra z o-

jačanjem enosmernih signalov T , kar pomeni, da ga lahko uporabimo pri rekonstrukciji vzorčenih signalov. Potrebno se je zavedati, da za razliko od idealnega filtra za rekonstrukcijo vseh frekvenc na intervalu $[0, f_0)$ ne prepušča z ojačenjem T , pač pa ojačenje z višanjem frekvence pada (pri kritični frekvenci $f_0 = \frac{1}{2T}$ ojačenje znaša $\frac{2T}{\pi}$).

- Zadrževalnik ničtega reda vnaša v sistem fazno zakasnitev, pri čemer je leta nizka pri nizkih frekvencah in narašča z višanjem frekvence signala na vходу (pri kritični frekvenci $f_0 = \frac{1}{2T}$ zakasnitev znaša $\frac{\pi}{2}$ oz. 90°). Vemo, da je fazna zakasnitev še posebej problematična v regulacijskih sistemih, saj znižuje fazni razloček, s tem pa slabša relativno stabilnost sistema.

3.5 Oblike Fourierove transformacije

Čeprav je Fourierova transformacija uporabna na različnih matematičnih in fizikalnih področjih, bomo pri naših izvajanjih ostali pri konceptu časa in frekvence. Prikazali bomo štiri različice Fourierove transformacije, do katerih pridemo, če signal in/ali njegovo transformiranko obravnavamo kot vzorčeno oz. diskretno.

Pri tem bomo uporabljali naslednje oznake:

- t – čas kot zvezna spremenljivka,
- T – prirastek časa med dvema zaporednima vzorcema vzorčene časovne funkcije,
- t_p – efektivna perioda periodične časovne funkcije,
- f – frekvenca kot zvezna spremenljivka,
- F – prirastek frekvence med dvema zaporednima komponentama vzorčene frekvenčne funkcije,
- f_s – frekvenca vzorčenja vzorčene časovne funkcije (število vzorcev na sekundo),
- N – število vzorcev v območju $0 \leq t < t_p$, če je časovna funkcija vzorčena (N je tudi število vzorcev v območju $0 \leq f < f_s$, če je frekvenčna funkcija vzorčena).

Če vzorčimo časovno funkcijo v območju $0 \leq t < t_p$, velja

$$t_p = NT \quad (3.61)$$

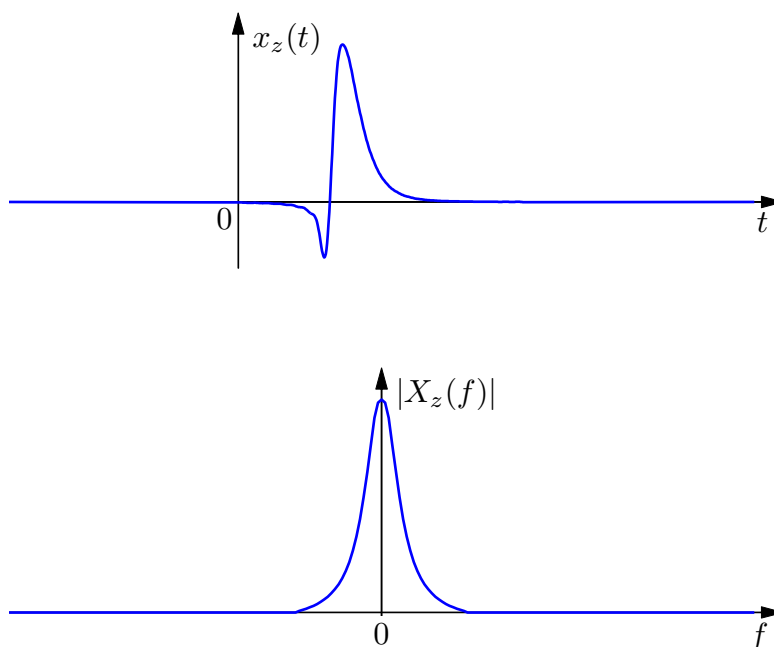
Če vzorčimo frekvenčno funkcijo v območju $0 \leq f < f_s$, velja

$$f_s = NF \quad (3.62)$$

Oglejmo si štiri možne oblike, ki jih lahko uporabimo pri predstavitvi Fourierove transformacije in njenega inverza. Te štiri oblike ustrezajo štirim kombinacijam, ki jih dobimo z vzorčenjem časa in frekvence. Oblike signalov na slikah 3.18, 3.19, 3.20 in 3.21 niso zgolj ilustrativne, pač pa predstavljajo dejanske signale in njihove Fourierove transformacije.

Zvezni čas in zvezna frekvenca. To obliko smo obravnavali v razdelku 3.1.2, ko smo opisovali zvezni spekter neperiodičnega časovnega signala. Fourierov transform $X_z(f)$ časovno zvezne funkcije $x_z(t)$ lahko izrazimo v obliki

$$X_z(f) = \mathcal{F}\{x_z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.63)$$



Slika 3.18: Neperiodična časovno zvezna funkcija in njen Fourierov transform, ki je frekvenčno zvezan in neperiodičen

Ustrezna inverzna transformacija je

$$x_z(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_z(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_z(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.64)$$

Slika 3.18 ilustrira časovno funkcijo $x_z(t)$ in njen transform $X_z(f)$. Obe funkciji sta zvezni in neperiodični.

Zvezni čas in diskretna frekvenca. To obliko Fourierove transformacije običajno poimenujemo Fourierova vrsta in smo jo obravnavali v razdelku 3.1.1. Naj bo $x_p(t)$ periodična časovno zvezna funkcija s periodo t_p . Fourierov transform funkcije $x_p(t)$ je različen od 0 le pri celih mnogokratnikih frekvenčne resolucije F , zato ga lahko obravnavamo kot frekvenčno diskretno funkcijo, ki jo bomo označili z $X_p(mF)$. Ustrezna transformacijska para sta podana z izrazoma

$$\begin{aligned} X_p(mF) &= F \int_{t'}^{t'+t_p} x_p(t) e^{-j2\pi mFt} dt \\ x_p(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_p(mF) e^{j2\pi mFt} \end{aligned} \quad (3.65)$$

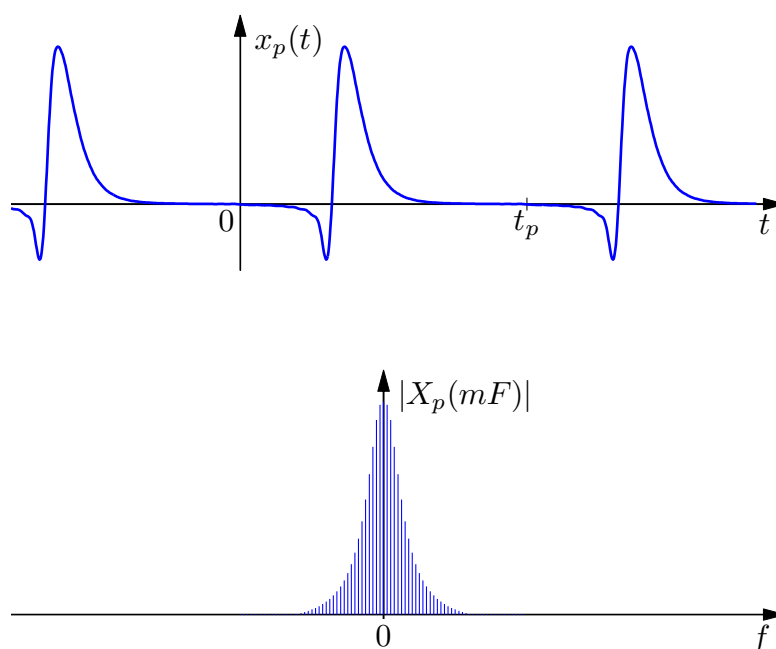
pri čemer lahko integracijo po času pričnemo pri poljubnem t' , integracija pa mora potekati preko ene periode signala $x_p(t)$. Frekvenčni prirastek F med dvema zaporednima spektralnima komponentama je povezan s periodo časovne funkcije po enačbi

$$F = \frac{1}{t_p} \quad (3.66)$$

Slika 3.19 prikazuje primer signala $x_p(t)$ in njegovega Fourierovega transformata.

Če je časovna funkcija $x_p(t)$ periodična, je ustreznemu transformu frekvenčno diskretna funkcija. Velja pa tudi obratno. Spomnimo se še enkrat slike 3.18, kjer je signal $x_z(t)$ neperiodična funkcija, kar vodi do zveznega frekvenčnega transformata $X_z(f)$. Če vzorčimo frekvenčni spekter $X_z(f)$ in izračunamo inverzno Fourierovo transformacijo takšnega vzorčenega spektra, dobimo periodično časovno funkcijo. Pri tem ni bistveno, če je originalna časovna funkcija periodična ali ne. Proces vzorčenja frekvenčnega spektra ima ob uporabi inverzne transformacije za posledico periodičnost časovne funkcije.

Iz vsega povedanega lahko zaključimo, da **periodična časovno zvezna funkcija ustreza frekvenčno diskretni neperiodični transformacijski funkciji.**



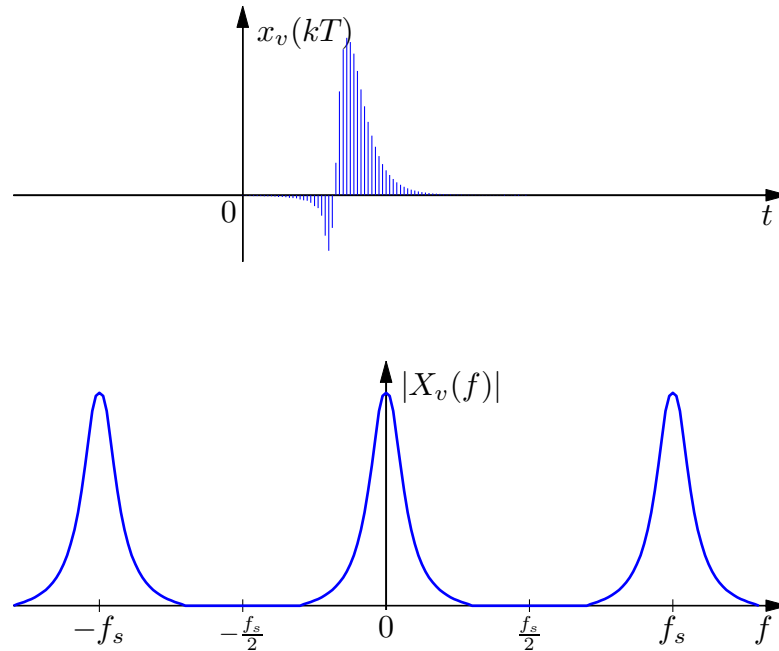
Slika 3.19: Periodična časovna zvezna funkcija in njen Fourierov transform, ki je frekvenčno diskreten in neperiodičen (črte v spektru prikazujejo vrednosti $|X_p(mF)|$ pri mnogokratnih frekvencah F , tako da je razdalja med dvema sosednjima črtama F)

Diskretni čas in zvezna frekvenca. Ta oblika Fourierove transformacije je zelo sorodna z-transformaciji, ki jo bomo obravnavali v nadaljevanju. Naj bo $x_v(kT)$ predstavitev časovno diskretnega (ali vzorčenega) signala in $X_v(f)$ ustrezeni transform. Perioda vzorčenja je T , frekvenca vzorčenja pa $f_s = \frac{1}{T}$. Če v enačbi (3.63) zamenjamo integracijo po času s seštevanjem po časovnih vzorcih (podobno kot smo storili pri diskretizaciji frekvenca pri Fourierovi vrsti), dobimo transformacijski par, ki je dualen paru (3.65):

$$\begin{aligned}
 X_v(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_v(kT) e^{-j2\pi f k T} \\
 x_v(kT) &= T \int_{f'}^{f'+f_s} X_v(f) e^{j2\pi f k T} df
 \end{aligned}
 \tag{3.67}$$

kjer integral v izrazu (3.67) znova računamo preko ene periode funkcije $X_v(f)$. Slika 3.20 prikazuje primer vzorčenega signala $x_v(kT)$ in njegovega Fourierovega transformata. Vzorčenje časovne funkcije ima za posledico periodičnost frekvenčne funkcije. Po isti logiki dobimo z inverzno transformacijo frekvenčno periodične funkcije časovno diskretni signal.

Zaključimo lahko, da **neperiodična časovno diskretna funkcija ustreza**



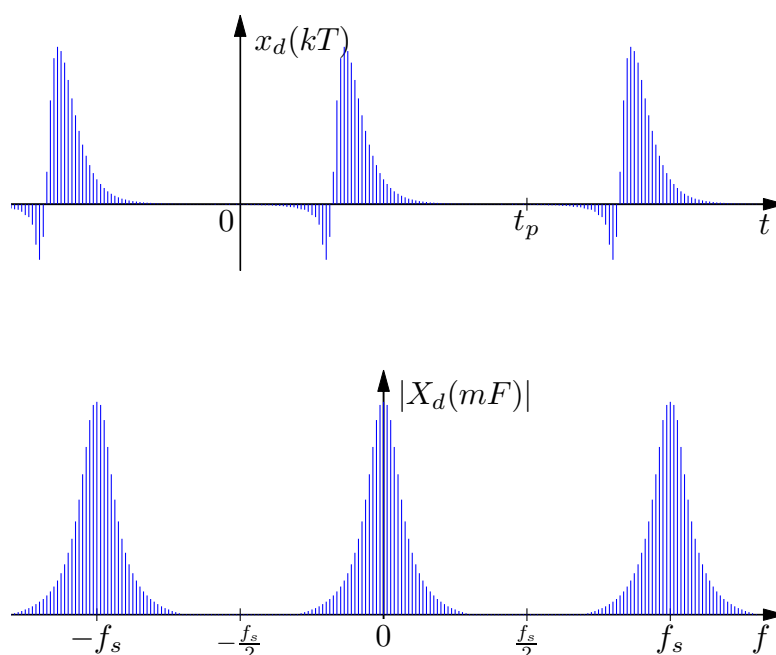
Slika 3.20: Neperiodična časovno diskretna funkcija in njen Fourierov transform, ki je frekvenčno zvezen in periodičen (črte v signalu prikazujejo vrednost vzorcev signala $x_v(kT)$, tako da je razdalja med dvema sosednjima črtama T)

frekvenčno zvezni periodični transformacijski funkciji.

Diskretni čas in diskretna frekvenca. Oglejmo si še četrto možnost, ko sta tako časovna kot frekvenčna funkcija diskretizirani. Naj bo $x_d(kT)$ predstavitev časovno diskretnega signala in $X_d(mF)$ predstavitev ustrezne frekvenčno diskretne transformacijske funkcije (primer obeh funkcij je na sliki 3.21). Primeren Fourierov transformacijski par je

$$\begin{aligned}
 X_d(mF) &= \sum_{k=k'}^{k'+N-1} x_d(kT) e^{-j2\pi mFkT} \\
 x_d(kT) &= \frac{1}{N} \sum_{m=m'}^{m'+N-1} X_d(mF) e^{j2\pi mFkT}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

pri čemer je N število vzorcev v eni periodi funkcij $x_d(kT)$ oz. $X_d(mF)$. Sumacijo v izrazih (3.68) izračunamo preko ene periode $x_d(kT)$ oz. ene periode $X_d(mF)$. Poudariti je potrebno, da bi lahko namesto faktorjev 1 in $\frac{1}{N}$ v enačbah (3.68) uporabili tudi F in T , s čimer bi bili enačbi bolj konsistentni z enačbama (3.65) in (3.67). Uporabimo lahko namreč poljubni števili, katerih produkt je $\frac{1}{N}$. Oblika (3.68) je uporabljena zaradi zgodovinskih razlogov.



Slika 3.21: Periodična časovno diskretna funkcija in njen Fourierov transform, ki je frekvenčno diskreten in periodičen

Ker vzorčimo časovno funkcijo, je frekvenčna funkcija periodična s periodo

$$f_s = NF = \frac{1}{T} \quad (3.69)$$

Ker vzorčimo frekvenčno funkcijo, je časovna funkcija periodična s periodo

$$t_p = NT = \frac{1}{F} \quad (3.70)$$

Z upoštevanjem izrazov (3.69) in (3.70) dobimo

$$FT = \frac{1}{N} \quad (3.71)$$

Vidimo, da **periodična časovna diskretna funkcija ustreza frekvenčno diskretni periodični funkciji**.

Četrta oblika Fourierove transformacije rečemo diskretna Fourierova transformacija (s kratico DFT), ki jo običajno zapišemo tako, da naredimo naslednje spremembe v oznakah:

- Čas vzorčenja T naj bo v časovni funkciji vsebovan implicitno, zato namesto $x_d(kT)$ pišemo $x(k)$.

- Prirastek frekvence F naj bo v frekvenčni funkciji vsebovan implicitno, zato namesto $X_d(mF)$ pišemo $X(m)$.
- Seštevanje v prvi enačbi v (3.68) se začne pri $k' = 0$.
- Seštevanje v drugi enačbi v (3.68) se začne pri $m' = 0$.
- V enačbi (3.68) ima pomembno vlogo izraz $e^{-j2\pi mFkT}$, ki se z upoštevanjem enačbe (3.71) poenostavi:

$$e^{-j2\pi mFkT} = (e^{-j2\pi FT})^{mk} = (e^{-j\frac{2\pi}{N}})^{mk} = W^{mk} \quad (3.72)$$

kjer smo definirali novo spremenljivko

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad \text{oz.} \quad W^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad (3.73)$$

Z upoštevanjem novih oznak se zapis diskretne Fourierove transformacije nekoliko poenostavi:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W^{mk} \\ x(k) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{-mk} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Diskretna Fourierova transformacija je računsko dokaj zahteven algoritem, saj število množenj za izračun DFT enega signala dosega N^2 . V praksi se je uveljavil algoritem hitre Fourierove transformacije (angl. *Fast Fourier Transform*, s kratico *FFT*), ki DFT izračuna bistveno hitreje, saj vsebuje le $N \log_2 N$ množenj [16]. V praksi dandanes pogosto obdelujemo signale dolžine nekaj milijonov ali celo milijard. Če ima signal dolžino $N = 2^{20}$ (nekaj več kot milijon), mora algoritem DFT izvesti $N^2 = 2^{40} \doteq 10^{12}$ množenj, medtem ko je to število pri FFT $\gg \ll N \log_2 N = 2^{20} \cdot 20 \doteq 2 \cdot 10^7$, kar pomeni, da hitri algoritem število potrebnih množenj zmanjša približno za faktor 50000.

Naredimo še nekaj zaključkov, ki zadevajo razne različice Fourierove transformacije. Če je funkcija v enem prostoru (časovnem ali frekvenčnem) periodična, je ustrezní transform v drugem prostoru vzorčen, kar pomeni, da je funkcija diskretne spremenljivke. Velja tudi obratno: če je funkcija v enem prostoru vzorčena, postane funkcija v drugem prostoru periodična. Perioda v enem prostoru je vedno recipročna vrednosti prirastka med dvema zaporednima vzorcema v drugem prostoru. Te lastnosti povzema tabela 3.2. Pri numerični obdelavi je vzorčenje tako časovnih kakor tudi frekvenčnih funkcij nujno. Torej je četrta oblika Fourierove transformacije, ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, bistvenega pomena za digitalno obravnavo signalov.

Tabela 3.2: Primerjava oblik Fourierove transformacije

Časovna funkcija	frekvenčna funkcija
neperiodična in zvezna	zvezna in neperiodična
periodična in zvezna	diskretna in neperiodična
neperiodična in diskretna	zvezna in periodična
periodična in diskretna	diskretna in periodična

3.6 Z-transformacija

Z-transformacija je preslikava, ki jo uporabljamo pri diskretnih sistemih na podoben način, kot uporabljamo Laplaceovo transformacijo pri zveznih sistemih. Matematično gledano je z-transformacija linearni operator, ki operira nad diskretnim signalom $x(k)$ in daje kot rezultat z-transformiranko $X(z)$. Običajno zahtevamo, da je signal $x(k)$ kavzalen, kar pomeni, da mora biti vrednost signala $x(k)$ pri negativnih vrednostih argumenta k enaka 0. Kjer ne bo eksplicitno dogovorjeno drugače, bomo predpostavili, da je signal $x(k)$ kavzalen. Z-transformacija $X(z)$ diskretnega kavzalnega signala $x(k)$ je definirana kot:

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (3.75)$$

Potrebno je povedati, da mora signal $x(k)$ izpolnjevati nekaj pogojev, da z-transformiranka obstaja in je enolična. Ti pogoji so v glavnem povezani s konvergenco zgornje neskončne vrste.

Seveda obstaja tudi inverzna z-transformacija, ki pretvori z-transformiranko nazaj v časovni prostor:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} \quad (3.76)$$

Simbolično lahko obe transformaciji zapišemo tudi na naslednji način:

$$x(k) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad (3.77)$$

Pri izračunu z-transformacije (3.75) je uporabljen diskretni signal $x(k)$, za katerega ni nujno, da je dobljen z vzorčenjem zveznega signala. Če pa izhajamo iz vzorčenega signala, ki ga podaja enačba (3.29):

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)\delta(t - kT) \quad (3.78)$$

in izvedemo Laplaceovo transformacijo te enačbe, dobimo:

$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)e^{-kTs} \quad (3.79)$$

S primerjavo izrazov (3.75) in (3.79) ter z upoštevanjem enačbe vzorčenja $x(k) = x_z(kT)$ in kavzalnosti signala, lahko za vzorčene sisteme ugotovimo relacijo

$$X^*(s) = X(z)|_{z=e^{sT}} \quad (3.80)$$

in naslednji povezavi med ravninama s in z

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ s &= \frac{1}{T} \ln z \end{aligned} \quad (3.81)$$



Pri uvedbi Fourierove transformacije za neperiodične diskretne funkcije smo definirali transformacijski enačbi (3.67):

$$\begin{aligned} X_v(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_v(kT)e^{-j2\pi f kT} \\ x_v(kT) &= T \int_{f'}^{f'+fs} X_v(f)e^{j2\pi f kT} df \end{aligned} \quad (3.82)$$

Če obravnavamo zvezne kavzalne signale, lahko Fourierovo transformacijo vidimo kot limitni primer Laplaceove transformacije, ko $s \rightarrow j\omega$. Na analogen način lahko pri obravnavi vzorčenih signalov in z upoštevanjem enačbe (3.80) ugotovimo, da je potrebno za izračun Fourierove transformacije diskretnega signala v z-transformiranki z nadomestiti z $e^{j2\pi fT}$:

$$X_v(f) = X(z)|_{z=e^{sT}} \Big|_{s=j\omega} \Big|_{\omega=2\pi f} = X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi f kT} \quad (3.83)$$

kjer smo za $X(z)$ upoštevali enačbo za z-transformacijo diskretnega signala (3.75). Če upoštevamo še dejstvo, da je signal kavzalen (pri negativnih časih enak 0), s čimer lahko mejo seštevanja pričnemo pri $-\infty$, in vzorčen ($x(k) = x_v(kT)$), dobimo natančno prvo enačbo v (3.82). To pomeni, da lahko Fourierovo transformacijo za neperiodične diskretne signale vidimo kot limitni primer izračuna z-transformacije po krožnici enote $e^{j2\pi fT}$.

3.6.1 Z-transformacija elementarnih funkcij

Z-transformacijo elementarnih funkcij najenostavneje izračunamo z uporabo definicije z-transformacije, ki jo podaja enačba (3.75).

Primer 3.6

Določite z-transformacijo geometričnega zaporedja:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

Z-transformacijo izračunamo po definiciji (3.75):

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (3.85)$$

Zgornja neskončna vrsta konvergira, če $|az^{-1}| < 1$ oz. $|z| > |a|$. Konvergenčno področje vrste oz. del ravnine z , kjer $X(z)$ konvergira, ne bo predmet naše obravnave. Podobno kot pri Laplaceovi transformaciji bomo te vidike prezrli in uporabljali z-transformacijo kot inženirji na pragmatičen način.

Iz z-transformacije geometričnega zaporedja lahko izpeljemo z-transformacije treh zelo pomembnih signalov v sistemski teoriji – enotine stopnice, eksponentne funkcije e^{bkT} (ki je dobljena z vzorčenjem e^{bt}) in sinusne funkcije.

Primer 3.7

Določite z-transformacijo enotine stopnice:

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Enotino stopnico dobimo, če v enačbi (3.84) namesto a vstavimo 1. Torej je z-transformacija enotine stopnice enaka:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.87)$$

Pri transformaciji stopnice smo predstavili dve različici z-transformiranke. Obe se pogosto uporabljata, tako da je izbira, katero uporabiti, pogosto stvar osebnih preferenc. Res pa je, da so nekatere operacije bolj prikladne s prvo, druge spet z drugo različico.

$\sum_{-\infty}^{\infty}$ Primer 3.8

Določite z-transformacijo eksponentne funkcije:

$$x(k) = \begin{cases} e^{bkT} & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

Eksponentna funkcija e^{bkT} je ekvivalentna geometričnemu zaporedju a^k , če velja $a = e^{bT}$. Torej lahko zapišemo:

$$\mathcal{Z} \{e^{bkT}\} = \frac{1}{1 - e^{bT}z^{-1}} \quad (3.89)$$

$\sum_{-\infty}^{\infty}$ Primer 3.9

Določite z-transformacijo sinusne funkcije:

$$x(k) = \begin{cases} \sin(\omega kT) & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.90)$$

Sinusno funkcijo lahko izrazimo kot vsoto dveh eksponentnih funkcij z ima-

ginarnim eksponentom:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (3.91)$$

Ker velja (3.91), lahko zaradi linearnosti z-transformacije dobimo z-transformiranko harmonične funkcije iz že znanih z-transformirank eksponentnih funkcij iz enačbe (3.89):

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(1 - e^{-j\omega T} z^{-1}) - (1 - e^{j\omega T} z^{-1})}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} = \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

kjer smo še enkrat upoštevali relacijo (3.91) in podobno relacijo za kosinusno funkcijo.

Naslednji pomembni signal v sistemski teoriji je linearno naraščajoča funkcija ali rampa.



Primer 3.10

Določite z-transformacijo signala rampe

$$x_z(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.93)$$

ki ga diskretiziramo s časom vzorčenja T .

Po diskretizaciji obravnavamo diskretni signal:

$$x(k) = \begin{cases} kT & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

Problem bomo rešili na tri načine.

Prvi način:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) = \\ &= T(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots)(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \\ &= T \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Drugi način:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \quad (3.96)$$

Zgornje vrste ne znamo direktno rešiti, ker vsebuje vsak člen faktor k , lahko pa rešimo naslednjo vrsto:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3.97)$$

Če odvajamo $Y(z)$ po spremenljivki z , bo vsak člen vseboval faktor k , kar potrebujemo:

$$\frac{dY(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k)z^{-k-1} \quad (3.98)$$

S primerjavo enačb (3.96) in (3.98) vidimo, da je potrebno slednjo množiti s faktorjem $(-Tz)$, da bosta enaki:

$$-Tz \frac{dY(z)}{dz} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = X(z) \quad (3.99)$$

Z upoštevanjem enačb (3.97) in (3.99) dobimo

$$X(z) = -Tz \left(-\frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (3.100)$$

Tretji način je uporaba teorema o množenju s k (3.124), ki pravi:

$$\mathcal{Z} \{kf(k)\} = -z \frac{dF(z)}{dz} \quad (3.101)$$

Z upoštevanjem tega teorema se reševanje naloge nadaljuje enako kot pri drugem načinu.

Pri iskanju z-transformirank znanih signalov se reševanje bolj ali manj zreducira na reševanje neskončnih vrst, tako da lahko direktno uporabimo znanja s tega področja (kar je ilustriral drugi način reševanja primera 3.10). S pridom lahko izkoristimo teoreme z-transformacije, kar je pokazal tretji način reševanja. Včasih pa lahko zadevo rešimo tako, da uberemo kakšno bližnjico, kot smo to storili pri prvem načinu reševanja.

3.6.2 Teoremi z-transformacije

Pri računanju z-transformacije pogosto uporabljamo nekatere lastnosti, ki jih imenujemo teoremi z-transformacije in jih ni potrebno vsakič posebej izpeljevati. V tem razdelku bomo upoštevali naslednjo notacijo:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z} \{x(k)\} \\ X_1(z) &= \mathcal{Z} \{x_1(k)\} \\ X_2(z) &= \mathcal{Z} \{x_2(k)\} \\ H(z) &= \mathcal{Z} \{h(k)\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Izrek 2: Teorem linearnosti

Z-transformacija je linearna operacija:

$$\mathcal{Z} \{a_1x_1(k) + a_2x_2(k)\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \quad (3.103)$$



Dokaz:

Dokaz sledi neposredno iz definicije z-transformacije (3.75):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{a_1x_1(k) + a_2x_2(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_1x_1(k) + a_2x_2(k)] z^{-k} = \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) z^{-k} + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) z^{-k} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \end{aligned} \quad (3.104)$$



Izrek 3: Teorem časovnega premika v desno

Če je signal $x(k)$ kavzalen (vrednost signala $x(k)$ pri negativnih vrednostih argumenta k je enaka 0), lahko z-transformacijo zakasnjene signala izračunamo na naslednji način

$$\mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) \quad (3.105)$$

Z-transformacijo signala, ki je premaknjen za m vzorcev v desno torej dobimo, če pomnožimo z-transformacijo originalnega signala z z^{-m} . V primeru, ko je signal za negativne vrednosti argumenta k različen od 0, moramo to upoštevati, kar prikazuje enačba (3.107).



Dokaz:

Dokaz sledi neposredno iz definicije z-transformacije (3.75):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k-m)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-k} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-m)z^{-(k-m)} = \\ &= z^{-m} \sum_{\lambda=-m}^{\infty} x(\lambda)z^{-\lambda} = z^{-m} \sum_{\lambda=0}^{\infty} x(\lambda)z^{-\lambda} + z^{-m} \sum_{\lambda=-m}^{-1} x(\lambda)z^{-\lambda} \end{aligned} \quad (3.106)$$

kjer smo vpeljali novo spremenljivko $\lambda = k - m$. V prvem členu izraza (3.106) prepoznamo z-transformacijo signala $x(k)$, le da se argument funkcije sedaj imenuje λ . Uvedimo sedaj originalno neodvisno spremenljivko $k = \lambda + m$ v drugi člen enačbe (3.106):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k-m)\} &= z^{-m}X(z) + z^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m)z^{-(k-m)} = \\ &= z^{-m}X(z) + \sum_{k=0}^{m-1} x(k-m)z^{-k} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Če je signal $x(k)$ kavzalen, drugi člen v enačbi (3.107) odpade in dobimo trditev iz enačbe (3.105), kar smo želeli dokazati. ■

Izrek 4: Teorem časovnega premika v levo

Z-transformacijo signala, ki je premaknjen za m vzorcev v levo, dobimo tako, da odrežemo prvih m vzorcev in pomnožimo z transformacijo originalnega signala z z^m :

$$\mathcal{Z} \{x(k+m)\} = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right] \quad (3.108)$$



Dokaz:

Dokaz sledi neposredno iz definicije z-transformacije (3.75):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{x(k+m)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+m)z^{-k} = \sum_{\lambda=m}^{\infty} x(\lambda)z^{-(\lambda-m)} = \\ &= z^m \sum_{\lambda=m}^{\infty} x(\lambda)z^{-\lambda} = z^m \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} x(\lambda)z^{-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{m-1} x(\lambda)z^{-\lambda} \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

Ker vrednost vsote ni odvisna od spremenljivke, po kateri seštevamo, lahko λ zamenjamo s k . ■

Izrek 5: Teorem eksponencialnega dušenja

Z-transformacijo signala, ki je pomnožen z a^{-k} (eksponencialno padajoča funkcija za $a > 1$) dobimo tako, da pomnožimo argument z-transformacije originalnega signala s konstanto a :

$$\mathcal{Z} \{a^{-k}x(k)\} = X(az) \quad (3.110)$$



Dokaz:

Dokaz sledi neposredno iz definicije z-transformacije (3.75):

$$\mathcal{Z} \{ a^{-k} x(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (az)^{-k} = X(az) \quad (3.111)$$

■

Izrek 6: Teorem začetne vrednosti

Če je signal $x(k)$ kavzalen in obstaja limita $\lim_{k \rightarrow 0} x(k)$, jo lahko izračunamo na naslednji način:

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.112)$$



Dokaz:

Če zapišemo definicijo z-transformacije

$$X(z) = \mathcal{Z} \{ x(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (3.113)$$

lahko z limitiranjem obeh strani te enačbe ($z \rightarrow \infty$) zapišemo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) = \lim_{k \rightarrow 0} x(k) \quad (3.114)$$

■

Izrek 7: Teorem končne vrednosti

Kadar ležijo vsi poli izraza $(z-1)X(z)$ znotraj kroga enote, limita $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ obstaja in je enaka:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (3.115)$$



Dokaz:

Zapišimo enačbo za z-transformacijo (3.75) z uporabo limite:

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N x(k)z^{-k} = X(z) \quad (3.116)$$

Na podoben način lahko zapišemo tudi enačbo za z-transformacijo premaknjenega signala, pri čemer upoštevamo teorem časovnega premika v levo (3.108), kjer je premik enak $m = 1$:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N x(k+1)z^{-k} = z[X(z) - x(0)] \quad (3.117)$$

Če odštejemo enačbo (3.116) od enačbe (3.117), dobimo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N [x(k+1) - x(k)]z^{-k} = (z-1)X(z) - zx(0) \quad (3.118)$$

Za sedaj se ne bomo ukvarjali s pogoji za konvergenco zaporedja $x(k)$. Predpostavili bomo le, da je ta zagotovljena, signal pa je po absolutni vrednosti omejen. Potem lahko ugotovimo, da se v primeru, ko z limitira proti 1, večina členov na levi strani enačbe (3.118) pokrajša. Ostaneta le dva ($x(N+1) - x(0)$), tako da lahko zapišemo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x(N+1) - x(0) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) - x(0) \quad (3.119)$$

Če obema stranema te enačbe prištejemo $x(0)$, smo dokazali trditev (3.115).

Sedaj nas zanimajo še pogoji za konvergenco signala. Predpostavimo, da obstaja dovolj velik ε , za katerega velja:

$$|x(k+1) - x(k)| < \varepsilon \quad \forall k \quad (3.120)$$

Če bi obstajal pol izraza $(z-1)X(z)$ zunaj kroga enote (recimo, da bi to bil pol π_0 , $|\pi_0| > 1$), bi za absolutno vrednost leve strani enačbe (3.118) pri $z = \pi_0$ veljalo:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N [x(k+1) - x(k)] \pi_0^{-k} \right| &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N |x(k+1) - x(k)| |\pi_0|^{-k} \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \varepsilon |\pi_0|^{-k} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{|\pi_0|} + \left(\frac{1}{|\pi_0|} \right)^2 + \dots \right) = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{1}{|\pi_0|}} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Ker velja $|\pi_0| > 1$, potem je res tudi $\frac{1}{|\pi_0|} < 1$, kar pomeni, da je leva stran enačbe (3.118) navzgor omejena. Ker pa je π_0 pol funkcije na desni strani enačbe, je desna stran enačbe (3.118) neskončna. To pomeni, da ne obstaja noben ε , za katerega bi veljala trditev (3.120), kar pomeni, da zaporedje $x(k)$ ne konvergira.

Če želimo obravnavati zgolj racionalne funkcije $X(z)$, kar bo pri nas pravilo, pa se olajša del dokaza v primeru, če vsaj en pol izraza $(z - 1)X(z)$ leži na krožnici enote. Takrat v primeru konvergence signala gotovo velja eksponentna konvergenca, kar pomeni, da obstajata pozitivni realni števili ε in $\rho < 1$ in velja:

$$|x(k+1) - x(k)| < \frac{\varepsilon}{\rho^k} \quad \forall k \quad (3.122)$$

Sedaj obravnavamo primer $\pi_0 = 1$, neenačba (3.121) pa se ustrezno spremeni:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N [x(k+1) - x(k)] \pi_0^{-k} \right| &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon}{\rho^k} = \\ &= \varepsilon (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{\varepsilon}{1 - \rho} \quad (3.123) \end{aligned}$$

Ker je izraz $\frac{\varepsilon}{1-\rho}$ končen, s čimer je končna tudi leva stran enačbe (3.118), hkrati pa je desna stran te enačbe neskončna, ne obstajata takšna ε in $\rho < 1$, ki bi izpolnjevala pogoj (3.122). To pomeni, da signal $x(k)$ v primeru, če kakšen pol izraza $(z - 1)X(z)$ leži na krožnici enote, ne konvergira eksponentno in posledično sploh ne konvergira. ■

Izrek 8: Teorem množenja s k^r

Z-transformacijo signala, ki je pomnožen s k^r , dobimo tako, da r -krat ponovimo naslednji postopek: najprej odvajamo transform originalnega signala po spremenljivki z , nato pa rezultat pomnožimo z $(-z)$. To formalno zapišemo:

$$\mathcal{Z} \{k^r x(k)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^r X(z) \quad (3.124)$$



Dokaz:

Izračunajmo najprej vrednost naslednjega izraza:

$$\begin{aligned} -z \frac{d}{dz} X(z) &= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = -z \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \frac{d}{dz} z^{-k} = \\ &= -z \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (-k) z^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [kx(k)] z^{-k} = \mathcal{Z} \{kx(k)\} \quad (3.125) \end{aligned}$$

S tem smo dokazali trditev teorema za $r = 1$. Če je $r = 2$, je potrebno postopek izvesti v dveh korakih in zlahka pridemo do enačbe:

$$\mathcal{Z} \{k^2 x(k)\} = -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right] \quad (3.126)$$

Če je r še večji, je potrebno postopek ponoviti večkrat, kar pripelje do rezultata (3.124). ■

Potrebno je poudariti, da zaradi linearnosti operacije odvajanja velja:

$$\mathcal{Z} \{k^r x(k)\} = (-1)^r \left(z \frac{d}{dz} \right)^r X(z) \quad (3.127)$$

Ker pa **ne velja** $\left(-z \frac{d}{dz}\right)^r = (-z)^r \frac{d^r}{dz^r}$, rezultata (3.124) v splošnem ni mogoče poenostaviti tako, da bi najprej r -krat odvajali $X(z)$ po spremenljivki z , nato pa rezultat pomnožili z $(-z)^r$.

Izrek 9: Teorem diferenciranja funkcije po parametru

Če signal odvajamo po parametru, dobimo njegovo z -transformacijo tako, da tudi z -transformacijo originalnega signala odvajamo po tem parametru:

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} x(k, a) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} X(z, a) \quad (3.128)$$



Dokaz:

Če vrsti konvergirata, lahko zaradi linearnosti operaciji seštevanja in odvajanja zamenjamo:

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} x(k, a) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} x(k, a) z^{-k} = \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k, a) z^{-k} \right] = \frac{\partial}{\partial a} X(z, a) \quad (3.129)$$

Izrek 10: Teorem konvolucije

Z-transformacijo konvolucije dveh kavzalnih signalov dobimo z množenjem njunih z-transformov:

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \right\} = X(z)H(z) \quad (3.130)$$



Dokaz:

Najprej zapišimo z-transformacijo konvolucije dveh signalov:

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m)z^{-k} \quad (3.131)$$

Ker je signal $h(\cdot)$ kavzalen, je njegova vrednost pri negativnih vrednostih argumenta enaka 0. Zato lahko mejo seštevanja po spremenljivki m potegnemo do neskončnosti:

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(k-m)z^{-k} \quad (3.132)$$

Sedaj zamenjajmo vrstni red seštevanj in uporabimo teorem premika v desno za kavzalne signale (3.105):


$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{m=0}^k x(m)h(k-m) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) \sum_{k=0}^{\infty} h(k-m)z^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}H(z) \quad (3.133)$$

Na koncu seštejemo še vrsto po m , v kateri prepoznamo definicijo z-transforma $X(z)$, pri čemer je uporabljeno seštevanje po drugi spremenljivki. S tem smo dokazali trditev (3.130). ■

Obravnavani teoremi z-transformacije so zbrani v tabeli 3.3. Z njihovo pomočjo lahko izračunamo z-transformacijo nekaterih sestavljenih signalov, kot bo prikazal naslednji primer.

Tabela 3.3: Teoremi z-transformacije

	$x(k)$	$X(z)$
Teorem linearnosti	$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Teorem časovnega premika v desno	$x(k-m)$	$z^{-m}X(z)$
Teorem časovnega premika v levo	$x(k+m)$	$z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$
Teorem eksponencialnega dušenja	$a^{-k}x(k)$	$X(az)$
Teorem začetne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow 0} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Teorem končne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$
Teorem množenja s k^r	$k^r x(k)$	$(-z \frac{d}{dz})^r X(z)$
Teorem diferenciranja funkcije po parametru	$\frac{\partial}{\partial a} x(k, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
Teorem konvolucije	$\sum_{m=0}^k x(m)h(k-m)$	$X(z)H(z)$

 **Primer 3.11**

Izračunajte z-transformacijo diskretnega signala, ki ga dobimo z vzorčenjem zvezne funkcije $x_z(t) = te^{at}$ s periodo vzorčenja T .

Obravnavamo diskretni signal:

$$x(k) = x_z(kT) = kTe^{akT} \quad (3.134)$$

Z-transformacijo signala $x(k)$ lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$\mathcal{Z} \{kTe^{akT}\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} e^{akT} \right\} = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{Z} \{e^{akT}\} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{z}{z - e^{aT}} = \frac{Tze^{aT}}{(z - e^{aT})^2} \quad (3.135)$$

kjer smo uporabili teorem diferenciranja funkcije po parametru. Primer bi lahko rešili tudi z uporabo teorema množenja s k^r , pri čemer bi za r vzeli 1.

3.7 Inverzna z-transformacija

Inverzna z-transformacija preslika kompleksno funkcijo $X(z)$ v zaporedje števil $x(k)$ oziroma v niz impulzov $x^*(t)$ pri vzorčenih sistemih. Izpeljemo jo lahko s pomočjo Cauchyjevega integralnega teorema:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.136)$$

kjer je \mathcal{C} krivulja, ki enkrat obkroži koordinatno izhodišče v nasprotni smeri urnega kazalca. Definicija z-transformacije (spremenljivko k smo nadomestili z n) je podana z enačbo (3.75):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.137)$$

Če pomnožimo to enačbo z z^{k-1} in jo integriramo s krivuljnim integralom, ki obkroža koordinatno izhodišče in zajema vse singularnosti $X(z)$, dobimo izraz:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n+k-1} dz \quad (3.138)$$

Z zamenjavo seštevanja in integracije na desni strani te enačbe dobimo relacijo

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{-n+k-1} dz \quad (3.139)$$

Desna stran te enačbe je zaradi (3.136) različna od nič le pri $n = k$, zato pri seštevanju po n v enačbi (3.139) ostane le en člen ($n = k$):

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz = x(k) \quad (3.140)$$

Inverzno z-transformacije z-transformiranke $X(z)$ torej izračunamo po naslednji enačbi

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz \quad (3.141)$$

kjer krivulja \mathcal{C} enkrat obkroži vse singularnosti funkcije $X(z)z^{k-1}$ v nasprotni smeri urnega kazalca.



Spomnimo se, da smo pri izračunu Fourierove transformacije diskretnega signala v enačbi (3.83) spremenljivko z nadomestili z $e^{j2\pi fT}$. Poskušajmo sedaj ta izraz vstaviti še v enačbo za inverzno z-transformacijo (3.141):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz \Big|_{z=e^{j2\pi fT}} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(e^{j2\pi fT}) e^{j2\pi fT(k-1)} d(e^{j2\pi fT}) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\frac{f_s}{2}}^{\frac{f_s}{2}} X_v(f) e^{j2\pi fT(k-1)} e^{j2\pi fT} 2j\pi T df = T \int_{f'}^{f'+f_s} X_v(f) e^{j2\pi fTk} df \end{aligned} \quad (3.142)$$

Pri izračunu zgornjega integrala smo nadomestili integriranje po z z integriranjem po f . V definiciji inverzne z-transformacije mora trajektorija \mathcal{C} enkrat obkrožiti vse pole izraza $X(z)z^{k-1}$ v nasprotni smeri urnega kazalca. V enačbi (3.142) smo z nadomestili z $e^{j2\pi fT}$, kar pomeni, da je bila krivulja \mathcal{C} kar enotina krožnica. Natančno en obhod po krožnici enote naredimo, če f teče od $-\frac{f_s}{2}$ do $\frac{f_s}{2}$ (ali v splošnem, če teče od f' do $f' + f_s$, pri čemer je f' poljuben). Še zadnji komentar zadeva dejstvo, da v primeru polov $X(z)$ na krožnici enote ali zunaj nje krivulja \mathcal{C} ni obšla vseh polov $X(z)z^{k-1}$. Takrat enačba ne velja, saj takrat tudi ni izpolnjen pogoj za obstoj Fourierove transformacije. Spomnimo se namreč, da mora biti časovna funkcija absolutno integrabilna, kar pa v primeru polov na robu oz. zunaj kroga enote ni res.

Če pa gre za signal, ki ima vse pole transformata znotraj kroga enote, ugotovimo, da je izraz v enačbi (3.142) enak drugi enačbi v (3.82), kar pomeni, da lahko inverzno Fourierovo transformacijo periodične transformiranke vidimo kot limitni primer inverzne z-transformacije.

V praksi se za izračun inverzne z-transformacije uporablja več možnosti:

- uporaba tabel z-transformacije,
- izračun s pomočjo residualnega teorema,
- metoda parcialnih ulomkov,
- metoda deljenja,
- uporaba računalniških orodij (npr. MATLAB) idr.

3.7.1 Uporaba tabel z-transformacije

Z-transformiranko je najbolj enostavno pretvoriti v časovni prostor, če v tabeli z-transformov najdemo natančno takšno transformiranko. Takrat rešitev enostavno prepisemo iz drugega stolpca tabele, ki se nahaja v dodatku A na strani 219. Velikokrat se zgodi, da je potrebno funkcijo nekoliko prirediti, šele potem lahko uporabimo tabelo.



Primer 3.12

Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X(z) = \frac{2 + 3z^{-1}}{1 + z^{-2}} \quad (3.143)$$

Funkcijo $X(z)$ najprej zapišemo po pozitivnih potencah z , ker je taka oblika bolj primerna za določanje inverzne z-transformacije (edina izjema je mogoče metoda deljenja):

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 1} \quad (3.144)$$

Ker sta pola funkcije $X(z)$ konjugirano kompleksna, tega člena ne razbijamo na parcialne ulomke. Kadar sta pola z-transformiranke drugega reda konjugirano kompleksna, je signal $x(k)$ naslednje oblike:

$$x(k) = Ab^k \sin(\omega kT + \varphi) \quad (3.145)$$

Frekvenca nihanja ω je odvisna od faznega zasuca pola funkcije $X(z)$, b pa je odvisen od lege polov glede na krožnico enote: če diskretna pola ležita zunaj kroga enote, je b večji od 1; če ležita na krožnici enote, je b enak 1; če sta pola v krogu enote, je b manjši od 1. V danem primeru pola ležita na enotini krožnici ($\pm j$), zato je signal $x(k)$ harmoničen. V tabeli z-transformacije v dodatku A lahko vidimo, kakšna sta z-transforma sinusne in kosinusne funkcije:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{ \sin \omega k T \} &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \\ \mathcal{Z} \{ \cos \omega k T \} &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Imenovalc z-transformacij obeh harmoničnih funkcij je enak, tako da s primerjavo z imenovalcem z-transformacije iskane funkcije najprej določimo $\cos \omega T$. Pri nas je le-ta enak 0:

$$\cos \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \omega T = 1 \quad (3.147)$$

Tukaj velja poudariti, da je v diskretnih sistemih produkt ωT zaradi teorema o vzorčenju omejen na interval $(-\pi, \pi)$ (pokažite, da je to res). Zato v gornji enačbi ni potrebno podajati rešitev, ki se nanašajo na vrednosti ωT , ki so premaknjene za večkratnik števila 2π . Kako pa je z rešitvijo $\omega T = -\frac{\pi}{2}$? Ta rešitev pomeni, da gre za negativno frekvenco signala. Pri kosinusnem signalu ta razlika ni pomembna, saj je kosinusna funkcija soda. Pri sinusnem signalu pa to pomeni, da se spremeni predznak funkcije, kar pa se kompenzira z negativnim ojačenjem funkcije (glej z-transformacijo sinusne funkcije).

Če vnesemo vrednosti iz enačbe (3.147) v enačbo (3.146), dobimo:


$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \sin \frac{k\pi}{2} \right\} &= \frac{z}{z^2 + 1} \\ \mathcal{Z} \left\{ \cos \frac{k\pi}{2} \right\} &= \frac{z^2}{z^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.148)$$

S primerjavo enačb (3.148) in (3.144) dobimo končni rezultat:

$$x(k) = 3 \sin \frac{k\pi}{2} + 2 \cos \frac{k\pi}{2}, \quad k \geq 0 \quad (3.149)$$

Zaradi specifične oblike zaporedja $x(k)$ je le-to periodično zaporedje s periodo 4:

$$x(k) = \{2, 3, -2, -3, 2, 3, -2, -3, \dots\} \quad (3.150)$$

 **Primer 3.13**

Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} \quad (3.151)$$

Inverzna z-transformacija funkcije 1 je $\delta(k)$, torej časovno zaporedje, ki je enako 1 za $k = 0$, pri vseh ostalih vrednostih k pa je enako 0. Če je takšna z-transformiranka pomnožena z z^{-n} , je njena inverzna z-transformacija za n vzorcev zakasnjeno zaporedje – torej $\delta(k - n)$. Glede na povedano je $x(k)$ enak:

$$x(k) = \delta(k) + 2\delta(k-1) + 3\delta(k-2) + 2\delta(k-3) + \delta(k-4) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 3 & k = 2 \\ 2 & k = 3 \\ 1 & k = 4 \\ 0 & k \geq 5 \end{cases} \quad (3.152)$$

3.7.2 Uporaba izreka o residuih

Za racionalne integrande lahko vrednost integrala izračunamo z residualnim teoremom

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz = \sum \text{Res} [X(z) z^{k-1}] \quad (3.153)$$

pri čemer je potrebno v zgornji enačbi upoštevati vse singularnosti izraza $X(z)z^{k-1}$, ki ležijo znotraj zaključene krivulje \mathcal{C} . Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ l singularnih točk z_1, z_2, \dots, z_l v ravnini \mathbb{Z} oz. znotraj zaključene krivulje \mathcal{C} , potem lahko enačbo (3.153) zapišemo bolj konkretno:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} = \sum_{i=1}^l \text{Res}_{z=z_i} [X(z) z^{k-1}] \quad (3.154)$$

Najprej moramo poiskati singularnosti funkcije v oglatem oklepaju. V primeru racionalne funkcije $X(z)$ so to poli funkcije $X(z)$, lahko pa se pojavi dodaten pol pri $z = 0$ (zaradi z^{k-1}), če funkcija $X(z)$ nima ničle pri $z = 0$. Za vse pole moramo ugotoviti, katere stopnje so. Lahko gre za enostavne (enkratne) ali večkratne pole. Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ enostavni pol v $z = z_i$, izračunamo residuum funkcije v tej točki po naslednji formuli:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z)z^{k-1}] = \lim_{z \rightarrow z_i} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)] = [X(z)z^{k-1}(z - z_i)]_{z=z_i} \quad (3.155)$$

Če pa ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ m -kratni pol v $z = z_i$, izračunamo residuum po formuli:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)^m] \quad (3.156)$$

Ker predpostavljamo, da je iskani časovni signal kavzalen ($x(k) = 0$ za $k < 0$), nas običajno ne zanimajo residui pri negativnih vrednostih spremenljivke k . V takšnem primeru ni potrebno računati residua pri $z = 0$, če ima funkcija $X(z)$ vsaj eno ničlo v koordinatnem izhodišču.



Primer 3.14

Izračunajte inverzno z -transformacijo funkcije

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z - 2)^2(z - 1)} \quad (3.157)$$

Najprej izračunamo izraz $X(z)z^{k-1}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z - 2)^2(z - 1)} \quad (3.158)$$

in poiščemo residue te funkcije. Funkcija ima enostavni pol v $z = 1$ in dvojni

pol v $z = 2$ (pola v $z = 0$ ni, ker je $k \geq 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)} &= \left[\frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)}(z-1) \right]_{z=1} = \frac{3 \cdot 1^k}{(-1)^2} = 3 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)} &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)}(z-2)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{4zz^k(z-1) + (2z^2 + 1)kz^{k-1}(z-1) - (2z^2 + 1)z^k}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \left[\frac{4 \cdot 2 \cdot 2^k + 9k \cdot 2^{k-1} - 9 \cdot 2^k}{(2-1)^2} \right] = -2^k + 9k \cdot 2^{k-1} = -2^k + \frac{9k}{2} \cdot 2^k \end{aligned} \quad (3.159)$$

Končni rezultat je vsota obeh residuov:

$$x(k) = 3 - 2^k + \frac{9k}{2} \cdot 2^k, \quad k \geq 0 \quad (3.160)$$

Če pa funkcija $X(z)$ nima ničle v koordinatnem izhodišču ali pa ima tam celo pole, je potrebno posebej iskati residue pri $z = 0$ za majhne vrednosti k , kar bo pokazal naslednji primer.



Primer 3.15

Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} \quad (3.161)$$

Najprej izračunamo izraz $X(z)z^{k-1}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} \quad (3.162)$$

Funkcija ima enostavni pol v $z = 2$ ter večkratni pol v $z = 0$. Potrebno je poudariti, da se večkratnost pola s časom k spreminja: ob času $k = 0$ je pol trikratni, ob $k = 1$ dvakratni, ob $k = 2$ enostaven, za $k \geq 3$ pa pola v $z = 0$

sploh ni. Načeloma je zato potrebno obravnavo ločiti na štiri primere:

$$x(k) = \begin{cases} \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z^3} & k = 0 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z^2} & k = 1 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z} & k = 2 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.163)$$

Vidimo, da je prvi residuum enak v vseh primerih in ga je potrebno izračunati le enkrat:

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} = \left[\frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} (z-2) \right]_{z=2} = \frac{4 \cdot 2^k}{2^3} = 2^{k-1} \quad (3.164)$$

Izračunati pa moramo še ostale tri residue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z} &= \left[\frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z^2} &= \left[\frac{d}{dz} \frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z^3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dz^2} \frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.165)$$

Zaradi bolj učinkovitega računanja smo drugi residuum računali v naspornem vrstnem redu (od $k = 2$ proti $k = 0$), ker se izkaže, da ves čas obravnavamo isti izraz, ki ga moramo večkrat odvajati. Kot smo že povedali, je prvi residuum v rezultatu enak pri vseh k , drugi pa se spreminja. Dodatni člen, ki se pojavi le ob časih $k' = 0, 1, 2$, se prišteje k rezultatu pomnožen z $\delta(k - k')$, ker ima ta funkcija pri $k = k'$ vrednost 1, pri ostalih k pa vrednost 0. Končni rezultat je torej:

$$x(k) = 2^{k-1} - \frac{1}{2}\delta(k) - \delta(k-1) - \delta(k-2), \quad k \geq 0 \quad (3.166)$$

Rezultat lahko zapišemo tudi v nekoliko manj sofisticirani obliki:

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1 \\ 1 & k = 2 \\ 2^{k-1} & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.167)$$

3.7.3 Metoda parcialnih ulomkov

Pri tej metodi je postopek podoben kot pri računanju inverzne Laplaceove transformacije po metodi parcialnih ulomkov. Pomembna razlika je, da je potrebno na parcialne ulomke razcepiti funkcijo $\frac{X(z)}{z}$. Nadaljevanje pa je zelo podobno. Če imamo realne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 1. Če imamo konjugirano kompleksne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 2 (za podrobnosti nadaljevanja glejte rešitev primerov 3.12 in 3.18). Če imamo večkratne pole, dobimo več pripadajočih parcialnih ulomkov.



Primer 3.16

Rešimo nalogo iz primera 3.14 še enkrat – tokrat z uporabo metode parcialnih ulomkov. Inverzna z-transformacija iskanega zaporedja $x(k)$ je naslednja:

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z - 2)^2(z - 1)} \quad (3.168)$$

Na parcialne ulomke razcepimo izraz $\frac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{(z - 2)^2(z - 1)} = \frac{A}{(z - 2)^2} + \frac{B}{z - 2} + \frac{C}{z - 1} \quad (3.169)$$

Ko množimo obe strani enačbe (3.169) z izrazom $[(z - 2)^2(z - 1)]$, dobimo:

$$\begin{aligned} 2z^2 + 1 &= A(z - 1) + B(z - 1)(z - 2) + C(z - 2)^2 = \\ &= (B + C)z^2 + (A - 3B - 4C)z + (-A + 2B + 4C) \end{aligned} \quad (3.170)$$

Iz enačbe (3.170) dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} B + C &= 2 \\ A - 3B - 4C &= 0 \\ -A + 2B + 4C &= 1 \end{aligned} \quad (3.171)$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} A &= 9 \\ B &= -1 \\ C &= 3 \end{aligned} \quad (3.172)$$

Če vstavimo konstante iz enačbe (3.172) v enačbo (3.169), dobimo:

$$X(z) = 9 \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{z}{z-2} + 3 \frac{z}{z-1} \quad (3.173)$$

Z uporabo tabel z-transformirank dobimo končni rezultat, ki je seveda enak kot v primeru 3.14:

$$x(k) = \frac{9k}{2} \cdot 2^k - 2^k + 3, \quad k \geq 0 \quad (3.174)$$



Primer 3.17

Rešimo nalogo iz primera 3.15 še enkrat – tokrat z uporabo metode parcialnih ulomkov. Inverzna z-transformacija iskanega zaporedja $x(k)$ je naslednja:

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} \quad (3.175)$$

Na parcialne ulomke razcepimo izraz $\frac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-2)z^3} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} \quad (3.176)$$

Obe strani enačbe (3.176) množimo z $[(z-2)z^3]$ in dobimo:

$$\begin{aligned} z+2 &= Az^3 + B(z-2)z^2 + C(z-2)z + D(z-2) = \\ &= (A+B)z^3 + (-2B+C)z^2 + (-2C+D)z + (-2D) \end{aligned} \quad (3.177)$$

Iz enačbe (3.177) dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -2D &= 2 \Rightarrow D = -1 \\ -2C + D &= 1 \Rightarrow C = -1 \\ -2B + C &= 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ A + B &= 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.178)$$

in posledično z-transformiranko:

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{1}{2} - z^{-1} - z^{-2} \quad (3.179)$$

Končni rezultat je zaporedje

$$x(k) = \frac{1}{2}2^k - \frac{1}{2}\delta(k) - \delta(k-1) - \delta(k-2), \quad k \geq 0 \quad (3.180)$$



Primer 3.18

Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X(z) = \frac{3z^3}{z^3 + 1} \quad (3.181)$$

Kot vedno, moramo razcepiti na parcialne ulomke $\frac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3z^2}{z^3 + 1} = \frac{3z^2}{(z+1)(z^2 - z + 1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2 - z + 1} \quad (3.182)$$

Tudi tukaj postopamo podobno kot v prejšnjih primerih:

$$3z^2 = A(z^2 - z + 1) + (Bz + C)(z + 1) = (A + B)z^2 + (-A + B + C)z + (A + C) \quad (3.183)$$

S primerjavo členov na levi in desni strani enačbe (3.183) spet pridemo do sistema treh enačb s tremi neznankami, katerega rešitev je:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -1 \quad (3.184)$$

Ko to rešitev vstavimo v enačbo (3.182), dobimo

$$X(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{2z^2 - z}{z^2 - z + 1} \quad (3.185)$$

V prvem členu prepoznamo z-transformacijo $(-1)^k$, v drugem pa z-transformacijo sinusne oz. kosinusne funkcije. Iz člena pri z v imenovalcu dobimo:

$$\cos \omega T = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{3} \quad (3.186)$$

Z upoštevanjem enačbe (3.186) pridemo do končnega rezultata:

$$x(k) = (-1)^k + 2 \cos \left(k \frac{\pi}{3} \right) \quad (3.187)$$

3.7.4 Metoda deljenja

Ta metoda je posebno primerna za računanje inverzne z-transformacije funkcij, ki nimajo enostavnih rešitev v zaključeni obliki. Z deljenjem števca racionalne funkcije z njenim imenovalcem dobimo potenčno vrsto za z :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \quad (3.188)$$

Spomnimo se, da je na prav tak način definirana z-transformacija diskretnega signala oz. zaporedja (3.75). Vrednosti iskanega zaporedja ob času k dobimo iz faktorjev pri z^{-k} . Na ta način lahko dobimo vrednost zaporedja pri vseh vrednostih argumenta k :

$$x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1 \quad x(2) = x_2 \quad \dots \quad (3.189)$$

Pri metodi deljenja torej delimo polinom v števcu z-transformiranke s polinomom v imenovalcu. V večini primerov se postopek nikoli ne konča in dobimo neskončno vrsto po negativnih potencah z .



Primer 3.19

Rešimo nalogo iz primera 3.18 tudi z uporabo metode deljenja.

Najprej delimo števec $X(z)$ z imenovalcem $X(z)$:

$$\begin{array}{r} (3z^3) : (z^3 + 1) = 3 - 3z^{-3} + 3z^{-6} - 3z^{-9} + \dots \\ \underline{-3z^3 - 3} \\ -3 \\ \underline{3 + 3z^{-3}} \\ 3z^{-3} \\ \underline{-3z^{-3} - 3z^{-6}} \\ -3z^{-6} \end{array}$$

Iz rezultata deljenja lahko dobimo vrednosti $x(k)$ pri posameznih diskretnih časovnih trenutkih k :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$x(k)$	3	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0	...

Ker je vzorec enostaven, ga lahko posplošimo na poljuben člen zaporedja:

$$x(k) = \begin{cases} 3(-1)^{\frac{k}{3}} & k = 3l, l \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (3.190)$$

kjer \mathbb{N}_0 označuje množico naravnih števil, ki vključuje tudi število 0.

Velja omeniti, da je določanje inverzne z-transformacije z metodo deljenja dokaj zamuden in po svoje nepraktičen pristop. Po drugi strani pa je to najbolj enostaven postopek za določanje vrednosti zaporedja za prvi (neničelni) vzorec. Poglejmo si postopek na primeru:

Primer 3.20

Izračunajmo vrednost zaporedja $x(k)$ iz primera 3.15 za prvih nekaj vzorcev. Z-transformiranka iskanega zaporedja je:

$$X(z) = \frac{z + 2}{(z - 2)z^2} \quad (3.191)$$

Izračunamo le člena pri najvišjih potencah z v števcu in imenovalcu in nato izvedemo deljenje le za prvi člen vrste:

$$X(z) = \frac{z + \dots}{z^3 + \dots} = z^{-2} + \dots \quad (3.192)$$

Iz rezultata deljenja vidimo, da je $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ in $x(2) = 1$.

Člene zaporedja do prve neničelne vrednosti lahko vedno dobimo na izredno enostaven način – podobno kot zgoraj. Spomnimo se, da je pri računanju inverzne z -transformacije z metodo razcepa na parcialne ulomke ali s pomočjo izreka o residuih največ dela ravno z računanjem prvih vzorcev (glejte npr. primera 3.15 in 3.17). Zaradi tega je izračun inverzne z -transformacije z uporabo metode deljenja zelo koristen kot preverjanje prvih vrednosti zaporedja, ki smo jih določili z uporabo drugih metod.

3.8 Parsevalov teorem

Pri optimizaciji diskretnih sistemov se pogosto pojavijo kriterijske funkcije v obliki vsote kvadratov diskretnega signala

$$S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) \quad (3.193)$$

Z uporabo definicije inverzne z -transformacije (3.141)

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz \quad (3.194)$$

lahko izraz (3.193) zapišemo tudi v naslednji obliki

$$S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{k-1} dz \quad (3.195)$$

ki pride ob zamenjavi integracije in sumacije v naslednjo obliko

$$S^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^k \right] dz \quad (3.196)$$

Izraz v oglatem oklepaju je po definiciji z -transformacije enak

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^k = X(z^{-1}) \quad (3.197)$$

Z upoštevanjem relacije (3.197) preide enačba (3.196) v

$$S^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz \quad (3.198)$$

ki je ena od oblik Parsevalovega teorema. Izraz S^2 v enačbi (3.193) podaja energijo signala, ki jo izračunamo v časovnem prostoru. Glede na (3.198) lahko energijo izračunamo tudi z integriranjem $X(z)X(z^{-1})z^{-1}$ v frekvenčnem prostoru.

3.9 Povezava med ravninama z in s

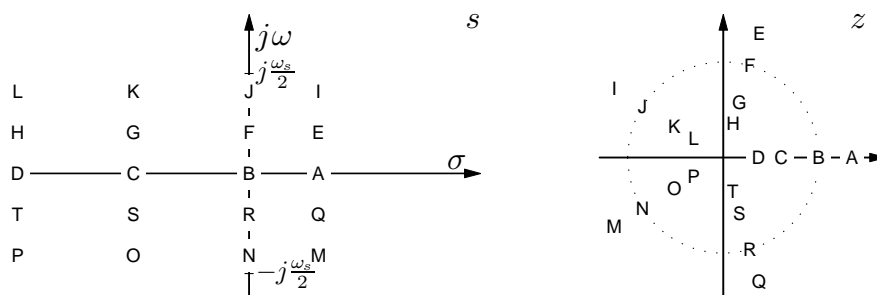
Lega polov Laplaceove transformiranke v kompleksni ravnini s ima zelo pomemben vpliv na obliko zveznega signala: poli na realni osi ravnine s ustrezajo eksponentialno padajočim oz. naraščajočim signalom, konjugirano kompleksni poli pa oscilatornim signalom s pozitivnim ali negativnim dušenjem. Podobne ugotovitve veljajo tudi za diskretne signale, katerih oblika je odvisna od lege polov z -transformiranke. Pri definiciji z -transformacije smo ugotovili, da med točkami v ravnini s in točkami v ravnini z velja povezava (3.81):

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (3.199)$$

Absolutna vrednost in argument (faza) kompleksnega števila z sta

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T} \\ \arg z &= \angle z = \omega T \end{aligned} \quad (3.200)$$

Vsaki točki v ravnini s odgovarja v ravnini z točka, katere amplituda $|z|$ je določena z realnim delom točke s in katere faza je določena z imaginarnim delom



Slika 3.22: Ilustracija preslikave posameznih točk ravnine s v točke v ravnini z – sredina določene črke predstavlja izvorno točko v ravnini s oz. njeno preslikavo v ravnini z (pikčasta krivulja je krožnica enote)

točke s . Ilustracija preslikave posameznih delov ravnine s v ravnino z je prikazana na sliki 3.22.

Oglejmo si preslikavo nekaterih tipičnih točk in krivulj iz ravnine s v ravnino z :

Koordinatno izhodišče ravnine s se preslika v točko:

$$z = e^{sT} \Big|_{s=0} = e^{0 \cdot T} = 1 + j0 \quad (3.201)$$

Imaginarna os ravnine s se preslika v krožnico enote:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=0+j\omega} = e^{0 \cdot T} e^{j\omega T} = 1 \cdot e^{j\omega T} \\ |z| &= 1 \\ \arg z &= \omega T \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (3.202)$$

Preslikava imaginarne osi ravnine s je prikazana na sliki 3.23 s črtkano-pikčasto črto.

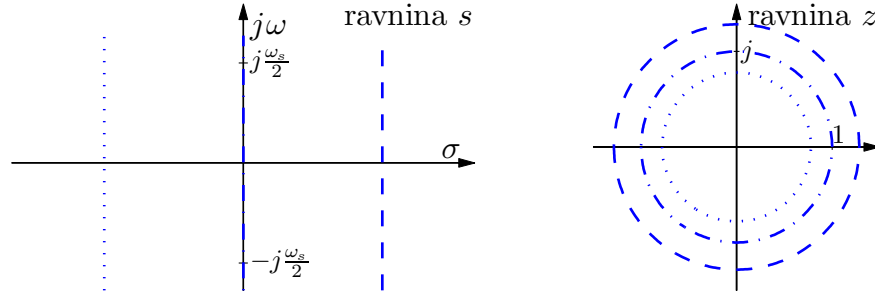
Daljica na imaginarni osi $[-j\frac{\omega_s}{2}, j\frac{\omega_s}{2}]$ se prav tako preslika v krožnico enote:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=0+j\omega} = e^{0 \cdot T} e^{j\omega T} = 1 \cdot e^{j\omega T} \quad \omega \in \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right] \\ |z| &= 1 \\ \arg z &= \omega T \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (3.203)$$

pri čemer se krajšiči daljice preslikata v isto točko:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=j\frac{\omega_s}{2}} = e^{j\frac{\omega_s}{2}T} = e^{j\frac{2\pi f_s}{2}T} = e^{j\frac{2\pi}{2T}T} = e^{j\pi} = -1 + j0 \\ z &= e^{sT} \Big|_{s=-j\frac{\omega_s}{2}} = e^{-j\frac{\omega_s}{2}T} = e^{-j\frac{2\pi f_s}{2}T} = e^{-j\frac{2\pi}{2T}T} = e^{-j\pi} = -1 + j0 \end{aligned} \quad (3.204)$$

Če potuje točka v ravnini s iz koordinatnega izhodišča po imaginarni osi v pozitivno smer, potuje njena preslikava v ravnini z po krožnici enote iz točke $1 + j0$ v obratni smeri urnega kazalca. Ko doseže točka v ravnini s vrednost $j\frac{\omega_s}{2}$, preide njena preslikava v točko $-1 + j0$ (njen argument je tedaj enak π). Če pa potuje točka v ravnini s iz koordinatnega izhodišča po imaginarni osi v negativno smer, potuje njena preslikava v ravnini z po krožnici enote iz točke $1 + j0$ v smeri urnega kazalca. Ko doseže točka v ravnini s vrednost $-j\frac{\omega_s}{2}$, pride njena preslikava do točke $-1 + j0$ (njen argument je tedaj enak $-\pi$).



Slika 3.23: Preslikava krivulj konstantnega relativnega časa umiritve oz. navpičnih premic iz ravnine s

Daljica na imaginarni osi $[j\frac{(2l-1)\omega_s}{2}, \frac{(2l+1)\omega_s}{2}]$, $l \in \mathbb{Z}$ se prav tako preslika v krožnico enote, saj se obe krajišči daljice spet preslikata v isto točko:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=j\frac{(2l-1)\omega_s}{2}} = e^{j\frac{(2l-1)\omega_s}{2}T} = e^{j(2l-1)\pi} = e^{j2l\pi} e^{-j\pi} = -1 + j0 \quad l \in \mathbb{Z} \\ z &= e^{sT} \Big|_{s=j\frac{(2l+1)\omega_s}{2}} = e^{j\frac{(2l+1)\omega_s}{2}T} = e^{j(2l+1)\pi} = e^{j2l\pi} e^{j\pi} = -1 + j0 \quad l \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.205)$$

To pomeni, da se vse daljice, ki so v ravnini s glede na daljico v prejšnji točki premaknjene za celoštevilski mnogokratnik frekvence vzorčenja (v imaginarni smeri) preslikajo v krožnico enote v ravnini z .

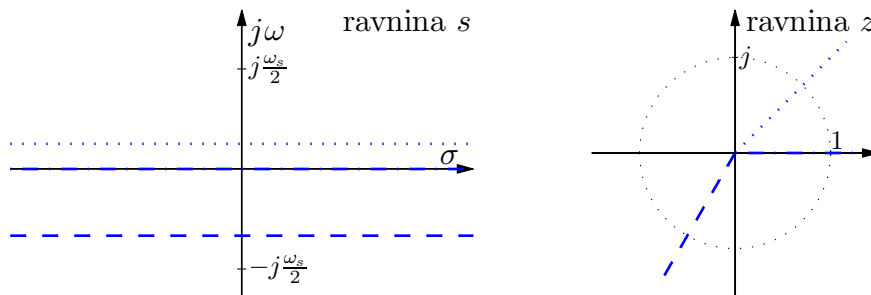
Krivulje konstantnega relativnega časa umiritve $s = \sigma_c + j\omega$, kjer je σ_c konstanten, ω pa se spreminja od $-\infty$ do ∞ , se preslikajo v krožnice s polmerom $e^{\sigma_c T}$:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=\sigma_c+j\omega} = e^{(\sigma_c+j\omega)T} = e^{\sigma_c T} e^{j\omega T} \\ |z| &= e^{\sigma_c T} \\ \arg z &= \omega T \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (3.206)$$

Preslikava krivulj konstantnega relativnega časa umiritve je prikazana na sliki 3.23, kjer je ena med izbranimi krivuljami tudi imaginarna os (prikazana je s črtkano-pikčasto črto). Kot smo videli že pri preslikavi imaginarne osi ravnine s , se enolično preslika le interval $\omega \in (-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2})$.

Krivulje konstantne frekvence $s = \sigma + j\omega_c$, kjer je ω_c konstanten, σ pa se spreminja od $-\infty$ do ∞ , se preslikajo v poltrake z izhodiščem v $z = 0$, ki tvorijo s pozitivnim delom realne osi kot $\omega_c T$:

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \Big|_{s=\sigma+j\omega_c} = e^{(\sigma+j\omega_c)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega_c T} \\ |z| &= e^{\sigma T} \in (0, \infty) \\ \arg z &= \omega_c T \end{aligned} \quad (3.207)$$



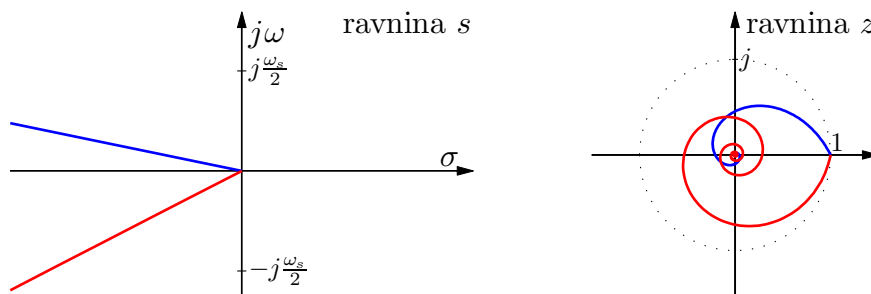
Slika 3.24: Preslikava krivulj konstantne frekvenca oz. vodoravnih premic iz ravnine s

Preslikava krivulj konstantne frekvenca je prikazana na sliki 3.24.

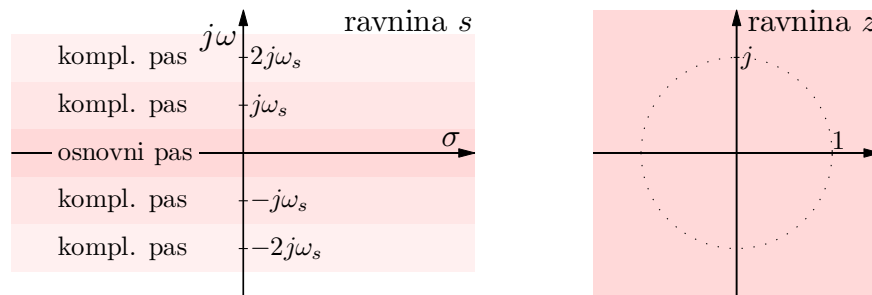
Krivulje konstantnega relativnega koeficienta dušenja so predstavljene s konjugirano kompleksnim parom poltrakov $s = \left(-\zeta_c \pm j\sqrt{1-\zeta_c^2}\right)\omega_n$, kjer je $0 \leq \zeta_c \leq 1$ konstanten, ω_n pa se spreminja od 0 do ∞ . Preslikajo se v spiralo v ravnini z :

$$\begin{aligned}
 z &= e^{sT} \Big|_{s = \left(-\zeta_c \pm j\sqrt{1-\zeta_c^2}\right)\omega_n} = e^{\left(-\zeta_c \pm j\sqrt{1-\zeta_c^2}\right)\omega_n T} = e^{-\zeta_c \omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta_c^2}} \\
 |z| &= e^{-\zeta_c \omega_n T} \quad \rightarrow \text{pada od 1 proti 0} \\
 \arg z &= \pm \omega_n T \sqrt{1-\zeta_c^2} \quad \rightarrow \text{raste od 0 proti } \infty \text{ (ali pada proti } -\infty)
 \end{aligned}
 \tag{3.208}$$

Parameter spiral je ω_n . Vidimo, da $\ln|z|$ in $\arg z$ naraščata linearno z ω_n , zato je to logaritmčna spirala. Preslikava krivulj konstantnega relativnega koeficienta dušenja je prikazana na sliki 3.25, pri čemer ima rdeča krivulja manjši koeficient dušenja ζ kot modra. Zaradi večje preglednosti je prikazana le ena krivulja konjugirano kompleksnega para.



Slika 3.25: Preslikava krivulj konstantnega relativnega koeficienta dušenja oz. poltrakov iz koordinatnega izhodišča ravnine s



Slika 3.26: Prikaz osnovnega pasu in komplementarnih pasov v ravnini s – zaprto področje vsakega od teh pasov se preslika v celotno področje ravnine z

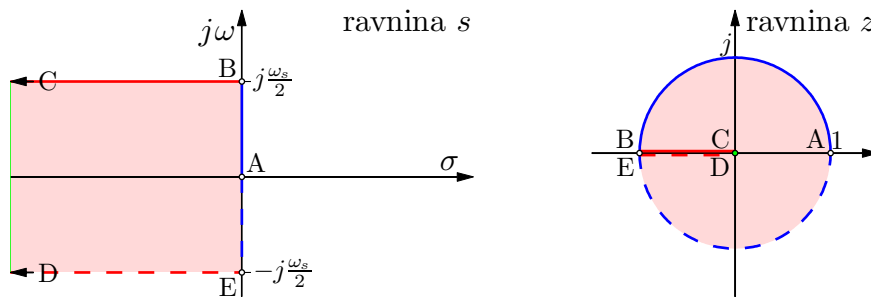
Pomembna ugotovitev, do katere smo prišli pri preučevanju preslikave točk iz ravnine s v ravnino z , je, da se v eno točko v ravnini z preslika neskončno točk iz ravnine s . Če namreč velja, da se točka s_0 preslika v točko z_0 , potem se v to točko preslika tudi množica točk $s_0 + jl\omega_s$ ($l \in \mathbb{Z}$), ki so glede na točko s_0 premaknjene za cel imaginarni mnogokratnik frekvence vzorčenja:

$$\begin{aligned} e^{sT} \Big|_{s=s_0} &= e^{s_0 T} = z_0 \\ e^{sT} \Big|_{s=s_0 + jl\omega_s} &= e^{s_0 T} e^{jl\omega_s T} = z_0 e^{jl \frac{2\pi}{T} T} = z_0 e^{j2\pi l} = z_0 \end{aligned} \quad (3.209)$$

Čeprav običajno v ravnini s prikazujemo ničle in pole obravnavanega zveznega sistema, je ta pristop mogoče uporabiti tudi za prikaz ničel in polov Laplaceovih transformirank. Če na tak način analiziramo signale, je ugotovitev (3.209) nov pogled na zgibanje frekvenc in teorem o vzorčenju. Vse frekvence signala, ki se razlikujejo za cel mnogokratnik frekvence vzorčenja, se namreč preslikajo v isto frekvenco v diskretnem prostoru, zato rekonstrukcija originalnega zveznega signala ni mogoča.

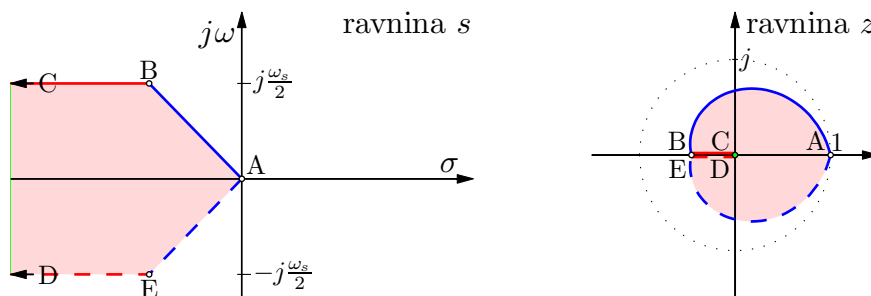
Tako smo prišli do definicije osnovnega pasu. To je pas v ravnini s , ki ga navzgor in navzdol omejujeta premici $j\omega = j\frac{\omega_s}{2}$ in $j\omega = -j\frac{\omega_s}{2}$. Osnovni pas je prikazan na sliki 3.26 s temnejšim barvnim odtenkom. Zaprto področje (to je tisto področje, ki vključuje tudi njegov rob) osnovnega pasu v ravnini s se preslika v celotno področje ravnine z . Kot vemo, se tudi vsaka množica, ki je premaknjena za cel imaginarni mnogokratnik frekvence vzorčenja, preslika v isto področje – torej celotno ravnino z . Tem premaknjenim pasovom zato pravimo komplementarni pasovi.

Če želimo, da pri vzorčenju ne prihaja do zgibanja frekvenc, morajo vsi poli zveznega signala ležati v osnovnem pasu ravnine s (teorem o vzorčenju zahteva, da poli ležijo strogo znotraj osnovnega pasu, ker $f_h < \frac{f_s}{2}$). Pri sistemih vodenja običajno obravnavamo (in želimo doseči) omejene signale, katerih poli ležijo v levi



Slika 3.27: Preslikava leve polovice osnovnega pasu v ravnini s v krog enote v ravnini z

polravnini ali na imaginarni osi (poli na imaginarni osi morajo biti enojni). Zato si pogledjmo, kam se preslika del osnovnega pasu, ki leži v levi polravnini. Analizirali bomo torej področje, ki je omejeno s poltrakoma $s = \sigma \pm j\frac{\omega_s}{2}$ ($\sigma \in (-\infty, 0]$) in daljico $[-j\frac{\omega_s}{2}, j\frac{\omega_s}{2}]$. Prikazano je na sliki 3.27. Za bolj nazoren prikaz izvedimo preslikavo roba področja po odsekih. Daljica med točkama A in B se preslika v krožni lok s polmerom 1, faza pa narašča od 0 do π . Poltrak med B in C se preslika v daljico med -1 in 0. Zaradi znanih dejstev se tudi poltrak med D in E preslika v isto daljico med 0 in -1 . Daljica med E in A se preslika v krožni lok s polmerom 1, faza pa narašča od $-\pi$ do 0. Zaprto osenčeno področje (torej vključno z robom) ravnine s na sliki 3.27 se torej preslika v zaprt krog enote (ta vključuje krožnico enote). Kot rečeno, nas zanima osenčeno področje brez rdečih poltrakov na sliki 3.27 (rdeča poltraka v ravnini s nista vključena zaradi zahtev teorema o vzorčenju, ki v enačbi ne dopušča enakosti). Obravnavano področje ravnine s se preslika v krog enote v ravnini z , ki pa mu manjka del na negativni realni osi (rdeča izvlečena in rdeča črtkana daljica tam sovpadata). Če zahtevamo, da signali konvergirajo proti 0, je pri legi polov signala izključeno modro področje (torej enotina krožnica v ravnini z). Če pa dopuščamo vse omejene signale, potem poli signala v ravnini z lahko ležijo tudi na enotini krožnici (razen v točki $z = -1$).



Slika 3.28: Preslikava dela osnovnega pasu z relativnim dušenjem večjim od ζ_c

Pri načrtovanju vodenja je še posebej zanimivo podpodročje osnovnega pasu, kjer ležijo poli signala z relativnim dušenjem večjim od ζ_c . Temu področju ustrezajo zvezni signali, ki bodisi eksponentno konvergirajo proti 0 bodisi izzvenijo kot dušeno nihanje z dovolj visokim koeficientom dušenja. Če združimo informacijo na slikah 3.25 in 3.27, dobimo preslikavo področja stabilnih polov z relativnim dušenjem večjim od ζ_c , kar prikazuje slika 3.28.

Čeprav smo povezavo med ravninama s in z opazovali v luči polov transformirank, zelo podobne ugotovitve veljajo tudi za pole sistemov, čemur se bomo posvetili v poglavju 6.

Poglavje 4

Zapis diskretnih sistemov

V tem poglavju bomo vpeljali najbolj pogosto uporabljane zapise diskretnih sistemov. Predstavili bomo diferenčne enačbe in diskretno prenosno funkcijo ter pokazali, kako lahko diskretni sistem zapišemo v prostoru stanj. Obravnavali bomo tudi načine za prehajanje med zapisi ter orodja za določanje odzivov diskretnih sistemov.

4.1 Diferenčne enačbe

Diferenčne enačbe predstavljajo enega osnovnih načinov za predstavitev diskretnega sistema. Njihova vloga je zelo primerljiva z vlogo diferencialnih enačb pri opisu zveznih dinamičnih sistemov.

Diferenčna enačba je enačba, ki povezuje različne vzorce iskanega zaporedja $y(k)$ z vzorci danega zaporedja $u(k)$. Diferenčne enačbe delimo glede na linearnost na linearne in nelinearne, glede na časovno spremenljivost pa na enačbe s konstantnimi in enačbe s spremenljivimi koeficienti. Pri naši obravnavi se bomo omejili na linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti. Primer tovrstne enačbe je:

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \dots + b_nu(k) \quad (4.1)$$

Zgornja diferenčna enačba definira relacijo med vzorci $y(k)$, $y(k+1)$, \dots in $y(k+n)$ iskanega zaporedja $y(k)$. Razliko med največjim in najmanjšim indeksom zaporedja y v diferenčni enačbi imenujemo red diferenčne enačbe. Red diferenčne

enačbe (4.1) je torej n . Podobno kot pri reševanju diferencialnih enačb, dobimo tudi pri reševanju diferenčnih enačb splošno rešitev, ki predstavlja neskončno družino zaporedij. Če hočemo dobiti partikularno rešitev diferenčne enačbe n -tega reda, je potrebno podati n začetnih pogojev. Idealno je, če so podane vrednosti zaporedja v prvih n vzorcih, torej:

$$y(0), y(1), \dots, y(n-1) \quad (4.2)$$

Obstajajo metode za neposredno reševanje diferenčnih enačb, a mi se bomo omejili le na reševanje s pomočjo z -transformacije. Če torej na diferenčni enačbi (4.1) izvedemo z -transformacijo, dobimo:

$$\begin{aligned} & z^n Y(z) - y(0)z^n - y(1)z^{n-1} - \dots - y(n-1)z + \\ & + a_1 [z^{n-1}Y(z) - y(0)z^{n-1} - y(1)z^{n-2} - \dots - y(n-2)z] + \dots + \\ & + a_n Y(z) = \\ & = b_0 [z^n U(z) - u(0)z^n - u(1)z^{n-1} - \dots - u(n-1)z] + \\ & + b_1 [z^{n-1}U(z) - u(0)z^{n-1} - u(1)z^{n-2} - \dots - u(n-2)z] + \dots + \\ & + b_n U(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

kjer smo večkrat upoštevali teorem časovnega premika v levo. Enačba (4.3) izgleda precej komplicirano, a edina neznana veličina v njej je z -transformiranka $Y(z)$, ki jo izrazimo iz enačbe in na njej izvedemo inverzno z -transformacijo, s čimer pridemo do iskanega zaporedja $y(k)$.

Primer 4.1

Fibonaccijevo zaporedje je tisto zaporedje, v katerem je vsota predhodnih dveh členov enaka naslednjemu členu. Fibonaccijevo zaporedje $x(k)$ lahko torej definiramo z diferenčno enačbo:

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \quad (4.4)$$

Izračunajte z -transformacijo $X(z)$ zgornjega zaporedja in inverzno z -transformacijo funkcije $X(z)$. Ali je torej mogoče člene Fibonaccijevega zaporedja podati eksplicitno kot funkcijo indeksa v zaporedju k (in ne le rekurzivno kot v enačbi 4.4)?

Izvedemo z-transformacijo na enačbi (4.4) in dobimo:

$$\begin{aligned} z^2 X(z) - x(0)z^2 - x(1)z &= zX(z) - x(0)z + X(z) \\ z^2 X(z) - z &= zX(z) + X(z) \\ X(z) &= \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Inverzno z-transformacijo lahko izvedemo z uporabo izreka o residuih, kjer moramo poiskati residue funkcije $X(z)z^{k-1}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{z^k}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} &= \left[\frac{z^k}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right]_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{Res}_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{z^k}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} &= \left[\frac{z^k}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right]_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{-\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Končna rešitev je vsota obeh residuov:

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \right], \quad k \geq 0 \\ &\doteq 0,4472 [1,6180^k - (-0,6180)^k], \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Iz enačbe (4.7) vidimo, da se da tudi rekurzivno podano Fibonaccijevo zaporedje podati v eksplicitni obliki, tako da lahko poljuben člen zaporedja izračunamo, ne da bi za to izračunali vse prejšnje člene. Zanimiva je ugotovitev, da zavzame funkcija $x(k)$ v enačbi (4.7) pri vstavitvi naravnega števila k za svoj argument vedno vrednost iz množice naravnih števil.

4.2 Diskretna prenosna funkcija

Izkaže se, da je mogoče linearni časovno nespremenljivi diskretni sistem n -tega reda modelirati z linearno diferenčno enačbo n -tega reda s konstantnimi koeficienti, kot je enačba (4.1). Spoznali bomo, da takšno diferenčno enačbo dobimo tudi z diskretizacijo linearnega časovno nespremenljivega zveznega sistema n -tega reda. Obravnava linearnih časovno nespremenljivih sistemov je pri diskretnih sistemih zelo podobna kot pri zveznih. Če namreč izhajamo iz diferenčne enačbe (4.1), pri kateri $u(k)$ interpretiramo kot vhodno zaporedje v sistem, $y(k)$ pa kot izhodno zaporedje, lahko definiramo tudi diskretno prenosno funkcijo $G(z)$.

Dobimo jo, če v z-transformaciji diferenčne enačbe, ki opisuje vhodno-izhodno obnašanje sistema, postavimo vse začetne pogoje na 0. V enačbi (4.3) torej upoštevamo

$$y(0) = 0, y(1) = 0, \dots, y(n-1) = 0, u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(n-1) = 0 \quad (4.8)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) &= b_0 z^n U(z) + b_1 z^{n-1} U(z) + \dots + b_n U(z) \\ G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Če je diskretni sistem opisan s prenosno funkcijo, dobimo odziv sistema tako, da množimo z-transformacijo vhodnega zaporedja s prenosno funkcijo ter na tem produktu izvedemo inverzno z-transformacijo:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1} \{G(z) \mathcal{Z} \{u(k)\}\} \quad (4.10)$$

Alternativa analitičnemu reševanju diferenčne enačbe je seveda simulacija na digitalnem računalniku oz. numerično reševanje, kjer iz enačbe (4.1) izpostavimo $y(k+n)$ in enačbo rešujemo rekurzivno, kar je pogosto enostavneje – še posebej, če diferenčna enačba ni linearna.

Primer 4.2

Določite odziv diskretnega sistema

$$G(z) = \frac{z^{-1} - 0,7z^{-2}}{(1 - 0,9z^{-1})(1 - 0,5z^{-1})} \quad (4.11)$$

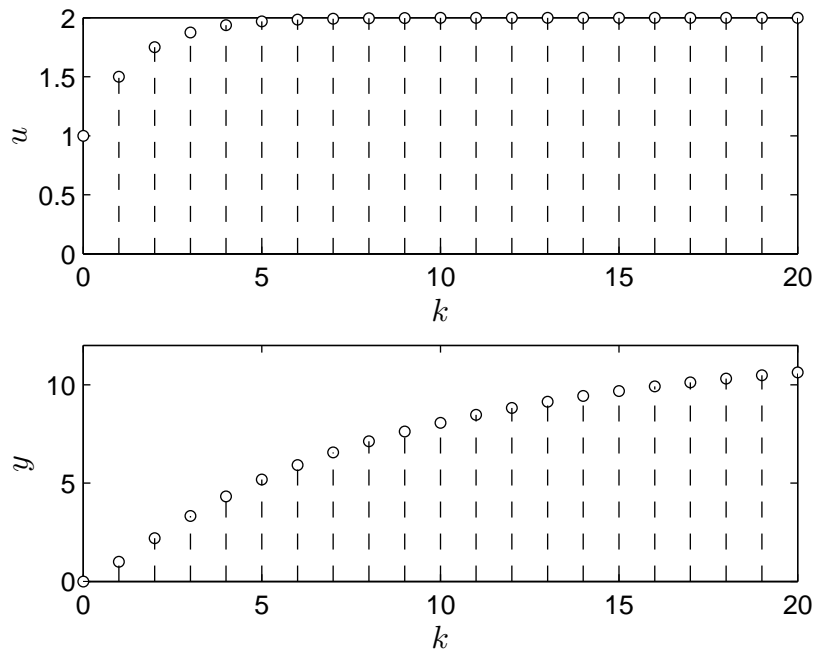
na vzbujalni signal

$$u(k) = 2 - 0,5^k \quad (4.12)$$

Skicirajte vzbujanje $u(k)$ in odziv $y(k)$ sistema.

Podobne naloge enostavneje rešujemo, če operiramo s pozitivnimi potencami z . Torej uporabimo z-transformiranko vzbujalnega signala v naslednji obliki:

$$U(z) = 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad (4.13)$$

Slika 4.1: Vzbujanje $u(k)$ in odziv $y(k)$ sistema iz primera 4.2

Tudi prenosno funkcijo zapišemo po pozitivnih potencah z :

$$G(z) = \frac{z - \frac{7}{10}}{(z - \frac{9}{10})(z - \frac{1}{2})} \quad (4.14)$$

$Y(z)$ je torej:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^2(z - \frac{7}{10})}{(z - 1)(z - \frac{9}{10})(z - \frac{1}{2})^2} \quad (4.15)$$

Uporabimo eno od metod za določanje inverzne z -transformacije in dobimo:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = 12 - \frac{45}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^k - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k - k \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (4.16)$$

Vzbujanje $u(k)$ in odziv $y(k)$ sta prikazana na sliki 4.1.

Definirajmo še impulzni odziv diskretnega sistema $h(k)$. To je odziv sistema na vhodno funkcijo $u(k) = \delta(k)$, ki je definirana kot

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Ker je $\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$, izračunamo impulzni odziv diskretnega sistema, ki ga opisuje prenosna funkcija $G(z)$, na naslednji način:

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} \quad (4.18)$$

4.3 Diskretna konvolucija

Linearni časovno nespremenljivi sistem naj ima impulzni odziv $h(k)$. To pomeni, da povzroči enotin impulz pri $k = 0$ odziv $h(k)$. Zakasnen impulz $\delta(k - m)$, ki se pojavi pri $k = m$, povzroči zakasnen odziv $h(k - m)$. Vhodni signal diskretnega sistema si lahko predstavljamo kot vlak impulzov, kjer ima vsak impulz ustrezno vrednost. Vhod v sistem in odziv sistema lahko zato predstavimo v naslednji obliki (zapis $u(k) \rightarrow y(k)$ označuje vzročno-posledično relacijo vzbujanje-odziv):

$$\begin{array}{rcl} u(0)\delta(k) & \longrightarrow & u(0)h(k) \\ u(1)\delta(k-1) & \longrightarrow & u(1)h(k-1) \\ u(2)\delta(k-2) & \longrightarrow & u(2)h(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(m)\delta(k-m) & \longrightarrow & u(m)h(k-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad (4.19)$$

Ker lahko vzbujalni signal oz. vlak impulzov $u(k)$ dobimo tako, da seštejemo vse vrstice (ki predstavljajo posamezne pulze) na levi strani puščic v enačbi (4.19)

$$u(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m)\delta(k-m) \quad (4.20)$$

lahko v splošnem zaradi linearnosti sistema dobimo odziv sistema $y(k)$, tako da seštejemo posamezne odzive na desni strani puščic v enačbi (4.19):

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m)h(k-m) \quad (4.21)$$

Ker je operacija konvolucije komutativna, lahko izraz (4.21) napišemo tudi v obliki

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)u(k-m) \quad (4.22)$$

Ker sta tako $h(k)$ kot $u(k)$ kavzalna, velja $h(k-m) = 0$ in $u(k-m) = 0$ za $m > k$, zato lahko nadomestimo zgornjo mejo seštevanja v enačbah (4.21) in (4.22) tudi s k .

4.4 Predstavitev sistema v prostoru stanj

Prostor stanj omogoča alternativni zapis dinamičnega sistema. Prednost tega zapisa pred zapisom v obliki prenosnih funkcij je, da je možno opisati tudi obnašanje nelinearnih sistemov in časovno spremenljivih sistemov. Dobra lastnost tega zapisa je tudi, da je veliko konceptov (kot npr. vodljivost, spoznavnost, regulator stanj ipd.) mogoče praktično identično obravnavati pri časovno zveznih in časovno diskretnih sistemih. Zato si na začetku osvežimo znanje o obravnavi zveznih sistemov v prostoru stanj.

4.4.1 Predstavitev zveznega sistema v prostoru stanj

V splošnem je zapis *nelinearnega časovno spremenljivega zveznega sistema* v prostoru stanj naslednji:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t), t) \\ y_z(t) &= g_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t), t)\end{aligned}\tag{4.23}$$

kjer je $\mathbf{f}_z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $g_z : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Poenostavljeno povedano: \mathbf{f}_z je vektorska nelinearna preslikava, g_z pa skalarna nelinearna preslikava. Prva enačba v (4.23) se imenuje *enačba stanj*, druga pa je *izhodna enačba*. Če eksplicitne odvisnosti obeh funkcij od časa ni, govorimo o *nelinearnem časovno nespremenljivem sistemu*:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t)) \\ y_z(t) &= g_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t))\end{aligned}\tag{4.24}$$

Obravnava nelinearnih sistemov je zahtevna, zato sistem pogosto lineariziramo v ravnovesni točki sistema. *Linearni časovno nespremenljivi sistem* lahko opišemo z linearnim sistemom enačb (s konstantnimi koeficienti) v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z u_z(t) \\ y_z(t) &= \mathbf{c}_z^T \mathbf{x}_z(t) + d_z u_z(t)\end{aligned}\tag{4.25}$$

kjer je \mathbf{A}_z kvadratna matrika dimenzije $n \times n$, \mathbf{b}_z in \mathbf{c}_z sta stolpna vektorja dimenzije n , d_z pa skalar. Matriko \mathbf{A}_z imenujemo *sistemska matrika*, vektor \mathbf{b}_z *vhodni vektor*, vektor \mathbf{c}_z^T *izhodni vektor*, skalar d_z pa *vhodno-izhodna konstanta*. Obstaja še četrta možnost, ko je sistem *linearen, a časovno spremenljiv*. Takrat se v zapisu (4.25) spremeni le to, da postanejo matrike \mathbf{A}_z , \mathbf{b}_z , \mathbf{c}_z in d_z časovno spremenljive oz. odvisne od časa:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{A}_z(t) \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z(t) u_z(t) \\ y_z(t) &= \mathbf{c}_z^T(t) \mathbf{x}_z(t) + d_z(t) u_z(t)\end{aligned}\tag{4.26}$$

V vseh naštetih primerih podaja stanje sistema $\mathbf{x}_z(t_0)$ informacijo, ki skupaj s poznavanjem vhodnega signala $u_z(t)$ za $t \geq t_0$ zadošča za natančno poznavanje odziva sistema v prihodnosti. Lahko rečemo, da poznavanje stanja sistema v vsakem trenutku nadomešča poznavanje dogajanja v preteklosti, če nas zanima le napoved prihodnjega obnašanja sistema. Zapis sistema v prostoru stanj na zelo ekspliciten način podaja dinamiko sistema, saj govori enačba stanj neposredno o spreminjanju vektorja stanj v prihodnosti.

4.4.2 Predstavitev diskretnega sistema v prostoru stanj

Na analogen način kot zvezne sisteme lahko v prostoru stanj obravnavamo tudi diskretne sisteme. V splošnem je zapis *nelinearnega časovno spremenljivega sistema* v prostoru stanj naslednji:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(\mathbf{x}(k), u(k), k)\end{aligned}\tag{4.27}$$

kjer je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Poenostavljeno povedano – \mathbf{f} je vektorska nelinearna preslikava, g pa skalarna nelinearna preslikava. Prva enačba v (4.27) se imenuje *enačba stanj*, druga pa je *izhodna enačba*. Če eksplicitne odvisnosti obeh funkcij od časa ni, govorimo o *nelinearnem časovno nespremenljivem sistemu*:

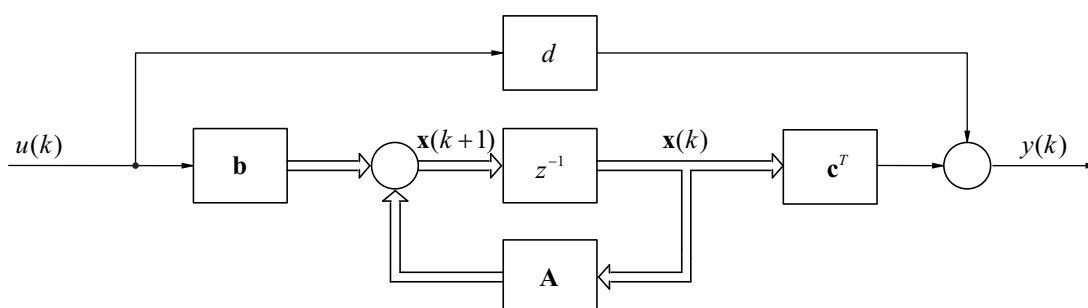
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) &= g(\mathbf{x}(k), u(k))\end{aligned}\tag{4.28}$$

Obravnava nelinearnih sistemov je zahtevna, zato sistem pogosto lineariziramo v ravnovesni točki sistema. *Linearni časovno nespremenljivi sistem* lahko opišemo z linearnim sistemom enačb (s konstantnimi koeficienti) v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k)\end{aligned}\tag{4.29}$$

kjer je \mathbf{A} kvadratna matrika dimenzije $n \times n$, \mathbf{b} in \mathbf{c} sta stolpna vektorja dimenzije n (\mathbf{c}^T je vrstični vektor), d pa skalar. Matriko \mathbf{A} imenujemo *sistemska matrika*, vektor \mathbf{b} *vhodni vektor*, vektor \mathbf{c}^T *izhodni vektor*, skalar d pa *vhodno-izhodna konstanta*. Če se dinamika linearnega sistema spreminja s časom, pravimo, da je sistem *linearen časovno spremenljiv*. Opišeta ga enačbi:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k) + d(k)u(k)\end{aligned}\tag{4.30}$$



Slika 4.2: Shematski prikaz realizacije diskretnega sistema s spremenljivkami stanja

V vseh naštetih primerih podaja stanje sistema $\mathbf{x}(k_0)$ informacijo, ki skupaj s poznavanjem vhodnega signala $u(k)$ za $k \geq k_0$ zadošča za natančno poznavanje odziva sistema v prihodnosti. Lahko rečemo, da poznavanje stanja sistema v vsakem trenutku nadomešča poznavanje dogajanja v preteklosti, če nas zanima le napoved prihodnjega obnašanja sistema. Zapis sistema v prostoru stanj na zelo ekspliciten način podaja dinamiko sistema, saj govori enačba stanj neposredno o spreminjanju vektorja stanj v prihodnosti.

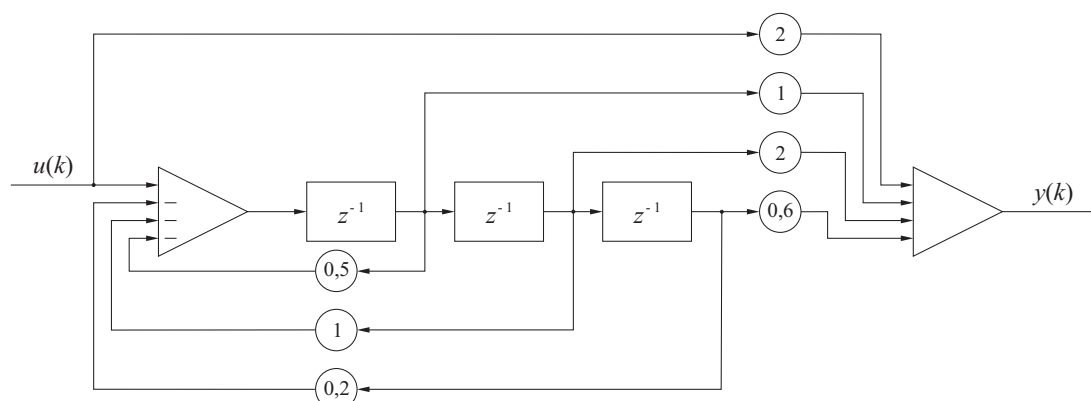
Zapis diskretnih sistemov v prostoru stanj je zelo primeren za kasnejšo simulacijo teh sistemov. Edini dinamični element v tem zapisu je namreč predikcija vektorja stanj za trenutek $k + 1$. Če poskušamo narediti bločno oz. simulacijsko shemo tovrstnega sistema torej potrebujemo zakasnilni blok (v elektronskih vezjih je to flip-flop D), ki ima prenosno funkcijo z^{-1} . Le-ta tako predstavlja osrednji blok simulacijskih shem diskretnih sistemov (podobno kot je bil pri zveznih sistemih integrator s prenosno funkcijo $\frac{1}{s}$). Čeprav zapis v prostoru stanj omogoča relativno enostavno simulacijo tako nelinearnih kot časovno spremenljivih sistemov, se bomo tukaj omejili na zapis sistema (4.29), katerega simulacijsko shemo prikazuje slika 4.2. Stanja diskretnega sistema lahko glede na to sliko interpretiramo tudi kot izhode zakasnilnih oz. pomnilnih blokov.



Primer 4.3

Zapišite v prostoru stanj diskretni sistem, katerega simulacijska shema je prikazana na sliki 4.3.

V diskretnem sistemu so stanja izhodi zakasnilnih blokov (z^{-1}). Kadar nas zanima vhodno-izhodno obnašanje sistema, oštevilčenje stanj ni pomembno.



Slika 4.3: Bločna shema diskretnega sistema za primer 4.3

V našem primeru označimo izhod desnega zakasnilnega bloka z $x_1(k)$, izhod srednjega z $x_2(k)$ in izhod levega z $x_3(k)$. Signal na vhodu zakasnilnega bloka je seveda enokoračna predikcija signala na izhodu:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= -0,2x_1(k) - x_2(k) - 0,5x_3(k) + u(k) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Tudi izhodni signal zlahka izrazimo kot funkcijo stanj in vhoda v sistem:

$$y(k) = 0,6x_1(k) + 2x_2(k) + x_3(k) + 2u(k) \quad (4.32)$$

Običajno sistem zapišemo v obliki matričnih enačb:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,2 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0,6 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 2u(k) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Zgornja predstavitev sistema je ena od kanoničnih oblik zapisa diskretnega sistema. Gre za vodljivostno regulatorsko kanonično obliko, pri kateri iz zadnje vrstice matrike \mathbf{A} direktno razberemo koeficiente imenovalca prenosne funkcije $\frac{Y(z)}{U(z)}$, iz vektorja \mathbf{c} pa koeficiente števca omenjene prenosne funkcije.

4.4.3 Zapis sistema v prostoru stanj

Kot smo že omenili, lahko večino diskretnih sistemov opišemo z diferenčnimi enačbami. Tipični linearni časovno nespremenljivi sistem z enim vhomom in enim izhodom lahko opišemo z linearno diferenčno enačbo s konstantnimi koeficienti (4.1)

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \dots + b_nu(k) \quad (4.34)$$

kjer je y izhod diskretnega sistema, u vhod sistema ter a_i in b_i konstantni koeficienti. Pogosto je bolj primerno opisati obnašanje takega sistema z n diferenčnimi enačbami prvega reda namesto z eno diferenčno enačbo reda n . Teh n enačb prvega reda lahko potem zapišemo kot eno vektorsko matrično diferenčno enačbo, ki jo imenujemo zapis sistema v prostoru stanj.

Če uporabimo kot vhodni signal v sistem (4.34) znano zaporedje $u(k)$ ($k \geq 0$) in želimo določiti odziv sistema za $k \geq 0$, to lahko storimo, če poznamo n zaporednih vrednosti izhoda sistema. Tem n zaporednim vrednostim smo pri reševanju diferenčnih enačb rekli začetni pogoj, pri obravnavi v prostoru stanj pa predstavljajo stanje sistema. Bolj splošno lahko definiramo stanje sistema kot minimalno količino informacije, ki je potrebna za določitev obnašanja sistema v prihodnosti, če sta podana vhodno zaporedje in diferenčna enačba sistema. V sistemu, ki ga opisuje diferenčna enačba n -tega reda, torej za določitev stanja potrebujemo n spremenljivk, npr. n zaporednih vrednosti izhoda sistema y . Stanje diskretnega sistema lahko predstavimo tudi kot točko v n -dimenzionalnem evklidskem prostoru, ki ga imenujemo prostor stanj ali fazni prostor. Poudariti moramo, da je lahko več množic z n spremenljivkami, ki opisujejo stanje sistema. Še več, stanje sistema je mogoče zapisati tudi z več kot n spremenljivkami, vendar je takrat vektor stanj redundanten. Seveda pa stanja ni mogoče opisati z manj kot n spremenljivkami.



Primer 4.4

Vzemimo enostaven primer diskretnega sistema drugega reda, ki ga lahko opišemo z naslednjo diferenčno enačbo

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = b_2u(k) \quad (4.35)$$

kjer so a_1 , a_2 in b_2 konstante. Zapišimo sistem v prostor stanj.

Diferenčno enačbo drugega reda (4.35) lahko glede na spremenljivke stanja sistema nadomestimo z dvema diferenčnima enačbama prvega reda. Če izberemo za spremenljivki stanja diskretnega sistema

$$\begin{aligned}x_1(k) &= y(k) \\x_2(k) &= y(k+1)\end{aligned}\tag{4.36}$$

dobimo diferenčni enačbi prvega reda

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= y(k+1) = x_2(k) \\x_2(k+1) &= y(k+2) = -a_2y(k) - a_1y(k+1) + b_2u(k) = \\&= -a_2x_1(k) - a_1x_2(k) + b_2u(k)\end{aligned}\tag{4.37}$$

ki ju lahko zapišemo v naslednji vektorsko-matrični obliki

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1) \\x_2(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\-a_2 & -a_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1(k) \\x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\b_2\end{bmatrix} u(k)\tag{4.38}$$

Izhodno spremenljivko sistema $y(k)$ pa dobimo s pomočjo enačbe (4.36)

$$y(k) = x_1(k)\tag{4.39}$$

oziroma v matrični obliki

$$y(k) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1(k) \\x_2(k)\end{bmatrix}\tag{4.40}$$

V splošnem lahko pri diferenčni enačbi (4.34), ki ne vsebuje ničel ($b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$), definiramo spremenljivke stanja

$$\begin{aligned}x_1(k) &= y(k) \\x_2(k) &= y(k+1) \\&\vdots \\x_n(k) &= y(k+n-1)\end{aligned}\tag{4.41}$$

Tako dobimo n diferenčnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= y(k+1) = x_2(k) \\&\vdots \\x_{n-1}(k+1) &= y(k+n-1) = x_n(k) \\x_n(k+1) &= y(k+n) = -a_nx_1(k) - \dots - a_1x_n(k) + b_nu(k)\end{aligned}\tag{4.42}$$

ki jih lahko zapišemo v naslednji vektorsko-matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u(k) \quad (4.43)$$

Izhodno spremenljivko sistema $y(k)$ dobimo z upoštevanjem enačbe (4.41)

$$y(k) = x_1(k) \quad (4.44)$$

oziroma v matrični obliki

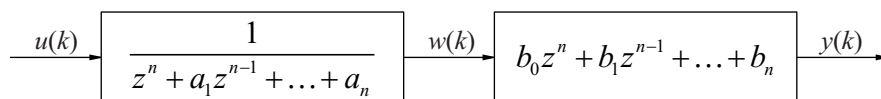
$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Če uporabimo matrične oznake, lahko enačbo stanj (4.43) in izhodno enačbo (4.45) združimo v običajni zapis linearnega časovno nespremenljivega sistema reda n v prostoru stanj (4.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

kjer je sistemska matrika \mathbf{A} kvadratna matrika dimenzije $n \times n$, vhodni vektor \mathbf{b} je stolpni vektor dimenzije n , izhodni vektor \mathbf{c}^T je vrstični vektor dimenzije n , d pa skalar, ki podaja trenutni vpliv vhoda sistema na njegov izhod.

Pogosto prenosna funkcija sistema vsebuje tudi ničle, kar se kaže v dejstvu, da je v enačbi (4.34) vsaj en koeficient b_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) različen od 0. Tedaj ne moremo uporabiti opisane metode, kajti za realizacijo bi potrebovali tudi vhodni signal v trenutkih $k+1$, $k+2$ itd. Zato ločimo števec in imenovalc prenosne funkcije in opišemo sistem z bločno shemo na sliki 4.4.



Slika 4.4: Bločna shema delitvene realizacije diskretnega sistema z ničlami

Diferenčno enačbo, ki opisuje prvi blok, lahko po znanem postopku opišemo s spremenljivkami stanja $x_1(k) = w(k)$, $x_2(k) = w(k+1)$ itd. in z matrično diferenčno enačbo, ki je zelo podobna enačbi (4.43):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.47)$$

Diferenčno enačbo, ki opisuje drugi blok na sliki 4.4, lahko interpretiramo kot izhodno enačbo sistema, saj je imenovalac drugega bloka enak 1:

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 w(k+n) + b_1 w(k+n-1) + \dots + b_n w(k) = \\ &= b_0 x_n(k+1) + b_1 x_n(k) + \dots + b_n x_1(k) = b_0 x_n(k+1) + [b_n \ \dots \ b_1] \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Enačbi (4.47) in (4.48) imata primerno obliko za predstavitev bločnega diagrama sistema. Prikazan je na sliki 4.5. Potrebno je poudariti, da ta bločni diagram vsebuje le osnovne gradnike in je uporaben tudi ali predvsem za simulacijo sistema. Kot smo že spoznali, je osnovni gradnik simulacijske sheme zakasnilni blok z^{-1} , ki v sistem vnaša dinamiko. Zakasnilni blok je zelo enostaven za realizacijo na digitalnem računalniku, saj je izveden v obliki digitalnega spomina.

Enačbi (4.47) in (4.48) sta torej primerni za simulacijo sistema, ne gre pa za zapis sistema v prostoru stanj, ker je $y(k)$ odvisen od $x_n(k+1)$. Če vnesemo $x_n(k+1)$ iz enačbe (4.47) v enačbo (4.48), dobimo naslednji izraz

$$y(k) = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \cdots \quad b_1 - b_0 a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (4.49)$$

oziroma izhodni vektor

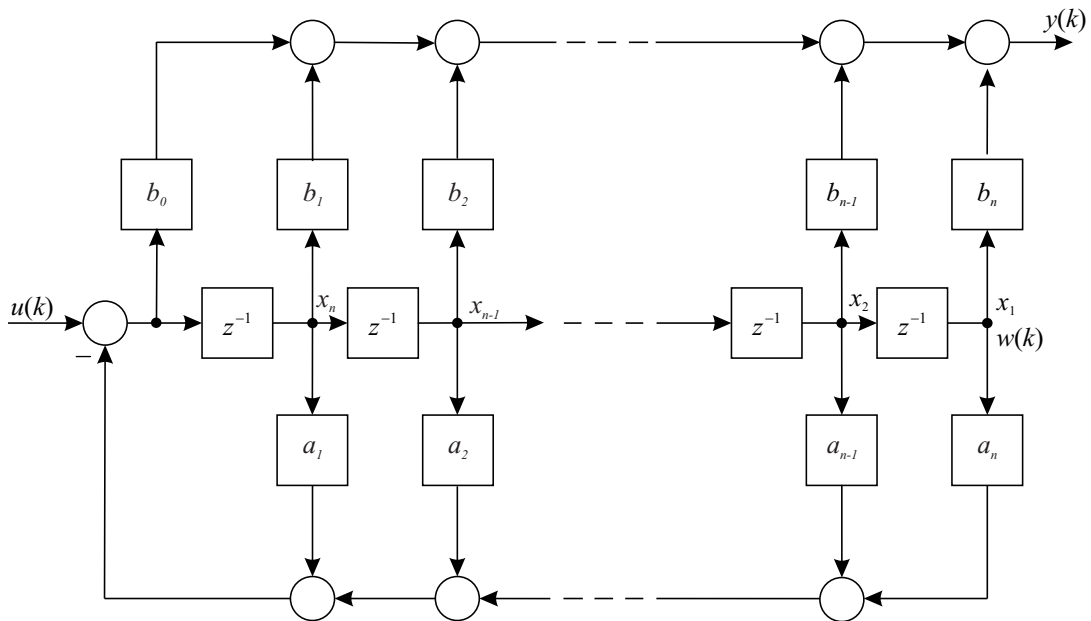
$$\mathbf{c}^T = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \dots \quad b_1 - b_0 a_1] \quad (4.50)$$

in vhodno-izhodno konstanto

$$d = b_0 \quad (4.51)$$

Zelo pogosto diskretni sistem (še posebej, če gre za regulirani proces) ne reagira na vhodno vzbujanje v trenutku nastopa vzbujanja. To se kaže v dejstvu, da je koeficient b_0 enak 0. Takrat se izhodni vektor poenostavi:

$$\mathbf{c}^T = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1] \quad (4.52)$$



Slika 4.5: Bločni diagram diskretnega sistema z ničlami – zapis z enačbama (4.47) in (4.48)

4.4.4 Odziv diskretnega sistema

V tem razdelku bomo obravnavali postopke za izračun odziva diskretnega sistema. Najprej se bomo posvetili nevzbujanim oz. homogenim sistemom, nato pa obravnavo razširili še na sisteme z zunanjim vzbujanjem.

Odziv homogenega diskretnega sistema

Homogeni sistemi so sistemi brez zunanjega vzbujanja, kar pomeni, da je odziv zgolj posledica začetnega stanja sistema. Vzemimo homogeni diskretni sistem, ki ga lahko opišemo z vektorsko matrično diferenčno enačbo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (4.53)$$

Če je podano začetno stanje diskretnega sistema $\mathbf{x}(0)$, lahko izračunamo stanje v naslednjih trenutkih

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Z metodo popolne indukcije lahko dokažemo, da je splošna rešitev homogene diferenčne enačbe (4.53)

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad (4.55)$$

Matriko \mathbf{A}^k imenujemo *diskretna matrika prehajanja stanj*. To je matrika, ki daje pri homogenih diskretnih sistemih vektor spremenljivk stanja pri poljubnem k , če jo uporabimo kot operator na vektorju spremenljivk stanja pri $k = 0$. Diskretne matrike prehajanja stanj seveda ni potrebno računati z ročnim množenjem matrik \mathbf{A} , kar bi pri velikih k zahtevalo veliko časa in je numerično problematično, pač pa lahko njeno vrednost določimo eksaktno s teoretičnimi postopki. Tu bomo obravnavali le metodo inverzne z-transformacije, s katero na enostaven način izračunamo diskretno matriko prehajanja stanj. Povedati pa je potrebno, da je postopek kljub svoji enostavnosti še vedno zamuden. Če izvedemo z-transformacijo enačbe (4.53), dobimo:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) \quad (4.56)$$

Nato izvedemo inverzno z-transformacijo desne enačbe v (4.56) in rezultat primerjamo z enačbo (4.55) ter ugotovimo:

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \} \quad (4.57)$$

Primer 4.5

Določite odziv stanja homogenega diskretnega sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Najprej moramo izračunati matriko $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{4}{25} & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Izračunati moramo inverzno z-transformacijo matrike $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{3}(\frac{1}{5})^k & \frac{5}{3}(\frac{4}{5})^k - \frac{5}{3}(\frac{1}{5})^k \\ -\frac{4}{15}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{15}(\frac{1}{5})^k & \frac{4}{3}(\frac{4}{5})^k - \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^k \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Rešitev je torej:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\ -\frac{4}{15} \left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{15} \left(\frac{1}{5}\right)^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0 \quad (4.61)$$

Odziv diskretnega sistema z zunanjim vzbujanjem

Zapis sistema v prostoru stanj (4.29) podaja vektor stanj rekurzivno. Če enačbo izvajamo koračno, pridemo do eksplisitne rešitve. Najprej izračunajmo vektor spremenljivk stanja za $k = 1$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0) \quad (4.62)$$

Ob času $k = 2$ dobimo:

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) \quad (4.63)$$

Z upoštevanjem (4.62) se (4.63) glasi:

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1) \quad (4.64)$$

Z metodo matematične indukcije lahko dokažemo splošno rešitev nehomogenega linearnega diskretnega sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b}u(j) \quad (4.65)$$

Iz enačbe (4.65) vidimo, da je odziv vektorja stanj sestavljen iz odziva na začetno stanje $\mathbf{x}(0)$ in odziva na vzbujanje $u(k)$. Drugi člen desne strani te enačbe je vektorska oblika konvolucijske vsote. Izhod sistema dobimo iz stanja s pomočjo izhodne enačbe v (4.46):

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b}u(j) + du(k) \quad (4.66)$$

Računanje impulznega odziva iz zapisa sistema v prostoru stanj

Odziv diskretnega sistema v primeru ničelnih začetnih stanj sledi neposredno iz enačbe (4.66):

$$y(k) = \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b}u(j) + du(k) \quad (4.67)$$

V tem razdelku bomo predpostavili vzbujanje z enotnim impulzom $u(k) = \delta(k)$. Ker odziv na enotni impulz običajno označimo s $h(k)$, lahko zgornjo enačbo napišemo v rahlo spremenjeni obliki:

$$h(k) = \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} \delta(j) + d \delta(k) \quad (4.68)$$

V nadaljevanju bomo ločili tri primere:

- Računanje odziva za negativne čase ($k < 0$) – takrat je vsota v enačbi (4.68) enaka 0, saj je zgornja meja seštevanja nižja od spodnje; tudi drugi člen je enak 0, saj je vrednost enotnega impulza pri negativni vrednosti argumenta enaka 0:

$$k < 0 \Rightarrow h(k) = 0 \quad (4.69)$$

- Računanje odziva ob času $k = 0$ – takrat je vsota v enačbi (4.68) enaka 0, saj je zgornja meja seštevanja nižja od spodnje; drugi člen je enak d , saj je $\delta(0) = 1$:

$$k = 0 \Rightarrow h(k) = d \quad (4.70)$$

- Računanje odziva za pozitivne čase ($k > 0$) – takrat je drugi člen v enačbi (4.68) enak 0, saj je vrednost enotnega impulza pri pozitivni vrednosti argumenta enaka 0. Seštevanje v prvem členu se zreducira na en sam člen pri $j = 0$ (vsi ostali namreč odpadejo zaradi množenja z $\delta(j)$):

$$k > 0 \Rightarrow h(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} \quad (4.71)$$

Enačbe (4.69), (4.70) in (4.71) lahko povzamemo v bolj strnjeni obliki:

$$h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ d & k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & k > 0 \end{cases} \quad (4.72)$$

Z upoštevanjem enačbe (4.72) lahko enačbo (4.67) napišemo tudi drugače:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} h(k-j)u(j) + h(0)u(k) \quad (4.73)$$

Če oba člena združimo, dobimo znano formulo za računanje odziva sistema s konvolucijo impulznega odziva in vhodnega signala:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k h(k-j)u(j) \quad (4.74)$$

Računanje odziva diskretnega sistema s pretvorbo v z -prostor

Če nas zanima le odziv na vzbujanje, ga lahko poiščemo tudi s pomočjo z -transformacije enačbe stanj, s čimer se izognemo računanju konvolucijske vsote v (4.65):

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z) \quad (4.75)$$

Ker iščemo le vsiljeni odziv sistema, smo upoštevali $\mathbf{x}(0) = 0$. Spet torej potrebujemo matriko $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, ki jo množimo z vektorjem \mathbf{b} in z -transformacijo vzbujalnega signala, nakar produkt z inverzno z -transformacijo pretvorimo v časovni prostor, s čimer pridemo do iskanega odziva $\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z) \} \quad (4.76)$$



Primer 4.6

Določite odziv stanja diskretnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Matriko $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ smo izračunali že v prejšnji nalogi:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Vzbujalni signal je enotina stopnica, torej:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1} \quad (4.79)$$

Z-transformacija vektorja stanj je:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z - 1} = \\ &= \frac{z}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \begin{bmatrix} z \\ z - \frac{4}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \\ \frac{z(z - \frac{4}{25})}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Z inverzno z-transformacijo prejšnje enačbe pridemo do končnega rezultata:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{5}{12}(\frac{1}{5})^k + \frac{25}{4} \\ -\frac{16}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{1}{12}(\frac{1}{5})^k + \frac{21}{4} \end{bmatrix}, \quad k \geq 0 \quad (4.81)$$

Kadar nas zanima odziv sistema, kjer je prisotno tako zunanje vzbujanje kot tudi od nič različno začetno stanje, lahko posebej izračunamo oba odziva. Ker obravnavamo linearne sisteme, velja princip superpozicije in končni odziv je vsota prispevkov obeh posamičnih odzivov. Druga možnost pa je, da enačbo stanj

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (4.82)$$

obravnavamo kot običajno diferenčno enačbo, ki jo rešimo s pomočjo pretvorbe v z -prostor:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \quad (4.83)$$

Iz enačbe (4.83) izpeljemo $\mathbf{X}(z)$, nad katerim izvršimo inverzno z-transformacijo, s čimer pridemo do odziva vektorja stanj na začetno stanje in zunanje vzbujanje:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ \mathbf{X}(z) \} = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}U(z)] \} \quad (4.84)$$

4.4.5 Ravnovesno stanje diskretnega sistema

Diskretni sistem je v ravnovesnem stanju, ko je stanje v trenutku $k + 1$ enako stanju v trenutku k :

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{x}(k) \quad (4.85)$$

V primeru homogenega sistema, ki ga opisuje enačba (4.53), zapišemo to zahtevo v obliki

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) \quad (4.86)$$

oziroma

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) = 0 \quad (4.87)$$

kjer je \mathbf{I} enotska matrike enake dimenzije kot \mathbf{A} . Glede na enačbo (4.87) je v primeru nesingularnosti matrike $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ edino ravnovesno stanje diskretnega sistema kar koordinatno izhodišče $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Seveda je to ravnovesno stanje lahko stabilno ali ne, s čimer se bomo ukvarjali v razdelku 5.3.

Če diskretni sistem ima zunanje vzbujanje ter je vhodni signal $u(k)$ konstanten in enak \bar{u} , določimo ravnovesno stanje diskretnega sistema $\bar{\mathbf{x}}$ iz naslednje enačbe:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\bar{u} = \bar{\mathbf{x}} \quad (4.88)$$

Če je $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ nesingularna matrika, je rešitev enačbe (4.88):

$$\bar{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}\bar{u} \quad (4.89)$$

4.5 Prostor stanj in prenosna funkcija

Kot smo že omenili, pretvorba sistema, ki je opisan s prenosno funkcijo, v zapis v prostoru stanj ni enolična. V razdelku 4.4.3 smo obravnavali eno možnost za pretvorbo. Obstajajo tudi druge kanonične oblike zapisa sistema v prostoru stanj, ki olajšajo določene analitične ali načrtovalske postopke. S to problematiko se bomo ukvarjali v razdelku 5.6.

Transformacija iz prenosne funkcije v zapis v prostoru stanj pa je enolična. Izračunajmo torej prenosno funkcijo diskretnega sistema z enim vhodom in enim izhodom, ki ga podaja enačba (4.46). S pomočjo z-transformacije te enačbe in ob upoštevanju ničelnih začetnih pogojev ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$) dobimo:

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{c}^T\mathbf{X}(z) + dU(z) \end{aligned} \quad (4.90)$$

kjer so $U(z)$ z-transformacija vhoda v sistem, $Y(z)$ z-transformacija izhoda sistema in vektor $\mathbf{X}(z)$ z-transformacija vektorja spremenljivk stanja sistema. Če izrazimo $\mathbf{X}(z)$ iz prve enačbe v (4.90) in ga vstavimo v drugo enačbo ter izračunamo kvocient med z-transformacijama izhoda in vhoda sistema, dobimo prenosno funkcijo sistema

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (4.91)$$

 **Primer 4.7**

Določite impulzni odziv diskretnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \ 0] \mathbf{x}(k) + 2u(k) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Najprej izračunamo prenosno funkcijo sistema:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = [1 \ 0] \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 = \\ &= \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} + 2 = \frac{2z^2 - 2z + \frac{33}{25}}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Oba člena prenosne funkcije bi lahko združili v en člen, vendar je nadaljevanje naloge računsko nekoliko manj zahtevno, če tega ne storimo. Impulzni odziv je enak inverzni z-transformaciji prenosne funkcije, torej:

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{2z^2 - 2z + \frac{33}{25}}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \right\} = \frac{33}{4} \delta(k) + \frac{25}{12} \left(\frac{4}{5}\right)^k - \frac{25}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^k \quad (4.94)$$

Poglavje 5

Lastnosti diskretnih sistemov

V tem poglavju obravnavamo glavne lastnosti diskretnih sistemov, kot so linearnost, časovna spremenljivost, stabilnost, vodljivost, spoznavnost, frekvenčni odziv, ki povzema frekvenčne lastnosti sistema, in ekvivalentnost sistemov v prostoru stanj. Koncept ekvivalentnosti sistemov v prostoru stanj omogoča prehajanje med različnimi kanoničnimi oblikami zapisa sistema v prostoru stanj – v tem delu se bomo omejili na diagonalno kanonično obliko, vodljivostno regulatorsko kanonično obliko in spoznavnostno observatorsko kanonično obliko.

5.1 Linearnost in časovna spremenljivost

Obravnavani sistem si lahko zamislimo kot operator ali preslikavo \mathcal{S} , ki vhodni signal $u(k)$ preslika v izhodni signal $y(k)$, kar lahko formalno zapišemo na naslednji način:

$$y(k) = \mathcal{S}\{u(k)\} \quad (5.1)$$

Preden definiramo linearnost sistema si pogledimo lastnosti aditivnosti in homogenosti. Sistem je *homogen*, če za poljuben signal $u(k)$ in poljubno konstanto k velja:

$$\mathcal{S}\{ku(k)\} = k\mathcal{S}\{u(k)\} \quad (5.2)$$

Sistem je *aditiven*, če za poljubna signala $u_1(k)$ in $u_2(k)$ velja:

$$\mathcal{S}\{u_1(k) + u_2(k)\} = \mathcal{S}\{u_1(k)\} + \mathcal{S}\{u_2(k)\} \quad (5.3)$$

Sistem je *linearen*, če hkrati izpolnjuje pogoja aditivnosti in homogenosti, kar pomeni, da za poljubna signala $u_1(k)$ in $u_2(k)$ in poljubni vrednosti konstant k_1

in k_2 velja:

$$\mathcal{S}\{k_1u_1(k) + k_2u_2(k)\} = k_1\mathcal{S}\{u_1(k)\} + k_2\mathcal{S}\{u_2(k)\} \quad (5.4)$$

Če odziv sistema na vzbujanje $u_1(k)$ poimenujemo $y_1(k)$, na $u_2(k)$ pa $y_2(k)$, je sistem torej linearen, če se na linearno kombinacijo obeh vzbujanj ($k_1u_1(k) + k_2u_2(k)$) odzove z linearno kombinacijo posamičnih odzivov ($k_1y_1(k) + k_2y_2(k)$).

Sistem je časovno nespremenljiv, če odziv sistema ni eksplicitno odvisen od časa. To poenostavljeno povedano pomeni, da je odziv sistema na zakasnjeno vzbujanje le zakasnen, njegova oblika pa je povsem enaka. Če se torej sistem na vzbujanje $u(k)$ odzove z odzivom $y(k)$

$$\mathcal{S}\{u(k)\} = y(k) \quad (5.5)$$

in se na vzbujanje za poljubni čas $k' \in \mathbb{Z}$ premaknjenega vzbujanja $u(k - k')$ odzove z $y(k - k')$

$$\mathcal{S}\{u(k - k')\} = y(k - k') \quad (5.6)$$

pravimo, da je sistem *časovno nespremenljiv*.



Primer 5.1

Sistemi \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 , \mathcal{S}_4 in \mathcal{S}_5 so opisani z diferenčnimi enačbami:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : \quad & y(k) = u(k)y(k-1) + y(k-2) \\ \mathcal{S}_2 : \quad & y(k) = ky^2(k-1) + u(k-2) \\ \mathcal{S}_3 : \quad & y(k) = 5k^2y(k-1) + u(k) \sin k \\ \mathcal{S}_4 : \quad & y(k) = 5y(k-1) - y(k-2) - 2u(k) \\ \mathcal{S}_5 : \quad & y(k) = y(k-1) + u(k) + 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Razvrstite zgornje sisteme glede na lastnosti linearnosti in časovne spremenljivosti.

Sistema \mathcal{S}_3 in \mathcal{S}_4 sta linearna, ostali so nelinearni (tudi \mathcal{S}_5). Sistemi \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_4 in \mathcal{S}_5 so časovno nespremenljivi, ostala sta časovno spremenljiva. Sistem \mathcal{S}_4 edini sodi med linearne časovne nespremenljive sisteme. Preverjanje teh trditev upoštevajoč definicije na začetku razdelka je prepuščeno bralcu.

V obliki diferenčne enačbe lahko glede na rezultat primera 5.1 zapišemo poleg linearnih in časovno nespremenljivih tudi tako časovno spremenljive kot tudi ne-

linearne sisteme. Če je diferenčna enačba linearna s konstantnimi koeficienti, je sistem linearen in časovno nespremenljiv. Prenosna funkcija lahko opisuje le linearne časovne nespremenljive sisteme. Linearnost in časovno spreminljivost sistema, zapisanega v prostoru stanj, smo obravnavali že v razdelku 4.4.2.

5.2 Frekvenčni odziv diskretnih sistemov

Za stabilni linearni časovno nespremenljivi sistem je značilno, da se na harmonično vzbujanje po preteku prehodnega pojava odzove s harmoničnim nihanjem izhodnega signala, pri čemer sta frekvenci vhodnega in izhodnega nihanja enaki. Ta lastnost velja tako za zvezne kot tudi za diskretne sisteme.

Da bi obravnavani koncept imel smisel, mora biti diskretni sistem asimptotično stabilen, t.j. vsi poli njegove prenosne funkcije morajo ležati znotraj kroga enote, kar bomo obravnavali v razdelku 5.3. V tem primeru odziv na začetno stanje s časom izzveni, ustaljeni odziv sistema pa je vzorčeni harmonični signal, katerega frekvenca je enaka frekvenci vzbujalnega vzorčenega harmoničnega signala. Zato je za poznavanje ustaljenega odziva potrebno določiti le amplitudo in fazo izhodnega signala.

V nadaljevanju bomo zaradi lažje obravnave predpostavili kompleksne oblike signalov. Ker kompleksnih signalov seveda ne moremo realizirati, običajno predpostavimo, da je realni signal, ki ga dejansko uporabimo, realna komponenta kompleksnega signala. Če torej sistem, ki ga opisuje prenosna funkcija $H(z)$, vzbujamo s signalom

$$u(k) = U_0 e^{j(\omega k T + \varphi_u)} \quad (5.8)$$

kjer je ω krožna frekvenca, $U_0 \geq 0$ amplituda, φ_u pa faza vhodne sinusoide, se na izhodu sistema v ustaljenem stanju pojavi signal

$$y_{ss}(k) = Y_0 e^{j(\omega k T + \varphi_y)} \quad (5.9)$$

kjer je ω krožna frekvenca, $Y_0 \geq 0$ amplituda, φ_y pa faza izhodne sinusoide. Signal $y_{ss}(k)$ včasih imenujemo tudi vsiljeni odziv.

Odziv sistema pa lahko določimo tudi po naslednjem premisleku. Če z-transformacijo vhodnega signala (5.8) pomnožimo s prenosno funkcijo sistema $H(z)$, dobimo z-transformacijo izhodnega signala $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z U_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z) \quad (5.10)$$

Nato izračunamo $y(k)$ kot inverzno z-transformacijo enačbe (5.10):

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\} = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res}_{z=z_i} [Y(z)z^{k-1}] = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res}_{z=z_i} \left[\frac{z^k U_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z) \right] \quad (5.11)$$

kjer smo upoštevali enačbo (3.154). Izraz v enačbi (5.11) ima residuum pri $z = e^{j\omega T}$ in residue v vseh singularnostih oz. polih prenosne funkcije $H(z)$. Zelo pomembna točka v tem premisleku je, da vsi poli funkcije $H(z)$ ležijo znotraj kroga enote, zato pripadajoči residui s časom izzvenijo. Zato je odziv sistema v ustaljenem stanju odvisen le od residuuma pri $z = e^{j\omega T}$:

$$y_{ss}(k) = \operatorname{Res}_{z=e^{j\omega T}} \left[\frac{z^k U_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z) \right] = [H(z) U_0 z^k e^{j\varphi_u}]|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) U_0 e^{j(\omega k T + \varphi_u)} \quad (5.12)$$

Razlika med enačbama (5.11) in (5.12) je, da prva določa celoten odziv sistema, slednja pa le vsiljeni odziv po preteku prehodnega pojava.

S primerjavo enačb (5.9) in (5.12) dobimo

$$Y_0 e^{j\varphi_y} = H(e^{j\omega T}) U_0 e^{j\varphi_u} \quad (5.13)$$

oziroma

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y_0}{U_0} e^{j(\varphi_y - \varphi_u)} \quad (5.14)$$

Če enačbo (5.14) interpretiramo kot enačbo za zapis kompleksnega števila $H(e^{j\omega T})$ v polarnih koordinatah, lahko ugotovimo

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{Y_0}{U_0} \quad (5.15)$$

$$\angle H(e^{j\omega T}) = \varphi_y - \varphi_u \quad (5.16)$$

kar z drugimi besedami pomeni, da absolutni del funkcije $H(e^{j\omega T})$ določa razmerje amplitud izhodnega in vhodnega signala pri vzbujalni frekvenci ω , medtem ko fazni kot funkcije $H(e^{j\omega T})$ določa fazno prehitovanje izhodnega signala za vhodnim pri vzbujalni frekvenci ω . V večini realnih primerov je fazni kot $\angle H(e^{j\omega T})$ negativen in izhodni signal zaostaja za vhodnim.

Če pri funkcijah v enačbah (5.14), (5.15) in (5.16) upoštevamo, da je neodvisna spremenljivka krožna frekvenca ω , lahko definiramo *frekvenčni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{H}(\omega)$, ki ga podaja enačba (5.14), *amplitudni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{A}(\omega)$, ki ga podaja enačba (5.15), in *fazni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{B}(\omega)$, ki ga podaja enačba (5.16). Te tri funkcije glede na (5.14) povezuje naslednja enačba:

$$\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{A}(\omega) e^{j\mathcal{B}(\omega)} \quad (5.17)$$

Frekvenčni odziv diskretnega sistema najlažje določimo z upoštevanjem prenosne funkcije sistema $H(z)$:

$$\mathcal{H}(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})| e^{j\angle[H(e^{j\omega T})]} \quad (5.18)$$

Koncept frekvenčnega odziva je seveda znan tudi iz obravnave zveznih dinamičnih sistemov. Frekvenčni odziv zveznega sistema, ki ga opisuje prenosna funkcija $G_z(s)$, je definiran kot:

$$\mathcal{H}_z(\omega) = G_z(s)|_{s=j\omega} = G_z(j\omega) \quad (5.19)$$

Ugotovimo lahko, da sta formuli (5.18) in (5.19) za izračun diskretnega in zveznega frekvenčnega odziva sorodni preko znane povezave med kompleksnima ravninama $z = e^{sT}$.

Povzemimo pomen frekvenčnega odziva za izračun odziva diskretnega sistema na harmonično vzbujanje. Če tokrat definiramo vzbujalni signal kot realno funkcijo

$$u(k) = U_0 \sin \omega k T \quad (5.20)$$

lahko odziv $y_{ss}(k)$ v ustaljenem stanju izračunamo iz frekvenčnega odziva $\mathcal{H}(\omega)$ s pomočjo naslednje formule:

$$y_{ss}(k) = U_0 |\mathcal{H}(\omega)| \sin(\omega k T + \angle[\mathcal{H}(\omega)]) \quad (5.21)$$



Primer 5.2

Diskretni sistem opisuje diferenčna enačba:

$$y(k) = u(k) + ay(k-1) \quad (5.22)$$

Določite amplitudni in fazni odziv sistema. Določite vrednost systemskega parametra a tako, da bo fazni zaostanek pri vzbujanju s sinusnim signalom, katerega frekvenca je enaka četrtini frekvence vzorčenja, enak $\frac{\pi}{6}$ oz. 30° . Kolikšna je takrat (pri poprej določenem a in enaki frekvenci vzbujalnega signala) amplituda izhodnega signala v ustaljenem stanju, če je amplituda vhodnega signala enaka $\sqrt{3}$.

Najprej moramo določiti prenosno funkcijo sistema, ki je enaka:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \Big|_{z.p. \text{ enaki } 0} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (5.23)$$

Frekvenčni odziv sistema je torej:

$$\mathcal{H}(\omega) = G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega T + ja \sin \omega T} \quad (5.24)$$

Amplitudni in fazni odziv sta enaka:

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega T)^2 + (a \sin \omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega T}} \quad (5.25)$$

$$\mathcal{B}(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega T}{1 - a \cos \omega T}$$

Izračunajmo vrednost produkta ωT , če je frekvenca signala štirikrat manjša od frekvence vzorčenja

$$\omega T = 2\pi f \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (5.26)$$

kjer f_s predstavlja frekvenco vzorčenja. Če enačbo (5.26) vnesemo v enačbo (5.25), dobimo:

$$\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (5.27)$$

$$\mathcal{B}(\omega) = -\operatorname{arctg} a = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Amplituda izhodnega nihanja Y_0 je pri frekvenci $f_s/4$ enaka:

$$Y_0 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \quad (5.28)$$

Frekvenčne odzive lahko zelo enostavno prikazujemo tudi v programskem paketu MATLAB. Postopek lahko ilustriramo na primeru sistema (5.23) iz primera 5.2:

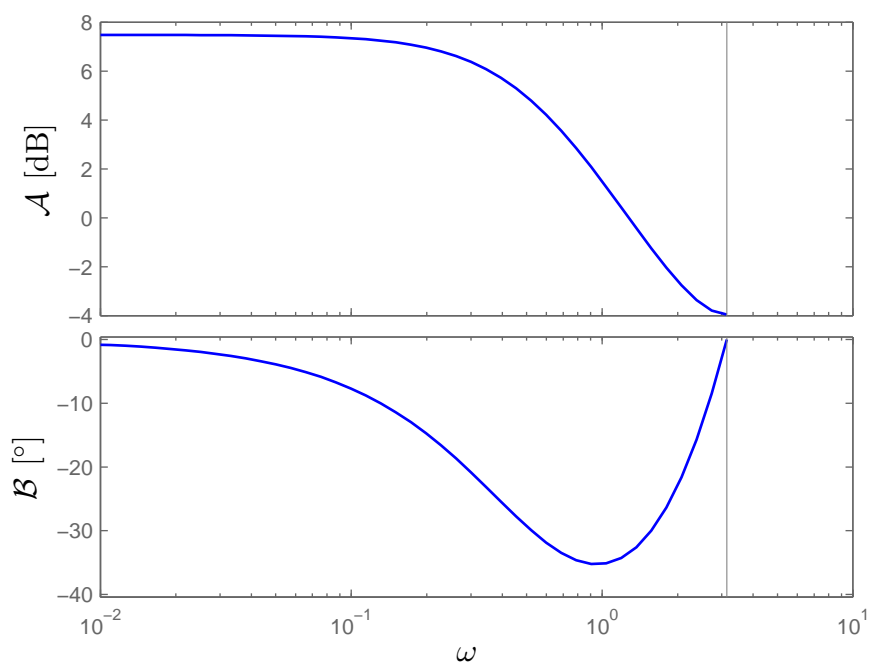
$$G(z) = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}z^{-1}} \quad (5.29)$$

Ustrezna koda, ki izriše Bodejev diagram obravnavanega sistema, je naslednja:



```
z = tf('z');
G = 1 / (1-sqrt(3)/3*z^(-1));
bode(G)
```

Rezultat kode je na sliki 5.1, kjer smo graf poslovenili in ustrezno prilagodili notacijo. Velja poudariti na pomembno dejstvo na sliki 5.1. Opazimo namreč,



Slika 5.1: Prikaz Bodejevega diagrama za sistem (5.29)

da se izris frekvenčnega odziva pri določeni frekvenci prekine. Gre za frekvenco $\omega = \pi$, pri kateri pride do kršitve teorema o vzorčenju. Teorem o vzorčenju namreč omejuje frekvence signala pri vzorčenju v skladu z naslednjo enačbo

$$|\omega| < \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi f_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (5.30)$$

iz katere sledi zelo pomembna oblika zahteve teorema o vzorčenju:

$$|\omega T| < \pi \quad (5.31)$$

Ker v zgornji kodi periode vzorčenja T nismo podali, je MATLAB uporabil privzeto vrednost $T = 1$, zato se izris frekvenčnega odziva prekine pri frekvenci $\omega = \pi$.



Primer 5.3

Obravnavamo naslednji filter:

$$y(k) = u(k) - u(k - 8) \quad (5.32)$$

Sistem vzorčimo s frekvenco 8 kHz. Za katere vrednosti sinusnega signala $u(k)$ je izhod sistema $y(k)$ po preteku prehodnega pojava enak 0?

Najprej poiščemo prenosno funkcijo sistema:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1 - z^{-8} \quad (5.33)$$

Frekvenčni odziv sistema je torej enak:

$$\mathcal{H}(\omega) = 1 - e^{-8j\omega T} \quad (5.34)$$

Iščemo torej frekvence ω , pri katerih je vrednost frekvenčnega odziva enaka 0 oz. pri katerih velja naslednja enačba:

$$e^{-8j\omega T} = 1 \Rightarrow 8\omega T = 16\pi f \frac{1}{f_s} = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (5.35)$$

Pogoj je torej izpolnjen pri mnogokratnikih osmine frekvence vzorčenja:

$$f = l \frac{f_s}{8} = l \cdot 1000 \text{ Hz}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (5.36)$$

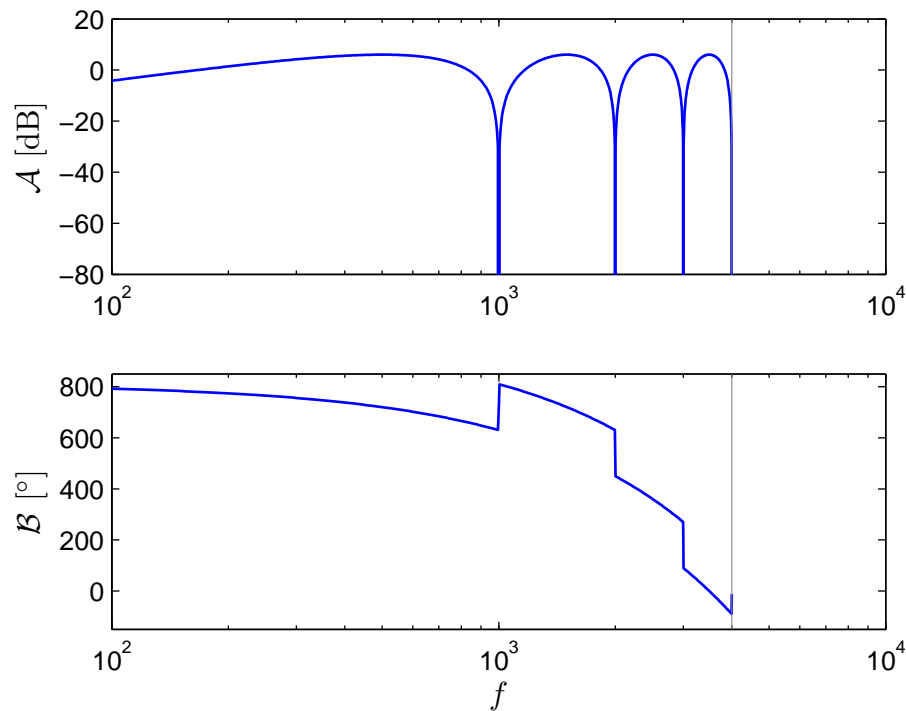
Čeprav rešitev obsega vse mnogokratnike frekvence 1 kHz, so frekvence, ki zadoščajo zahtevam teorema o vzorčenju: 0 kHz, 1 kHz, 2 kHz in 3 kHz.

Poglejmo si še kodo, ki izriše frekvenčni odziv za sistem iz primera 5.3. Ker želimo na abscisni osi prikazovati ciklično frekvenco, bomo funkcijo *bode* uporabili za izračun frekvenčnega odziva, medtem ko bomo grafe izrisali sami. Koda je naslednja:



```
z = tf('z', 0.000125); % čas vzorčenja je 0.000125
G = 1 - z^(-8);
f = [100:5:4000]; % frekvenčna os
w = 2*pi*f;      % krožna frekvenca
[Ojac, Faza] = bode(G,w); % izračun ojačenja in faze (v stopinjah) pri w
Ojac_dB = 20 * log10(Ojac);
subplot(211);
semilogx(f, Ojac_dB(:)); % (:) naredi iz 3-D matrike stolpni vektor
subplot(212);
semilogx(f, Faza(:)); % (:) naredi iz 3-D matrike stolpni vektor
```

Bodejev diagram obravnavanega sistema je prikazan na sliki 5.2. Na sliki lahko opazimo, da ima amplitudni odziv res ničle pri frekvencah, ki smo jih določili v primeru 5.3 in so enake večkratnikom frekvence 1 kHz. Opozoriti velja še na dejstvo, da ima fazni odziv pri nizkih frekvencah nenavadne vrednosti. To je posledica dejstva, da ima amplitudni odziv tam ničlo, zaradi česar faza ni definirana, nato pa zaradi numeričnih napak pride do zamika faznega odziva pri nizkih frekvencah za določen večkratnik kota 360° .

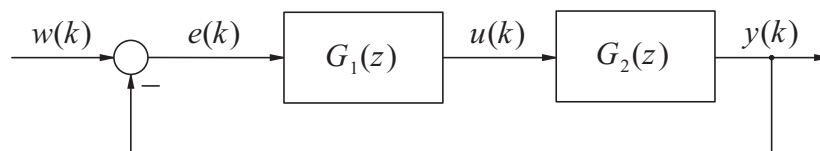


Slika 5.2: Prikaz Bodejevega diagrama za sistem (5.33)

5.3 Stabilnost diskretnega sistema

Linearni časovno nespremenljivi diskretni sistem je stabilen, če vsi poli ležijo znotraj kroga enote. Če ima sistem poleg polov znotraj kroga enote tudi enostavne (enojne) pole na enotini krožnici, pravimo, da je mejno stabilen. Diskretni sistem, ki ima vsaj en pol zunaj kroga enote ali vsaj en večkratni pol na enotini krožnici, je nestabilen.

Če je sistem zapisan v obliki prenosne funkcije, so poli enaki korenom imenovalca prenosne funkcije. Če je sistem zapisan v prostoru stanj, so poli enaki lastnim vrednostim sistemske matrike \mathbf{A} .



Slika 5.3: Bločna shema diskretnega sistema za primer 5.4

Primer 5.4

Obravnavali bomo stabilnost sistema, katerega shema je prikazana na sliki 5.3. Prenosni funkciji sta:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= K \\ G_2(z) &= \frac{2}{z - \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Za katere vrednosti ojačenja K je povratnozančni sistem stabilen?

Pole povratnozančnega sistema določimo z rešitvijo karakteristične enačbe:

$$1 + G_1(z)G_2(z) = 1 + K \frac{2}{z - \frac{1}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} - 2K \quad (5.38)$$

Ker je sistem prvega reda, ima en pol. Sistem je stabilen, če pol leži znotraj kroga enote. Ker je pol realen, mora ležati na odprtem intervalu $(-1, 1)$, torej mora biti izpolnjena pogoja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - 2K < -1 &\quad \Rightarrow \quad K < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} - 2K > 1 &\quad \Rightarrow \quad K > -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Sistem je torej stabilen, če za ojačenje K velja $K \in (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

5.3.1 Modificirani Routhov kriterij

Če poznamo karakteristični polinom diskretnega sistema (enak je polinomu v imenovalcu prenosne funkcije oz. funkciji $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$), lahko preverimo, če vsi poli res ležijo v notranjosti kroga enote tudi tako, da sestavimo Routhovo shemo. Ker je le-ta namenjena analizi prisotnosti korenov polinoma v levi polravnini, je potrebno uporabiti preslikavo:

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{oz.} \quad z = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (5.40)$$

Če vsi poli karakterističnega polinoma diskretnega sistema ležijo znotraj kroga enote (v kompleksni ravnini z), potem vsi poli v ravnini w ležijo v levi polravnini,

kar lahko potrdimo, če zgradimo Routhovo shemo za polinom funkcije w .



Primer 5.5

Karakteristična enačba diskretnega sistema je:

$$27z^3 + 27z^2 + 9z + 1 = 0 \quad (5.41)$$

Ali je sistem stabilen?

V enačbo (5.41) vpeljemo novo spremenljivko:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (5.42)$$

Po krajši izpeljavi pridemo do karakteristične enačbe

$$w^3 + 6w^2 + 12w + 8 = 0 \quad (5.43)$$

Sedaj sestavimo Routhovo tabelo za polinom iz enačbe (5.43):

$$\begin{array}{l|ll} w^3 & 1 & 12 \\ w^2 & 6 & 8 \\ w^1 & \frac{64}{6} & \\ w^0 & 8 & \end{array} \quad (5.44)$$

Ker so vsa števila v prvem stolpcu Routhove tabele istega predznaka, vsi koreni karakteristične enačbe (5.43) ležijo v levi polravnini. Torej vsi koreni karakteristične enačbe (5.41) ležijo znotraj kroga enote, kar pomeni, da je diskretni sistem stabilen.

5.3.2 Juryjev stabilnostni kriterij

Če je podana karakteristična enačba diskretnega linearnega časovno nespremenljivega sistema

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n > 0) \quad (5.45)$$

potem Juryjev stabilnostni kriterij podaja potrebne in zadostne pogoje, da vsi koreni enačbe (5.45) ležijo znotraj kroga enote. Juryjev stabilnostni kriterij temelji

na analizi Juryjeve tabele:

vrsta	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots				
$2n - 5$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n - 4$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n - 3$	q_0	q_1	q_2				

V prvo vrsto torej napišemo koeficiente karakteristične enačbe, v drugi vrsti pa jih zapišemo v obratnem vrstnem redu. Elemente tretje vrste računamo s pomočjo enačbe:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.46)$$

Četrto vrsto zopet zapišemo v obratnem vrstnem redu kot tretjo, elemente pete pa izračunamo kot:

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (5.47)$$

Postopek ponavljamo, dokler ne ostanejo v vrstici le tri elementi, ki jih izračunamo s pomočjo naslednjih enačb:

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \quad (5.48)$$

Vsi koreni enačbe (5.45) ležijo znotraj kroga enote natanko takrat, ko so izpolnjeni naslednji pogoji:

$$\begin{aligned} Q(1) &> 0 \\ (-1)^n Q(-1) &> 0 \\ |a_0| &< a_n \\ |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \\ &\vdots \\ |q_0| &> |q_2| \end{aligned} \quad (5.49)$$

Če prva dva pogoja nista izpolnjena, lahko zaključimo, da vsaj en od korenov karakteristične enačbe ne leži znotraj kroga enote, ne da bi bilo potrebno graditi Juryjevo tabelo.

Primer 5.6

Z Juryjevim stabilnostnim kriterijem bomo analizirali stabilnost štirih diskretnih sistemov, katerih karakteristične enačbe so:

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0 \\ Q_2(z) &= 3z^4 + 3z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0 \\ Q_3(z) &= 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0 \\ Q_4(z) &= z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Najprej analiziramo izpolnjenost prvih dveh pogojev v (5.49):

$$\begin{aligned} Q_1(1) &= 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 9 > 0 \\ (-1)^4 Q_1(-1) &= 2 - 2 + 3 - 1 + 1 = 3 > 0 \\ Q_2(1) &= 3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11 > 0 \\ (-1)^4 Q_2(-1) &= 3 - 3 + 1 - 2 + 2 = 1 > 0 \\ Q_3(1) &= 2 + 2 + 3 + 3 + 1 = 11 > 0 \\ (-1)^4 Q_3(-1) &= 2 - 2 + 3 - 3 + 1 = 1 > 0 \\ Q_4(1) &= 1 + 2 + 1 + 1 = 5 > 0 \\ (-1)^3 Q_4(-1) &= -(-1 + 2 - 1 + 1) = -1 \not> 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

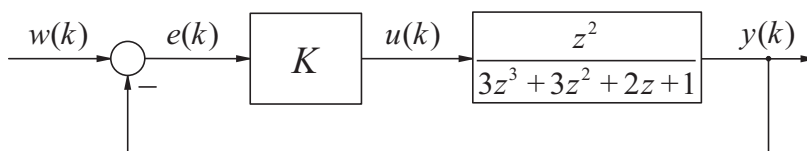
Ker $Q_4(z)$ ne izpolnjuje drugega pogoja, pripadajoč sistem ni stabilen. Ker sta oba pogoja izpolnjena pri vseh preostalih karakterističnih polinomih, nadaljujemo z gradnjo treh Juryjevih tabel:

v.	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	v.	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	v.	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	1	1	3	2	2	1	2	2	1	3	3	1	1	3	3	2	2
2	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	2	2	2	2	3	3	1
3	-3	-3	-3	0		3	-5	-5	-1	0		3	-3	-1	-3	-4	
4	0	-3	-3	-3		4	0	-1	-5	-5		4	-4	-3	-1	-3	
5	9	9	9			5	25	25	5			5	-7	-9	5		

Pogoji, ki jih moramo testirati:

$$\begin{array}{lll}
 |a_0| = 1 < 2 = a_n & |a_0| = 2 < 3 = a_n & |a_0| = 1 < 2 = a_n \\
 |b_0| = 3 > 0 = |b_{n-1}| & |b_0| = 5 > 0 = |b_{n-1}| & |b_0| = 3 \not> 4 = |b_{n-1}| \\
 |c_0| = 9 \not> 9 = |c_{n-2}| & |c_0| = 25 > 5 = |c_{n-2}| & |c_0| = 7 > 5 = |c_{n-2}|
 \end{array}$$

Polinom $Q_2(z)$ izpolnjuje vse pogoje, zato je drugi sistem stabilen. Ker tretji sistem ne izpolnjuje enega pogoja, je nestabilen. Polinom $Q_1(z)$ ne izpolnjuje zadnjega pogoja, zato sistem nima vseh polov znotraj kroga enote. Edini pogoj, ki ni izpolnjen, je na meji, zato vsi poli sistema ležijo znotraj enotnega kroga ali na enotini krožnici. Ker s postopkom ne moremo določiti, če so poli na enotini krožnici enostavni, ne moremo določiti, če je sistem mejno stabilen ali nestabilen.



Slika 5.4: Bločna shema diskretnega sistema za primer 5.7

Primer 5.7

Za katere vrednosti konstante K je sistem na sliki 5.4 stabilen?

Karakteristična enačba povratnozančnega sistema na sliki 5.4 je:

$$1 + K \frac{z^2}{3z^3 + 3z^2 + 2z + 1} = 0 \quad (5.52)$$

oziroma

$$Q(z) = 3z^3 + (K + 3)z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (5.53)$$

Sestavimo Juryjevo tabelo:

v.	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	2	$K + 3$	3
2	3	$K + 3$	2	1
3	-8	$-7 - 3K$	$K - 3$	

Pogoji za stabilnost so:

$$\begin{aligned}
 Q(1) &= 3 + (K + 3) + 2 + 1 = K + 9 > 0 \\
 (-1)^3 Q(-1) &= -(-3 + (K + 3) - 2 + 1) = 1 - K > 0 \\
 |a_0| &= 1 < 3 = a_n \\
 |b_0| &= |-8| = 8 > |K - 3| = |b_{n-1}|
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

Tretji pogoj je izpolnjen, iz ostalih pa dobimo naslednje neenačbe za K :

$$\begin{aligned}
 K &> -9 \\
 K &< 1 \\
 K - 3 &< 8 \Rightarrow K < 11 \\
 K - 3 &> -8 \Rightarrow K > -5
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

Presek vseh štirih pogojev je neenačba $-5 < K < 1$. Če želimo, da je povratnozančni sistem stabilen, mora konstanta K ležati na intervalu $K \in (-5, 1)$.

5.3.3 Direktna metoda Ljapunova

Direktna metoda Ljapunova (včasih jo imenujemo tudi druga metoda Ljapunova) je orodje za analizo stabilnosti, asimptotične stabilnosti in nestabilnosti homogenega sistema, ki ga opisuje naslednja diferenčna enačba:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), k) \tag{5.56}$$

Metoda je torej primerna predvsem za analizo stabilnosti nelinearnih in časovno spremenljivih sistemov, četudi je mogoče obravnavati tudi linearne sisteme (v večini primerov se stabilnost linearnih časovno nespremenljivih sistemov lažje določi z analizo polov, modificiranim Routhovim ali Juryjevim stabilnostnim kriterijem). Mi se bomo omejili na obravnavo nelinearnih časovno nespremenljivih sistemov naslednje oblike:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \tag{5.57}$$

Direktna metoda Ljapunova obravnava stabilnost sistema (5.57) v okolici ravnovesnih točk, za katere velja:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \tag{5.58}$$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da je $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ravnovesna točka obravnavanega sistema (če temu ni tako, uvedemo novo spremenljivko, za katero to velja). Zelo

stroga matematična definicija Ljapunovih funkcij je zelo teoretično zahtevna [24], tako da bomo tu podali nekoliko poenostavljene definicije:



Definicija 1 Funkcija $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pripada razredu \mathcal{K} , če je zvezna, strogo naraščajoča in $\alpha(0) = 0$ (\mathbb{R}_+ označuje množico pozitivnih realnih števil, ki vključuje tudi ničlo).

Funkcija $\alpha(\xi)$ se torej v celoti nahaja v prvem kvadrantu ravnine (ξ, α) , obvezno pa mora vsebovati tudi koordinatno izhodišče. Pomembno je tudi, da je funkcija na svojem definicijskem območju $[0, \infty)$ zvezna in strogo naraščajoča. Definicija razreda \mathcal{K} je pomembna, ker mora biti Ljapunova funkcija navzdol omejena s poljubno funkcijo tega razreda:

Definicija 2 Skalarna funkcija $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivno definitna funkcija, če izpolnjuje naslednja pogoja:

- $V(\mathbf{0}) = 0$,
- $V(\mathbf{x}) \geq \alpha(|\mathbf{x}|)$, kjer je $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Funkcijo $V(\mathbf{x})$ v okviru direktne metode Ljapunova imenujemo Ljapunova funkcija, njena vrednost je torej vedno (razen pri $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) pozitivna. Ni sicer nujno, da z oddaljevanjem od koordinatnega izhodišča ($|\mathbf{x}|$ je namreč evklidska razdalja od koordinatnega izhodišča) vrednost funkcije narašča, je pa potrebno, da je funkcija navzdol omejena s funkcijo $\alpha(|\mathbf{x}|)$, ki z oddaljevanjem od koordinatnega izhodišča strogo narašča, ker pripada razredu \mathcal{K} (glej definicijo 1). Včasih imamo opravka s funkcijami, ki izpolnjujejo pogoje za pozitivno definitno funkcijo le v okolici ravnovesne točke sistema, zato definirajmo lokalno pozitivno definitne funkcije:

Definicija 3 Skalarna funkcija $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lokalno pozitivno definitna funkcija, če izpolnjuje naslednja pogoja:

- $V(\mathbf{0}) = 0$,
- obstaja $r > 0$, da velja:

$$|\mathbf{x}| < r \Rightarrow V(\mathbf{x}) \geq \alpha(|\mathbf{x}|), \alpha(\cdot) \in \mathcal{K} \quad (5.59)$$

Poenostavljeno povedano, funkcija je lokalno pozitivno definitna funkcija, če obstaja neka okolica koordinatnega izhodišča, v kateri je izpolnjen pogoj pozitivne definitnosti. Če je funkcija V pozitivno definitna, je funkcija $-V$ *negativno definitna*. Na podlagi predhodnih definicij podajmo izrek o stabilnosti po Ljapunovu:

Izrek 11: Stabilnost

Ravnovesna točka $\mathbf{0}$ sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (5.57) je stabilna, če obstajata lokalno pozitivno definitna funkcija $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in konstanta $s > 0$, za kateri velja:

$$\Delta V(k, \mathbf{x}(0)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall |\mathbf{x}(0)| < s \quad (5.60)$$

Če funkcija ΔV izpolnjuje pogoj (5.60), pravimo tudi, da je funkcija ΔV *negativno semidefinitna*. Če torej obstaja lokalno pozitivno definitna funkcija, katere sprememba je v vsakem koraku negativna ali pa se ne spremeni, in to velja za vse začetne pogoje v neki okolici (hiperkrogli) koordinatnega izhodišča (ravnovesne točke), je sistem stabilen v smislu Ljapunova, kar pomeni, da tirnica sistema ostane v neki končni okolici ravnovesne točke (radij te druge hiperkrogle je sicer lahko večji, pomembno pa je, da je končen). Pogosto si želimo, da tirnice konvergirajo k ravnovesni točki, kar je strožja zahteva kot le omejenost tirnic:

Izrek 12: Asimptotična stabilnost

Ravnovesna točka $\mathbf{0}$ sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (5.57) je asimptotično stabilna, če obstaja lokalno pozitivno definitna funkcija $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, katere $-\Delta V$ je lokalno pozitivno definitna funkcija.

Sistem je torej asimptotično stabilen v smislu Ljapunova, če obstajata lokalno pozitivno definitna funkcija V in pozitivna konstanta s , za kateri velja:

$$\Delta V(k, \mathbf{x}(0)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \leq -\alpha(|\mathbf{x}(k)|), \forall k \geq 0, \forall |\mathbf{x}(0)| < s, \alpha(\cdot) \in \mathcal{K} \quad (5.61)$$

Najpomembnejša razlika med stabilnostjo in asimptotično stabilnostjo je torej zahteva, da mora biti pri slednji sprememba Ljapunove funkcije strogo negativna (razen pri $\mathbf{x} = \mathbf{0}$), medtem ko pri prvi dopuščamo, da se vrednost Ljapunove

funkcije pri določenih časih in določenih začetnih pogojih ne spreminja. Zelo pomembna pa je velikost področja, kjer je funkcija asimptotično stabilna. Zato definirajmo še globalno asimptotično stabilnost:

Izrek 13: Globalna asimptotična stabilnost

Ravnovesna točka $\mathbf{0}$ sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (5.57) je globalno asimptotično stabilna, če obstaja pozitivno definitna funkcija $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, katere $-\Delta V$ je pozitivno definitna funkcija, velja pa še:

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (5.62)$$

Če izpostavimo razlike med asimptotično in globalno asimptotično stabilnostjo, lahko rečemo, da pri slednji zahtevamo pozitivno definitnost Ljapunove funkcije in njene difference (pri asimptotični stabilnosti smo zahtevali le lokalno pozitivno definitnost), poleg tega pa zahtevamo, da gre vrednost Ljapunove funkcije proti neskončno, ko gre razdalja od koordinatnega izhodišča proti neskončno.



Primer 5.8

Odprite aplikacijo *Calculator* v operacijskem sistemu *Windows*, izberite pogled *Scientific* in nastavite kote v radianih. Če zaporedoma pritisnete kosinusno tipko, dobite zaporedje, ki konvergira k desetiški vrednosti $0,73908513321516064165531208767387$. To je ena ravnovesna točka sistema

$$x(k+1) = \cos(x(k)) \quad (5.63)$$

Poiščite vse ravnovesne točke sistema, analizirajte stabilnost sistema v okolici ravnovesnih točk in področje stabilnosti (za katere začetne pogoje $x(0)$ zaporedje konvergira).

Za ravnovesne točke velja $x(k+1) = x(k)$. Označimo jih z \bar{x} . Torej velja:

$$\bar{x} = \cos(\bar{x}) \quad (5.64)$$

Poiskati moramo torej rešitve enačbe: $f(x) = x - \cos(x) = 0$

Eno rešitev že poznamo ($\bar{x} \doteq 0,739$). Vprašanje je, če je ta rešitev edina.

Izračunajmo odvod funkcije $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 + \sin(x) \geq 0 \quad (5.65)$$

Funkcija $f(x)$ je torej monotono nepadajoča funkcija. Velja pa še:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} > 0 \Rightarrow f(x) \begin{cases} < 0 & x < \bar{x} \\ = 0 & x = \bar{x} \\ > 0 & x > \bar{x} \end{cases} \quad (5.66)$$

Pokazali smo, da je $\bar{x} \doteq 0,739$ edina ravnovesna točka diskretnega sistema (5.63). Sedaj bomo analizirali še stabilnost sistema v okolici ravnovesne točke. V ta namen bomo definirali novo spremenljivko

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x} \quad (5.67)$$

in Ljapunovo funkcijo

$$V(\tilde{x}(k)) = \tilde{x}^2(k) \quad (5.68)$$

Ta funkcija je pozitivno definitna funkcija, izpolnjuje pa tudi pogoj (5.62). Če pokažemo, da je sprememba funkcije ΔV negativno definitna (oz. je $-\Delta V$ pozitivno definitna), je sistem globalno asimptotično stabilen (glej izrek 13). Sprememba Ljapunove funkcije je:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(\tilde{x}(k+1)) - V(\tilde{x}(k)) = \tilde{x}^2(k+1) - \tilde{x}^2(k) = \\ &= (\cos(x(k)) - \bar{x})^2 - (x(k) - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

V nadaljevanju bomo zaradi večje preglednosti opuščali eksplicitno odvisnost x od k , tako da bomo namesto $x(k)$ pisali kar x :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \cos^2 x - 2\bar{x} \cos x - x^2 + 2\bar{x}x = \\ &= (\cos x - x)(\cos x + x) - 2\bar{x}(\cos x - x) = \\ &= \underbrace{(\cos x - x)}_{-f(x)} \cdot \underbrace{(\cos x + x - 2\bar{x})}_{g(x)} = -f(x)g(x) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Če hočemo dokazati stabilnost (asimptotično stabilnost), moramo pokazati, da je funkcija ΔV negativno semidefinitna (negativno definitna). Enačba (5.66) je pokazala, kako je s predznakom funkcije $f(x)$, potrebno je analizirati še $g(x)$. Zaradi (5.64) velja:

$$g(\bar{x}) = 0 \quad (5.71)$$

Predznak funkcije $g(x)$ lahko analiziramo podobno kot predznak funkcije $f(x)$:

$$(g(\bar{x}) = 0) \wedge \left(\frac{dg}{dx} = 1 - \sin x \geq 0 \right) \wedge \left(\frac{dg}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} > 0 \right) \Rightarrow g(x) \begin{cases} < 0 & x < \bar{x} \\ = 0 & x = \bar{x} \\ > 0 & x > \bar{x} \end{cases} \quad (5.72)$$

Če upoštevamo ugotovitvi (5.66) in (5.72) lahko sklenemo:

$$\Delta V \begin{cases} < 0 & x \neq \bar{x} \text{ oz. } \tilde{x} \neq 0 \\ = 0 & x = \bar{x} \text{ oz. } \tilde{x} = 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

Neenačba (5.73) pomeni, da je funkcija ΔV negativno definitna, torej je sistem, ki ga analiziramo, asimptotično stabilen. Ker velja še $\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} V \rightarrow \infty$, je sistem globalno asimptotično stabilen, kar z drugimi besedami pomeni, da z našim postopkom pritiskanja kosinusne tipke vedno skonvergiramo k poprej določeni ravnovesni točki. Konvergenca je asimptotična in ni odvisna od začetnega stanja (prve vrednosti, ki smo jo vnesli v kalkulator).

5.3.4 Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme

Analizirali bomo stabilnost linearnega časovno nespremenljivega sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (5.74)$$

Če uporabimo Ljapunovo teorijo, ki smo jo predstavili v prejšnjem razdelku, se v primeru linearnega časovno nespremenljivega sistema ta teorija poenostavi v naslednji izrek:

Izrek 14: Ljapunova stabilnost za linearne sisteme

Ravnotežno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistema (5.74) je asimptotično stabilno tedaj in le tedaj, če za katerokoli pozitivno definitno realno simetrično matriko \mathbf{Q} obstaja pozitivno definitna realna simetrična matrika \mathbf{P} , tako da velja:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (5.75)$$

 **Primer 5.9**

Poiščite ravnovesne točke naslednjega sistema:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) - x_2(k) - 5 \\x_2(k+1) &= x_1(k) - x_2(k) - 6\end{aligned}\tag{5.76}$$

Ali je zgornji sistem linearen? Če ni, ga ustrezno preoblikujte, tako da je mogoče s pomočjo Ljapunovega stabilnostnega teorema za linearne diskretne sisteme analizirati tudi stabilnost sistema v okolici ravnovesnih točk.

V ravnovesnih točkah velja $x_1(k+1) = x_1(k) = \bar{x}_1$ in $x_2(k+1) = x_2(k) = \bar{x}_2$, torej:

$$\left. \begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{2}\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 5 \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = -4\tag{5.77}$$

Ravnovesna točka sistema je torej $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -4)$.

Sistem (5.76) ni linearen, ker preslikava $(x_1(k), x_2(k)) \rightarrow (x_1(k+1), x_2(k+1))$ ni linearna. Ne izpolnjuje namreč niti pogoja homogenosti (5.2) niti pogoja aditivnosti (5.3). (Preverite ti dve trditvi.) Zelo hitro opazimo, da bi sistem bil linearen, če na desni strani obeh enačb v (5.76) ne bi bilo tretjih členov. To lahko dosežemo s premikom koordinatnega sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - \bar{x}_2\end{aligned}\tag{5.78}$$

Če nove spremenljivke (5.78) upoštevamo v izhodiščnem sistemu (5.76), dobimo

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(k+1) - 2 &= \frac{1}{2}(\tilde{x}_1(k) - 2) - (\tilde{x}_2(k) - 4) - 5 \\ \tilde{x}_2(k+1) - 4 &= (\tilde{x}_1(k) - 2) - (\tilde{x}_2(k) - 4) - 6\end{aligned}\tag{5.79}$$

kar lahko zapišemo v obliki linearnega sistema

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(k+1) &= \frac{1}{2}\tilde{x}_1(k) - \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_2(k+1) &= \tilde{x}_1(k) - \tilde{x}_2(k)\end{aligned}\tag{5.80}$$

s sistemsko matriko

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Sistem s koordinatama \tilde{x}_1 in \tilde{x}_2 je torej linearen in časovno nespremenljiv. Ker se s premikom koordinatnega izhodišča ne spremeni stabilnost sistema v okolici ravnovesne točke, lahko torej uporabimo Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme. Izberemo poljubno pozitivno definitno matriko \mathbf{Q} . Najenostavnejša izbira je enotina matrika:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Iščemo matriko \mathbf{P} , ki mora biti realna in simetrična:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Sedaj moramo rešiti enačbo (5.75):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{3p_{11}}{4} + p_{12} + p_{22} & -\frac{p_{11}}{2} - \frac{5p_{12}}{2} - p_{22} \\ -\frac{p_{11}}{2} - \frac{5p_{12}}{2} - p_{22} & p_{11} + 2p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Rešiti moramo sistem 4 enačb s 3 neznankami. Izkaže se, da je sistem enolično rešljiv, saj sta enačbi za izvendiagonalna elementa enaki. Rešitev je:

$$p_{11} = \frac{7}{2}, \quad p_{12} = -\frac{9}{4}, \quad p_{22} = \frac{31}{8} \quad \text{oz.} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Preveriti moramo še, če je matrika \mathbf{P} pozitivno definitna. Simetrična matrika je pozitivno definitna natanko takrat, ko so vse lastne vrednosti matrike pozitivne. Lastni vrednosti matrike \mathbf{P} sta $\frac{59}{16} \pm \frac{3}{16}\sqrt{145}$ oz. 1,4297 in 5,9453. Ker sta obe lastni vrednosti pozitivni, je matrika \mathbf{P} pozitivno definitna, izhodiščni sistem pa je asimptotično stabilen v okolici ravnovesne točke $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -4)$.

5.4 Vodljivost diskretnih sistemov

Diskretni dinamični sistem je vodljiv, če ga lahko pripeljemo s pomočjo končnega zaporedja vhodnega signala $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, iz poljubnega začetnega stanja $\mathbf{x}(0)$ v poljubno končno stanje $\mathbf{x}(N)$. Zaporedje $u(k)$, s katerim dosežemo omenjeni cilj, lahko določimo s pomočjo enačbe za odziv stanja nehomogenega sistema (4.65)

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j) \quad (5.86)$$

ki jo zapišemo za končni trenutek $k = N$ v naslednji obliki

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + \mathbf{Q}_{vN} \mathbf{u}_N \quad (5.87)$$

kjer smo uvedli matriko \mathbf{Q}_{vN} z n vrsticami in N stolpci

$$\mathbf{Q}_{vN} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \quad (5.88)$$

in stolpni vektor \mathbf{u}_N z N elementi $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$. Sistem je torej vodljiv, če lahko določimo vektor \mathbf{u}_N za poljuben par $\mathbf{x}(0)$ in $\mathbf{x}(N)$:

$$\mathbf{x}(N) - \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_{vN} \mathbf{u}_N \quad (5.89)$$

Enačbo (5.89) lahko interpretiramo kot sistem n enačb (za vsako vrstico v matriki po ena) z N neznankami. Sedaj bomo analizirali, koliko časa potrebujemo, da dosežemo zeleno stanje. Najprej obravnavajmo primer $N < n$. Očitno je, da v splošnem z $N < n$ prostimi spremenljivkami vektorja \mathbf{u}_N ni mogoče zadostiti n enačb, kar z drugimi besedami pomeni, da sistema reda n ni možno prevesti iz poljubnega začetnega stanja v poljubno končno stanje v manj kot n korakih.

Če je $N = n$, lahko določimo zaporedje vhodnega signala z enačbo

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{Q}_{vN}^{-1} [\mathbf{x}(N) - \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0)] \quad (5.90)$$

vendar le v primeru, če je matrika \mathbf{Q}_{vN} nesingularna (determinanta matrike je različna od 0 oz. vsi stolpci matrike so linearno neodvisni). Sistem je torej vodljiv v N korakih, če je matrika \mathbf{Q}_{vN} nesingularna. Če je matrika \mathbf{Q}_{vN} singularna za $N = n$ (torej je vsaj eden izmed stolpcev linearno odvisen od preostalih), lahko upamo, da vodljivost dosežemo pri nekem N , večjem od n .

V primeru $N > n$ lahko določimo \mathbf{u}_N iz enačbe (5.89) le v primeru, če najdemo v matriki \mathbf{Q}_{vN} n linearno neodvisnih stolpcev. Stolpci matrike \mathbf{Q}_{vN} imajo zanimivo lastnost: takoj ko je en stolpec $\mathbf{A}^i \mathbf{b}$ linearno odvisen od prejšnjih stolpcev $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$, so tudi vsi nadaljnji stolpci $\mathbf{A}^{i+k}\mathbf{b}$ ($k > 0$) linearno odvisni od stolpcev $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$.

Iz prej povedanega sledi pomembna lastnost dinamičnega sistema n -tega reda. Če namreč sistema ni možno prevesti iz poljubnega začetnega stanja v poljubno končno stanje (torej če ni vodljiv) v $N = n$ korakih, ga ni možno prevesti niti kadarkoli kasneje (torej sploh ni vodljiv). Sistem je torej vodljiv tedaj in le tedaj, če je njegova matrika vodljivosti

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_{vn} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (5.91)$$

nesingularna. Nesingularnost lahko preverimo z izračunom ranga matrike (le-ta mora biti enak n) ali z izračunom determinante (le-ta mora biti različna od 0).

Omeniti velja, da je kriterij vodljivosti diskretnih sistemov povsem identičen kriteriju za zvezne sisteme (le da sta pri zveznih sistemih uporabljeni matriki \mathbf{A}_z in \mathbf{b}_z zapisa zveznega sistema v prostoru stanj). Poleg tega velja, da je diskretni ekvivalent zveznega sistema vodljiv tedaj in le tedaj, če je zvezni sistem vodljiv in če se njegove različne lastne vrednosti preslikajo v različne lastne vrednosti diskretnega sistema.

5.5 Spoznavnost diskretnih sistemov

Diskretni dinamični sistem z izhodom $y(k)$ je spoznaven, če lahko določimo poljubno stanje sistema $\mathbf{x}(k)$ v trenutku $k = 0$, torej $\mathbf{x}(0)$, iz končnega zaporedja izhodnega signala $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$.

Zapišimo izhode diskretnega sistema (4.29)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (5.92)$$

v trenutkih $k = 0, k = 1, k = 2, \dots, k = N - 1$:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0) + du(0) \\
 y(1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(1) + du(1) = \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(0) + du(1) \\
 y(2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{b} u(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(1) + du(2) \\
 &\vdots \\
 y(N-1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{x}(0) + [d \quad \mathbf{c}^T \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{b}] \mathbf{u}_N
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

kjer je \mathbf{u}_N enak kot v enačbi (5.87). Če definiramo še vektor

$$\mathbf{y}_N = [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y(N-1)]^T \tag{5.94}$$

ter matriki

$$\mathbf{Q}_{sN} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix} \tag{5.95}$$

in

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ 0 & 0 & & d & \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & d & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-4} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-3} \mathbf{b} \\ d & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-3} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{5.96}$$

lahko zapišemo sistem enačb (5.93) v naslednji obliki

$$\mathbf{y}_N - \mathbf{F}_N \mathbf{u}_N = \mathbf{Q}_{sN} \mathbf{x}(0) \tag{5.97}$$

Imamo torej sistem N enačb z n neznankami (iščemo seveda začetno stanje $\mathbf{x}(0)$). S stališča reševanja sistema enačb gre za precej drugačen problem kot v primeru reševanja sistema enačb (5.89). Tam smo iskali katerikoli \mathbf{u}_N , ki zadosti enačbi (5.89). V enačbi (5.97) pa iščemo enolično rešitev za $\mathbf{x}(0)$, ki pa je ni mogoče določiti, če je število enačb premajhno. Z dodatnimi meritvami, ki prinašajo dodatne enačbe, namreč ožimo prostor, v katerem se začetno stanje $\mathbf{x}(0)$ zagotovo nahaja. Ko se ta prostor zoži na eno samo točko, natančno poznamo začetno stanje $\mathbf{x}(0)$ sistema. Glede na povedano sistem (5.97) v splošnem ni rešljiv za $N < n$, kar z drugimi besedami pomeni, da stanja sistema n -tega reda ni možno določiti v manj kot n trenutkih.

Če je $N = n$, lahko določimo stanje $\mathbf{x}(0)$ z enačbo

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_{sN}^{-1} [\mathbf{y}_N - \mathbf{F}_N \mathbf{u}_N] \tag{5.98}$$

vendar le v primeru, če je matrika \mathbf{Q}_{sN} nesingularna (determinanta matrike je različna od 0 oz. vsi stolpci matrike so linearno neodvisni).

Če je matrika \mathbf{Q}_{sN} singularna za $N = n$, lahko podobno kot pri izpeljavi vodljivosti dokažemo, da dodatna opazovanja (za $N > n$) ne prinesejo nobene dodatne informacije v smislu spoznavnosti $\mathbf{x}(0)$. Če ne moremo določiti stanja sistema iz n opazovanj, ga ne moremo določiti tudi iz $N > n$ opazovanj, torej ga sploh ne moremo določiti. Sistem je torej spoznaven tedaj in le tedaj, če je njegova matrika spoznavnosti

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_{sn} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

nesingularna. Tudi spoznavnost se pri diskretnih sistemih ugotavlja na popolnoma enak način kot pri zveznih.



Primer 5.10

Podan je diskretni sistem, ki vključuje tudi povratno zanko oz. regulacijski predpis za $u(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 2] \mathbf{x}(k) \\ u(k) &= w(k) - [k_1 \quad k_2] \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.100)$$

kjer je $w(k)$ zunanji vhod regulacijskega sistema, k_1 in k_2 pa sta konstanti. Za katere vrednosti konstant k_1 in k_2 je sistem vodljiv z vhoda $w(k)$? Za katere vrednosti konstant k_1 in k_2 je sistem spoznaven z izhoda $y(k)$?

Če vstavimo enačbo regulatorja v enačbo stanj, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (w(k) - [k_1 \quad k_2] \mathbf{x}(k)) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & 1 - k_2 \\ -2 - k_1 & -3 - k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{pz}} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Enačbo (5.101) lahko interpretiramo kot enačbo stanj z vhomom $w(k)$. Matrika vodljivosti povratnozančnega sistema je

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}_{pz}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 - k_1 - k_2 \\ 1 & -5 - k_1 - k_2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_v = -6 \neq 0 \quad (5.102)$$

kjer je \mathbf{A}_{pz} sistemska matrika povratnozančnega sistema. Sistem je torej vodljiv z vhoda $w(k)$. Matrika spoznavnosti je

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 - 3k_1 & -5 - 3k_2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_s = 3 + 6k_1 - 3k_2 \quad (5.103)$$

Sistem ni spoznaven za parametre regulatorja, ki izpolnjujejo naslednjo enačbo:

$$3 + 6k_1 - 3k_2 = 0 \quad (5.104)$$

Za ostale vrednosti parametrov regulatorja je sistem spoznaven.

5.6 Ekvivalentnost sistemov v prostoru stanj

Za dva sistema, zapisana v prostoru stanj, pravimo, da sta ekvivalentna, če se po vhodno-izhodnem obnašanju ne ločita med seboj. Izkazuje se, da je mogoče najti neskončno ekvivalentnih sistemov določenega diskretnega dinamičnega sistema. Četudi je prenosna funkcija vseh sistemov enaka, je možno takšen sistem v prostoru stanj predstaviti z neskončno zapisi. Tudi če se omejimo le na zapise z minimalno dolžino vektorja stanj, še vedno obstaja neskončno mnogo zapisov takšnega sistema v prostoru stanj. Ker smo se v naši obravnavi omejili na analizo linearnih časovno nespremenljivih sistemov, nas bodo zanimala le linearne preslikave med vektorji stanj teh sistemov

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_t \quad (5.105)$$

kjer je \mathbf{x} vektor stanj izhodiščnega sistema, \mathbf{x}_t vektor stanj transformiranega sistema, \mathbf{T} pa je nesingularna kvadratna matrika dimenzije n . Če vnesemo izraz (5.105) v izhodiščni sistem (4.29), dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{x}_t(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + du(k) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{T}\mathbf{x}_t(0) \end{aligned} \quad (5.106)$$

Po deljenju prve in tretje enačbe v (5.106) s \mathbf{T} z leve strani, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t(k+1) &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{x}_t(k) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{x}_t(k) + d u(k) \\ \mathbf{x}_t(0) &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Enačba (5.107) predstavlja zapis transformiranega sistema v prostoru stanj, matrike transformiranega sistema pa podajajo enačbe:

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{c}_t^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \quad d_t = d \quad (5.108)$$

Ekvivalentni sistemi imajo enake vrednosti vhodno-izhodne konstante d , zato se z njo v prihodnje več ne bomo ukvarjali. Ekvivalentni sistemi imajo tudi enako dinamiko, torej enake pole, kar pomeni, da so lastne vrednosti matrik \mathbf{A} in \mathbf{A}_t enake.

Z izborom različnih transformacijskih matrik \mathbf{T} , ki pa morajo seveda biti nesingularne, dobimo različne zapise transformiranega sistema. V praksi so se uveljavile nekatere oblike zapisa, ki omogočajo lažjo analizo oz. načrtovanje sistemov. Takšnim oblikam zapisa rečemo kanonične oblike.

5.6.1 Diagonalna kanonična oblika

Diagonalna kanonična oblika je oblika zapisa, pri kateri je sistemska matrika diagonalna, kar pomeni, da med stanji ni nobene interakcije. Predikcija določenega stanja je namreč odvisna le od trenutne vrednosti tega stanja in trenutne vrednosti vhoda.

Spomnimo se enačbe za določanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike. Lastne vrednosti λ_i in pripadajoči lastni vektorji $\boldsymbol{\theta}_i$ matrike \mathbf{A} so tisti, ki rešijo naslednjo enačbo:

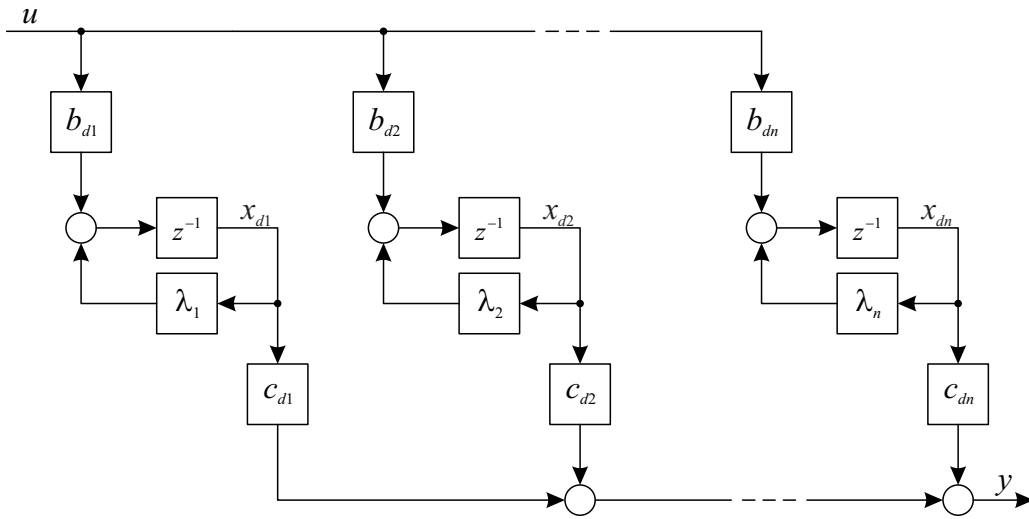
$$\mathbf{A} \boldsymbol{\theta}_i = \lambda_i \boldsymbol{\theta}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.109)$$

kar lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda} \quad (5.110)$$

Če enačbo (5.110) premultipliciramo z $\boldsymbol{\Theta}^{-1}$, dobimo

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (5.111)$$



Slika 5.5: Realizacija sistema, zapisanega v obliki diagonalne kanonične oblike

Ker iščemo transformacijo \mathbf{T} v enačbi (5.108), s katero dobimo diagonalno sistemsko matriko transformiranega sistema, lahko glede na enačbo (5.111) ugotovimo, da je iskana matrika Θ , torej matrika lastnih vektorjev systemske matrike. Matrike diagonalne kanonične oblike zapisa sistema v prostoru stanj so torej

$$\mathbf{A}_d = \Theta^{-1} \mathbf{A} \Theta = \Lambda \quad \mathbf{b}_d = \Theta^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{c}_d^T = \mathbf{c}^T \Theta \quad (5.112)$$

kjer smo z indeksom d poudarili, da gre za matrike diagonalne kanonične oblike. Tudi vektor stanj je označen z indeksom d :

$$\mathbf{x}_d^T(k) = [x_{d1}(k) \quad x_{d2}(k) \quad \cdots \quad x_{dn}(k)] \quad (5.113)$$

Ker je systemska matrika diagonalna, se enačba stanj poenostavi in dobimo n medsebojno nesklapljenih diferenčnih enačb:

$$\begin{aligned} x_{d1}(k+1) &= \lambda_1 x_{d1}(k) + b_{d1} u(k) \\ &\vdots \\ x_{dn}(k+1) &= \lambda_n x_{dn}(k) + b_{dn} u(k) \end{aligned} \quad (5.114)$$

Grafična ponazoritev sistema, zapisanega v diagonalni kanonični obliki, je na sliki 5.5. Iz slike 5.5 lahko sklepamo še na eno ugodno lastnost diagonalne kanonične oblike. Ta zapis namreč omogoča precej enostavno analizo vodljivosti in spoznavnosti sistema. Če je namreč določen element vhodnega vektorja \mathbf{b}_d enak 0, vhodni signal ne vpliva na pripadajoče stanje. Ker tudi med stanji ni interakcije, na dotično stanje ni mogoče vplivati in je zato nevodljivo. Zato lahko ugotovimo,

da lahko število vodljivih stanj, ki ga sicer izračunamo kot rang matrike vodljivosti, določimo tudi kot število neničelnih elementov v vhodnem vektorju \mathbf{b}_d zapisa sistema z diagonalno kanonično obliko.

Na podoben način lahko ugotovimo, da je sistem nespoznaven, če je v izhodnem vektorju \mathbf{c}_d^T katerikoli element enak 0. Takrat pripadajoče stanje nima direktnega vpliva na izhod. Ker je sistemska matrika diagonalna, tudi ni možen posredni vpliv preko katerega od ostalih stanj, zato z merjenjem izhoda ne dobimo nobene informacije o obravnavanem stanju in je sistem po definiciji nespoznaven. Če preštejemo vse ničelne elemente v izhodnem vektorju \mathbf{c}_d^T , dobimo število nespoznavnih stanj sistema.

Diskretni sistem je mogoče pretvoriti v diagonalno kanonično obliko, če so vse lastne vrednosti sistemske matrike različne. Če ta pogoj ni izpolnjen, sistem pretvorimo v sorodno Jordanovo kanonično obliko, ki pa je v tem delu ne bomo obravnavali, saj se celotna analiza in s tem ideja neodvisnosti stanj nekoliko zaplete. Zaradi numeričnih problemov se diagonalna kanonična oblika v praksi ne uporablja zelo pogosto, je pa zelo pomembna s pedagoškega vidika.



Primer 5.11

Dinamični diskretni sistem je opisan z naslednjim zapisom v prostoru stanj:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Pretvorite sistem v diagonalno kanonično obliko zapisa v prostoru stanj. Kakšno je začetno stanje transformiranega sistema, če je začetno stanje podanega sistema $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$?

Čeprav je obravnavani sistem multivariabilni, za pretvorbo veljajo enake enačbe. Pri pretvorbi v diagonalno kanonično obliko uporabimo za transformacijsko matriko \mathbf{T} kar matriko lastnih vrednosti sistemske matrike:

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Theta} = [\boldsymbol{\vartheta}_1 \ \boldsymbol{\vartheta}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\vartheta}_n] \quad (5.116)$$

Lastne vrednosti sistemske matrike so $\lambda_1 = \frac{4}{5}$, $\lambda_2 = \frac{9}{10}$ in $\lambda_3 = 1$, pripadajoči lastni vektorji pa:

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\vartheta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

Tukaj je potrebno omeniti, da pri postopku gradnje matrike \mathbf{T} ni potrebno normirati dolžin lastnih vektorjev, kar nam pride še posebej prav v tem sistemu, ko so vrednosti matrike celoštevilске. Matriki \mathbf{T} in \mathbf{T}^{-1} v danem primeru sta:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

Transformirani sistem se glasi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d^T(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d^T(k) + \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \quad \mathbf{x}_d^T(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_d^T(k) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (5.119)$$

Velja omeniti, da pretvorba multivariabilnega sistema ni nič zahtevnejša kot pretvorba univariabilnega sistema. V splošnem je obravnava multivariabilnih sistemov v prostoru stanj dokaj podobna obravnavi univariabilnih sistemov.

5.6.2 Vodljivostna regulatorska kanonična oblika

Nekateri avtorji to kanonično obliko poimenujejo le vodljivostna kanonična oblika, vendar pa obstajata dve vrsti vodljivostne kanonične oblike, tako da bomo v naši obravnavi eksplicitno poudarili, da gre za regulatorsko obliko. Mimogrede naj omenim, da ukaz `canon` v programskem paketu MATLAB pretvarja sistem v t.i. vodljivostno transformacijsko kanonično obliko, ki je ne bomo obravnavali.

Vodljivostno regulatorsko kanonično obliko zapisa sistema v prostoru stanj smo že zapisali, ko smo želeli sistem, predstavljen s prenosno funkcijo, pretvoriti v

prostor stanj. Prišli smo do enačbe stanj (4.47)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (5.120)$$

in izhodne enačbe (4.49)

$$y(k) = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \cdots \quad b_1 - b_0 a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (5.121)$$

Sistemska matrika \mathbf{A}_v (matrike in vektorje vodljivostne regulatorne kanonične oblike bomo opremili z indeksom v) ima torej Frobeniusovo obliko, v kateri so v zadnji vrstici vidni koeficienti karakterističnega polinoma sistema:

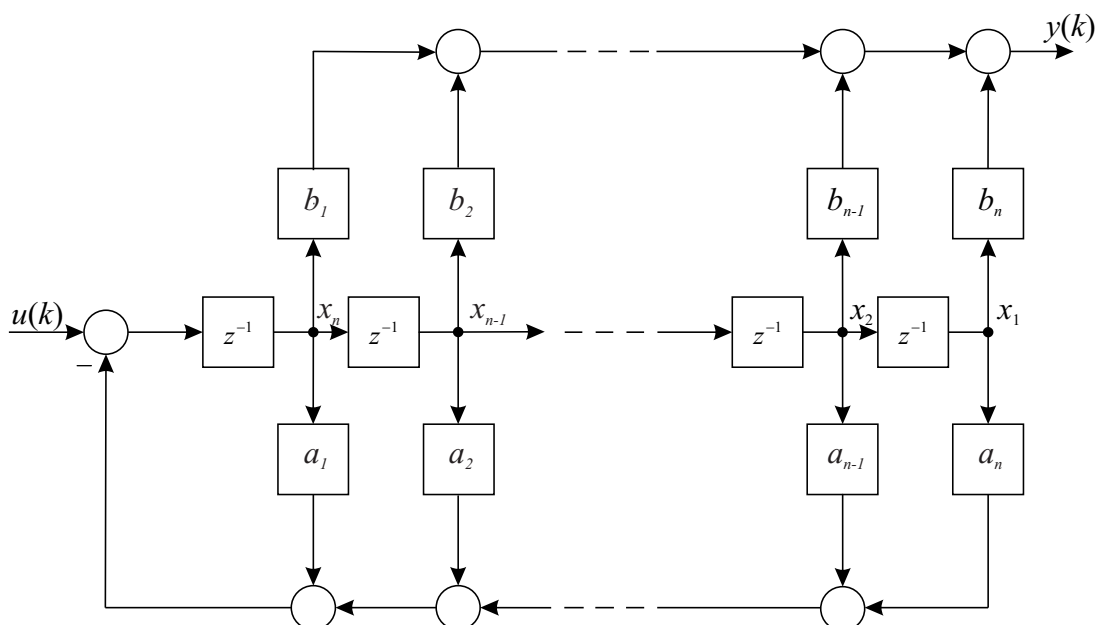
$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_v) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (5.122)$$

Vhodni vektor \mathbf{b}_v ima zelo enostavno obliko, izhodni vektor \mathbf{c}_v^T določajo koeficienti števca prenosne funkcije, vhodno-izhodna konstanta pa ima takšno vrednost kot pri vseh oblikah sistema v prostoru stanj ($d = b_0$). Velika večina realnih procesov, ki jih želimo voditi, nima hipnega odziva na vzbujanje ($d = b_0 = 0$). V takšnih primerih diskretni sistem pretvorimo v vodljivostno regulatorno kanonično obliko, kot je prikazano na sliki 5.6. Vidimo, da gre pri vodljivostni regulatorski kanonični obliki za enako realizacijo sistema, kot jo dobimo, če prenosno funkcijo sistema realiziramo z delitveno metodo.

Transformacija sistema v vodljivostno regulatorno kanonično obliko

Pretvorba iz prenosne funkcije v vodljivostno regulatorno kanonično obliko je torej povsem enostavna. Kaj pa, če želimo v to obliko pretvoriti poljuben sistem, ki je zapisan v prostoru stanj? Kot bomo videli, je potreben in zadostni pogoj za pretvorbo vodljivost sistema. Če je torej determinanta matrike vodljivosti različna od 0, je pretvorba možna.

Iščemo torej pretvorbo (5.105) ali z drugimi besedami transformacijsko matriko \mathbf{T}_v (tudi tu indeks v pomeni, da gre za transformacijo v vodljivostno regulatorno kanonično obliko), ki izhodiščni sistem pretvori v vodljivostno regulatorno



Slika 5.6: Realizacija sistema, zapisanega v obliki vodljivostne regulatorne kanonične oblike

kanonično obliko. Iskana transformacijska matrika je podana z naslednjo enačbo

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{Q}_v \mathbf{W} \quad (5.123)$$

pri čemer je \mathbf{Q}_v matrika vodljivosti, podana z enačbo (5.91), \mathbf{W} pa je matrika

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

kjer so a_i koeficienti karakterističnega polinoma sistema, ki ga lahko določimo tudi na naslednji način

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (5.125)$$

Spomnimo se pogoja za pretvorbo sistema v prostoru stanj v poljubno transformirano obliko – matrika \mathbf{T} mora biti nesingularna oz. njena determinanta različna od 0. Ker vemo, da je determinanta produkta kvadratnih matrik enaka produktu determinant, je produkt dveh kvadratnih matrik nesingularen, če sta obe matriki nesingularni. Ker ima matrika \mathbf{W} posebno trikotno obliko z enicami na nasprotni diagonali (to je diagonala, ki teče po kvadratni matriki od levega elementa spodaj

do desnega zgoraj) in ničlami pod njo, je njena determinanta vedno enaka $+1$ ali -1 , zaradi česar je matrika \mathbf{W} vedno nesingularna. Če je nesingularna še matrika \mathbf{Q}_v (ta pogoj je izpolnjen, če je sistem vodljiv), je nesingularna tudi matrika \mathbf{T}_v in sistem lahko pretvorimo v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko.



Primer 5.12

Pretvorite sistem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] \mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (5.126)$$

v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko.

Matrika vodljivosti sistema je:

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{3}{100} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{100} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_v = 0 \quad (5.127)$$

Sistem je torej nevodljiv in ga zato ni mogoče pretvoriti v nobeno vodljivostno kanonično obliko.



Primer 5.13

Pretvorite sistem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] \mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (5.128)$$

v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko.

Matrika vodljivosti sistema je tokrat:

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{9}{100} \\ \frac{1}{10} & -\frac{7}{100} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_v = -\frac{3}{100} \neq 0 \quad (5.129)$$

Sistem je torej vodljiv in ga zato lahko pretvorimo v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko.

Najprej izračunamo karakteristični polinom sistema (5.125):

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{10} & -\frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & z + \frac{4}{10} \end{vmatrix} = z^2 + \frac{3}{10}z + \frac{2}{100} \quad (5.130)$$

Potrebujemo še matriko \mathbf{W} (5.124):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Transformacijsko matriko izračunamo na naslednji način (5.123):

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{Q}_v \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{9}{100} \\ \frac{1}{10} & -\frac{7}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{100} & \frac{3}{10} \\ -\frac{4}{100} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

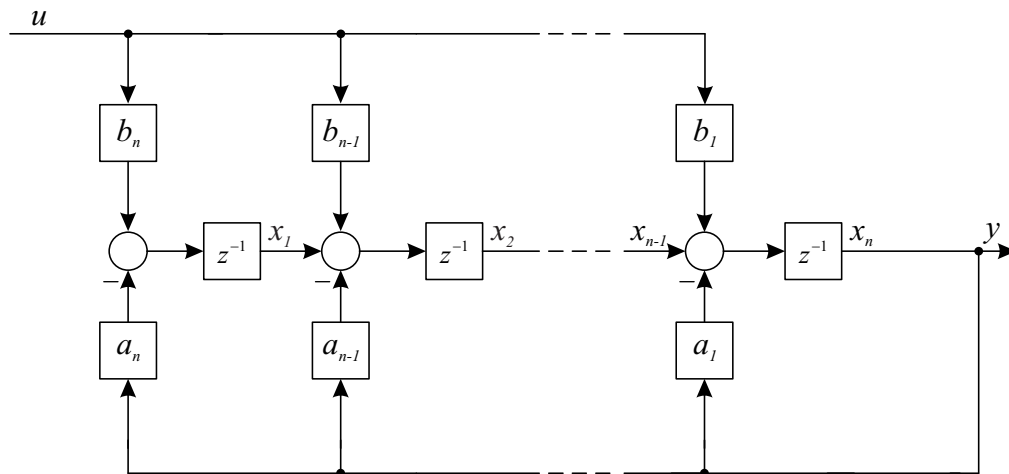
Sedaj lahko izračunamo še matrike transformiranega sistema:

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{100} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_v = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_v^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} \frac{14}{100} & \frac{4}{10} \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

5.6.3 Spoznavnostna observatorska kanonična oblika

Ta oblika je primerna za načrtovanje opazovalnikov, ki jih bomo obravnavali v poglavju 7.5. Zapis enačbe stanj v spoznavnostni observatorski kanonični obliki:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ b_{n-2} - b_0 a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} u(k) \quad (5.134)$$



Slika 5.7: Realizacija sistema, zapisanega v obliki spoznavnostne observatorske kanonične oblike

Zapis izhodne enačbe v spoznavnostni observatorski kanonični obliki:

$$y(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (5.135)$$

Značilnost spoznavnostne observatorske kanonične oblike je, da ima sistemska matrika \mathbf{A}_s (matrike in vektorji te kanonične oblike bodo opremljeni z indeksom s) transponirano Frobeniusovo obliko, izhodni vektor \mathbf{c}_s^T enostavno obliko, vhodni vektor \mathbf{b}_s pa je določen s koeficienti števca prenosne funkcije sistema.

Spoznavnostna observatorska kanonična oblika je torej dualna vodljivostni regulatorski kanonični obliki – sistemski matriki obeh oblik sta med seboj transponirani, izhodnemu vektorju ene oblike ustreza transponirani vhodni vektor druge oblike. Slika 5.7 prikazuje realizacijo spoznavnostne observatorske kanonične oblike v primeru, ko je vhodno izhodna konstanta ($d = b_0$) enaka 0. Opazimo lahko, da je tovrstna realizacija sistema enaka kot realizacija prenosne funkcije sistema z vgnezdno metodo.

Transformacija sistema v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko

Pretvorba iz prenosne funkcije v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko je torej povsem enostavna. Napišemo jo lahko namreč direktno, če poznamo

koeficiente števca in imenovalca prenosne funkcije, kot kažeta enačbi (5.134) in (5.135). Kaj pa, če želimo v to obliko pretvoriti poljuben sistem, ki je zapisan v prostoru stanj? Kot bomo videli, je potreben in zadostni pogoj za pretvorbo spoznavnost sistema. Če je torej determinanta matrike spoznavnosti različna od 0, je pretvorba možna.

Iščemo torej pretvorbo (5.105) ali z drugimi besedami transformacijsko matriko \mathbf{T} (označili jo bomo s \mathbf{T}_s), ki izhodiščni sistem pretvori v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko. Iskana transformacijska matrika je podana z naslednjo enačbo

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{W}\mathbf{Q}_s)^{-1} \quad (5.136)$$

pri čemer je \mathbf{Q}_s matrika spoznavnosti, podana z enačbo (5.99), \mathbf{W} pa je matrika, ki smo jo uporabili tudi pri pretvorbi v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko in jo podaja enačba (5.124). Pretvorba v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko je možna, če je matrika \mathbf{T}_s nesingularna in torej obrnljiva, zaradi česar mora biti tudi \mathbf{T}_s^{-1} nesingularna matrika. Slednji pogoj je za preverjanje možnosti pretvorbe v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko bolj ugoden. Če torej velja, da je $\mathbf{T}_s^{-1} = \mathbf{W}\mathbf{Q}_s$ nesingularna, lahko sistem pretvorimo v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko.

Kot smo ugotovili že pri pretvorbi v vodljivostno kanonično obliko, je produkt dveh matrik nesingularen, če sta obe matriki nesingularni. Ker ima matrika \mathbf{W} posebno trikotno obliko z enicami na nasprotni diagonali in ničlami pod njo, je njena determinanta vedno enaka $+1$ ali -1 , zaradi česar je matrika \mathbf{W} vedno nesingularna. Pogoj za pretvorbo v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko je torej nesingularnost matrike \mathbf{Q}_s . Ta pogoj je izpolnjen, če je sistem spoznaven.



Primer 5.14

Pretvorite sistem iz primera 5.13 še v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{4}{10} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.137)$$

Matrika spoznavnosti sistema je:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_s = \frac{2}{10} \neq 0 \quad (5.138)$$

Sistem je torej spoznaven in ga zato lahko pretvorimo v spoznavnostno observatorsko kanonično obliko.

Najprej izračunamo karakteristični polinom sistema (5.125):

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{10} & -\frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} & z + \frac{4}{10} \end{vmatrix} = z^2 + \frac{3}{10}z + \frac{2}{100} \quad (5.139)$$

Potrebujemo še matriko \mathbf{W} (5.124):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

Transformacijsko matriko izračunamo na naslednji način (5.136):

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{W}\mathbf{Q}_s)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & \frac{5}{2} \\ 5 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

Sedaj lahko izračunamo še matrike transformiranega sistema:

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{100} \\ 1 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_s = \mathbf{T}_s^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{14}{100} \\ \frac{4}{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_s^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_s = [0 \quad 1] \quad (5.142)$$

Če primerjamo rezultate primerov 5.13 in 5.14, ugotovimo, da sta dobljeni sistemski matriki med seboj res transponirani, medtem ko je vhodni vektor v enem primeru transponirani izhodni vektor v drugem primeru in obratno.

Poglavje 6

Pretvorba zveznih dinamičnih sistemov v diskretni prostor

Pretvorbo zveznih dinamičnih sistemov v diskretne v časih imenujemo tudi diskretizacija zveznih sistemov. Gre za problematičen postopek, saj pri njem zgubljammo informacijo. Iz sistemov, kjer poznamo vhode in izhode v vsakem časovnem trenutku, dobimo sisteme, kjer lahko opišemo obnašanje le v diskretnih časovnih trenutkih. Ker diskretni sistem nima informacije o tem, kaj se v zveznem sistemu dogaja med trenutki vzorčenja, je potrebno določene lastnosti zveznega sistema predpostaviti. Glede na povedano obstaja precej postopkov za diskretizacijo, ki temeljijo na drugačnih predpostavkah o obnašanju sistema med trenutki vzorčenja.

Če izhodiščni zvezni dinamični sistem predstavimo z operatorjem \mathcal{S}_z in diskretizirani dinamični sistem z operatorjem \mathcal{S} , lahko definiramo transformacijo \mathcal{D} , ki zvezni sistem preslika v diskretni sistem, kar lahko simbolično prikažemo na naslednji način:

$$\mathcal{S}_z \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{S} \quad (6.1)$$

Najbolj uporabljane skupine metod za diskretizacijo zveznih sistemov so naslednje [?, ?]:

- Metode prilagajanja frekvenčnega odziva, pri katerih iščemo diskretni sistem, ki ima podoben frekvenčni odziv kot zvezni sistem. V bistvu so to metode, kjer iščemo racionalni približek transcendentne funkcije $z = e^{sT}$ oz. obrnjene različice $s = \frac{1}{T} \ln z$. V to skupino sodijo metoda prvih diferenc,

metoda zadnjih diferenc, Tustinovo pravilo in metoda predkrivljenja frekvenc (angl. *pre-warping*). Zadnji dve metodi zaradi oblike matematične transformacije imenujemo tudi metoda bilinearne transformacije.

- Metode prilagajanja časovnega odziva, kjer iščemo diskretni sistem, ki ima v točkah vzorčenja enak odziv kot zvezni sistem, če ga vzbujamo z določeno vrsto signalov. Najbolj pogosto se uporabljata metodi stopnične (angl. *step invariance*) in impulzne invariance (angl. *impulse invariance*).
- Metode ekvivalence z zadrževalnikom, kjer iščemo diskretni sistem, ki se obnaša enako kot zvezni sistem, kateremu med trenutkoma vzorčenja zadržimo vrednost vhodnega signala, izhod pa opazujemo le v trenutkih vzorčenja. Najbolj pogosto se kot zadrževalno vezje uporabi zadrževalnik ničtega reda (angl. *zero-order hold equivalence, ZOH equivalence*), včasih pa tudi zadrževalnik prvega reda (angl. *first-order hold equivalence, FOH equivalence*). Metoda ekvivalence z zadrževalnikom ničtega reda je ekvivalentna metodi stopnične invariance.
- Metoda preslikave polov in ničel (angl. *pole-zero mapping*), pri kateri pretvorimo zvezne pole p_i ($i = 1, \dots, n_z$) in ničle z_i ($i = 1, \dots, m_z$) v diskretne pole π_i ($i = 1, \dots, n_d$) in ničle ζ_i ($i = 1, \dots, m_d$) po naslednji enačbi:

$$\begin{aligned} \pi_i &= e^{p_i T} \quad (i = 1, 2, \dots, n_z), & n_d &= n_z \\ \zeta_i &= e^{z_i T} \quad (i = 1, 2, \dots, m_z), & \zeta_i &= -1 \quad (i = m_z + 1, \dots, n_d - 1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

kjer je T čas vzorčenja, n_z število polov zveznega sistema, m_z pa število ničel zveznega sistema. Enačba $e^{z_i T}$ se uporablja le za pretvorbo končnih ničel. Zvezne ničle, ki se nahajajo v neskončnosti, premaknemo (vse razen ene) v točko $z = -1$ [7]. Če bi pretvorili neskončne zvezne ničle v neskončne diskretne ničle, bi umetno ustvarili časovno zakasnitev, kar je seveda nesmiselno. Ena diskretna ničla ostane v neskončnosti, sicer bi imel diskretni sistem neposredno povezavo z vhoda na izhod.

Seveda obstajajo še mnoge druge možnosti za diskretizacijo, a omenjene so tiste, ki se pogosteje uporabljajo. Izbor metode je zelo odvisen od namena:

- Če *diskretiziramo zvezni proces*, ki ga želimo voditi s sistemom digitalnega vodenja, je običajno idealna izbira *metoda stopnične invariance* oz. *metoda ekvivalence z zadrževalnikom ničtega reda*, saj je zadrževalno vezje na vhodu procesa zelo dober model dejanskega digitalno-analognega (D/A) pretvornika. Zelo podobne rezultate dobimo ob uporabi metode preslikave polov in ničel.

- Če želimo *realizirati digitalni filter* ali v diskretno obliko *pretvoriti zvezni regulator*, uporabimo eno od *metod prilagajanja frekvenčnega odziva*.

6.1 Metode prilagajanja frekvenčnega odziva

Zvezni sistem $G_z(s)$ diskretiziramo po tej metodi tako, da v prenosni funkciji sistema $G_z(s)$ kompleksno spremenljivko s nadomestimo z neko funkcijo kompleksne spremenljivke z , s čimer dobimo funkcijo spremenljivke z , ki jo interpretiramo kot diskretno prenosno funkcijo. Ker velja transcendentna povezava (3.81)

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (6.3)$$

spremenljivke s ne moremo nadomestiti z izrazom iz enačbe (6.3), saj bi na ta način dobili diskretno prenosno funkcijo, ki ne bi bila racionalna funkcija spremenljivke z , s čimer bi bile bistveno omejene možnosti analize tovrstnega sistema. Poleg tega je logaritemska funkcija mnogolična funkcija za kompleksne vrednosti argumenta. Ideja metod, ki temeljijo na prilagajanju frekvenčnega odziva, je, da poiščemo racionalni približek enačbe (6.3), čeprav se zavedamo, da je približek lahko zadovoljiv le na določenem frekvenčnem področju.

Problem diskretizacije zveznih sistemov smo torej prevedli na problem iskanja racionalnih približkov funkcije

$$L(z) = \ln z \quad (6.4)$$

Tu bomo obravnavali tri približke te funkcije, zanimala pa nas bo podobnost z originalno funkcijo v okolici $z = 1$ (kar je ekvivalentno okolici $s = 0$), torej pri nizkih frekvencah. Tri najbolj enostavni racionalni približki so:

$$\begin{aligned} L_1(z) &= z - 1 \\ L_2(z) &= \frac{z-1}{z} \\ L_3(z) &= 2\frac{z-1}{z+1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

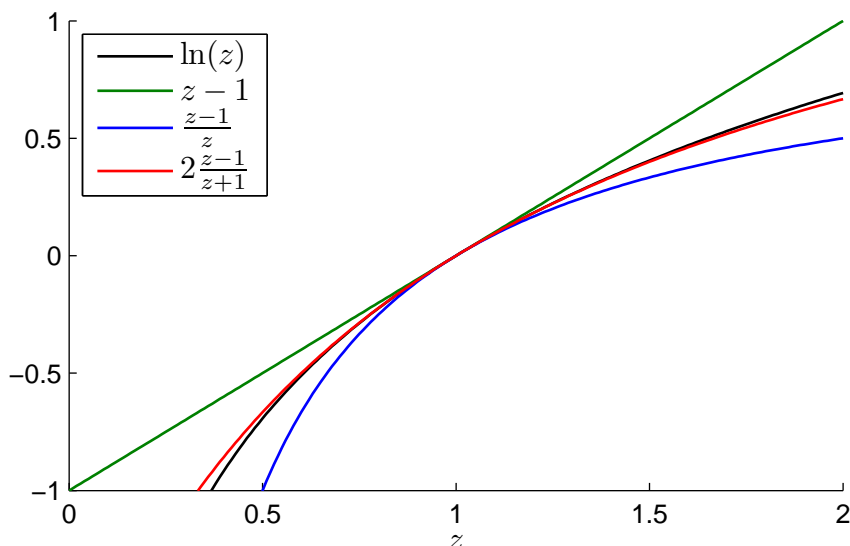
Pri primerjavi kakovosti približkov funkcije $L(z)$ si bomo pomagali z razvojem funkcije v Taylorjevo vrsto. Poljubno gladko funkcijo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog poljubne točke. V našem primeru v Taylorjevo vrsto razvijemo funkcijo $\ln z$ okrog $z = 1$:

$$L(z) = \ln z = L(z)|_{z=1} + \left. \frac{dL(z)}{dz} \right|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2L(z)}{dz^2} \right|_{z=1} (z-1)^2 + \dots \quad (6.6)$$

Dve funkciji sta enaki, če imata enak razvoj v Taylorjevo vrsto. Če nimata enakega razvoja v Taylorjevo vrsto, stopnja podobnosti narašča z večanjem števila

Tabela 6.1: Vrednosti funkcij $L(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ in $L_3(z)$ ter prvih treh odvodov pri $z = 1$

$F(z)$	$\ln z$	$z - 1$	$\frac{z-1}{z}$	$2\frac{z-1}{z+1}$
$\lim_{z \rightarrow 1} F(z)$	0	0	0	0
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} F(z)$	1	1	1	1
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} F(z)$	-1	0	-2	-1
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^3}{dz^3} F(z)$	2	0	6	1,5

Slika 6.1: Primerjava funkcij $L(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ in $L_3(z)$ v okolici $z = 1$

enakih prvih členov pri razvoju v Taylorjevo vrsto. Členi pri razvoju v Taylorjevo vrsto so neposredno odvisni od vrednosti odvodov funkcije v delovni točki. Tabela 6.1 prikazuje vrednosti funkcij $L(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ in $L_3(z)$ ter njihovih prvih treh odvodov. Čeprav je z kompleksno število, lahko primerjamo vse štiri funkcije v realni okolici števila $z = 1$, kar je prikazano na sliki 6.1. Vse štiri funkcije imajo enako vrednost funkcije in prvega odvida pri $z = 1$, zato imajo tudi skupno tangento v tej točki. Vrednost drugega odvida je enaka pri funkcijah $L(z)$ in $L_3(z)$, zato ima rdeča krivulja pri $z = 1$ enako ukrivljenost kot črna, zelena krivulja ima premajhno, modra pa preveliko ukrivljenost. Vrednost tretjega odvida je pri vseh štirih funkcijah različna, čeprav je razlika spet najmanjša med funkcijama $L(z)$ in $L_3(z)$. Zato je najboljši približek logaritmične funkcije po pričakovanju $L_3(z) = 2\frac{z-1}{z+1}$, ki ima obliko bilinearne funkcije.

V skladu s tremi približki funkcije $\ln z$ iz enačbe (6.5) dobimo tudi tri približke za funkcijo s iz enačbe (6.3):

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{z-1}{T} \\ s_2 &= \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T} \\ s_3 &= \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ker lahko spremenljivko s interpretiramo tudi kot operator odvajanja, lahko prva dva približka predstavimo tudi v tej luči:

$$\begin{aligned} \left\{ \dot{y} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) \right\} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{y(k+1)-y(k)}{T} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z-1}{T} Y(z) \right\} \\ \left\{ \dot{y} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) \right\} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{y(k)-y(k-1)}{T} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1-z^{-1}}{T} Y(z) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Oba izraza v enačbi (6.8) zvezni odvod nadomeščata z diferenčnim kvocien-
tom. Pri prvem pristopu odvod računamo »v prihodnosti« ($\frac{y(k+1)-y(k)}{T}$), zato
pripadajočo metodo diskretizacije, pri kateri s nadomestimo s $s_1 = \frac{z-1}{T}$, ime-
nujemo *metoda prvih diferenc*. Pri drugem pristopu odvod izvira »iz preteklo-
sti« ($\frac{y(k)-y(k-1)}{T}$), zato pripadajočo metodo diskretizacije, pri kateri s nadome-
stimo s $s_2 = \frac{z-1}{Tz}$, imenujemo *metoda zadnjih diferenc*. Metodo diskretizacije, pri
kateri s nadomestimo s $s_3 = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, imenujemo *Tustinovo pravilo*, zaradi mate-
matične oblike pa včasih tudi *bilinearna transformacija*.

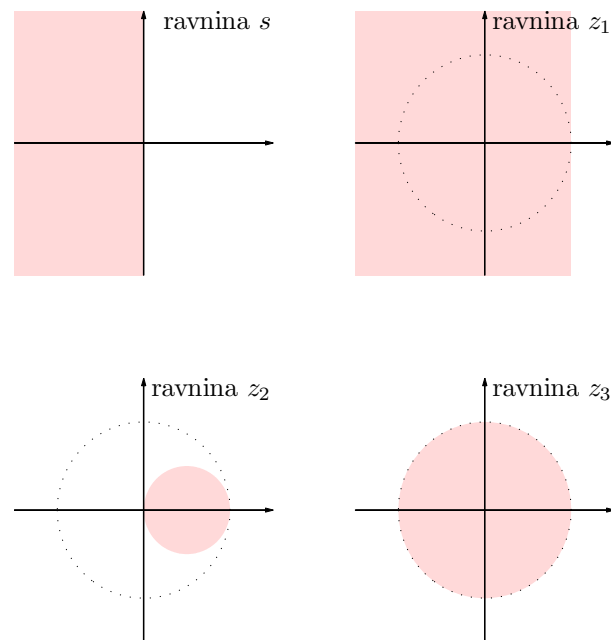
Diskretni ekvivalent $H(z)$ zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ torej dobimo na nasle-
dnji način:

$$H(z) = G_z(s)|_{s=s_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.9)$$

kjer indeks i definira eno od prej omenjenih metod.

Oglejmo si še preslikavo odprte leve polravnine ravnine s (torej področja stabilnih
polov) v ravnino z . V razdelku 3.9 smo spoznali, da transcendentna preslikava
 $z = e^{sT}$ odprto levo polravnino ravnine s preslika v notranjost kroga enote brez
daljice na negativni realni osi. Zelo dobra lastnost metode za diskretizacijo je, da
stabilni zvezni sistem preslika v stabilni diskretni sistem, medtem ko nestabilni
zvezni sistem preslika v nestabilni diskretni sistem. To pomeni, da od dobre
metode za diskretizacijo pričakujemo, da levo polravnino ravnine s preslika v
notranjost kroga enote v ravnini z . Za namen preslikave s v z moramo iz enačbe
(6.7) izraziti z , s čimer dobimo tri približke za funkcijo $z = e^{sT}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + sT \\ z_2 &= \frac{1}{1-sT} \\ z_3 &= \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \end{aligned} \quad (6.10)$$



Slika 6.2: Preslikava leve polravnine ravnine s s transformacijami iz (6.10)

Vse tri preslikave leve polravnine ravnine s so prikazane na sliki 6.2. Opazimo, da se lahko z metodo prvih diferenc stabilna zvezna prenosna funkcija preslika v nestabilno diskretno prenosno funkcijo (slika 6.2 zgoraj desno). Podobno velja, da se lahko z metodo zadnjih diferenc nestabilna zvezna prenosna funkcija preslika v stabilno diskretno prenosno funkcijo (slika 6.2 spodaj levo). Tustinovo pravilo se je tudi v tem pogledu izkazalo za najboljše med obravnavanimi, saj preslika stabilno območje zveznih prenosnih funkcij v stabilno območje diskretnih prenosnih funkcij in nestabilno področje zveznih prenosnih funkcij v nestabilno območje diskretnih prenosnih funkcij (slika 6.2 spodaj desno).

6.1.1 Tustinovo pravilo

Kljub mnogim dobrim lastnostim Tustinovega pravila pa v splošnem odziva prvotne zvezne in rezultirajoče diskretne prenosne funkcije na poljubni vhodni signal nista enaka (kar velja za katerokoli pravilo diskretizacije). Dobra mera za popačenje zaradi diskretizacije je razlika med frekvenčnima odzivoma ene in druge prenosne funkcije. Frekvenčni odziv zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ je enak $\mathcal{H}_z(\omega) = G_z(j\omega)$, frekvenčni odziv $\mathcal{H}(\omega)$ rezultirajoče diskretne prenosne funkcije

$$H(z) = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (6.11)$$

pa dobimo tako, da spremenljivko z v diskretni prenosni funkciji nadomestimo z $e^{j\omega T}$:

$$\mathcal{H}(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G_z\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}\right) \quad (6.12)$$

Če v argumentu zadnje funkcije števec in imenovalec delimo z $e^{\frac{j\omega T}{2}}$ ter upoštevamo še formulo za zapis funkcije tangens s kompleksnimi števili ($\operatorname{tg} x = j\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{e^{jx}+e^{-jx}}$), dobimo

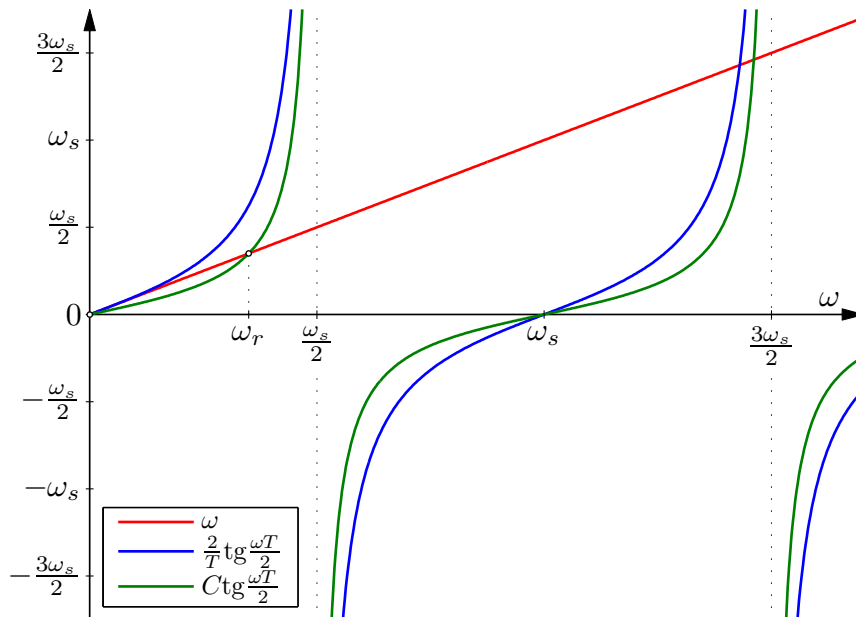
$$\mathcal{H}(\omega) = G_z\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\frac{\omega T}{2}}}\right) = G_z\left(j\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}\right) \quad (6.13)$$

Idealno bi bilo, če bi bila frekvenčni odziv zveznega sistema $\mathcal{H}_z(\omega) = G_z(j\omega)$ in frekvenčni odziv diskretnega sistema $\mathcal{H}(\omega) = G_z\left(j\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}\right)$ enaka pri vseh frekvencah. Frekvenčna odziva imata enako vrednost, ko sta argumenta funkcij $G_z(\cdot)$ enaka. Primerjamo torej argumenta ω in $\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}$ (j lahko pri primerjavi opustimo). Obe funkciji (na sliki 6.3 sta prikazani z rdečo in modro barvo) imata enako vrednost in enak prvi odvod pri frekvenci $\omega = 0$, zato se oba frekvenčna odziva ujemata pri nizkih frekvencah. Žal lahko ugotovimo, da je presečišče modre in rdeče krivulje pri $\omega = 0$ na sliki 6.3 edino presečišče pri frekvencah pod $\frac{\omega_s}{2}$ (višje frekvence pri diskretizaciji nimajo smisla zaradi zahtev teorema o vzorčenju), zato sta zvezni in diskretni frekvenčni odziv enaka samo pri tej frekvenci.

Pri diskretizaciji zveznih sistemov je potrebno opozoriti na pojav izkrivljenja frekvenc (angl. *frequency warping*), ki ga lahko opišemo z enačbo, ki izhaja iz enačbe (6.13) ob upoštevanju $\mathcal{H}_z(\omega) = G_z(j\omega)$:

$$\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{H}_z\left(\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}\right) \quad (6.14)$$

Ta enačba pravi, da ima diskretni sistem pri frekvenci ω enak frekvenčni odziv, kot ga ima zvezni sistem pri frekvenci $\frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}$. V postopku diskretizacije zveznega sistema pride torej do popačenja frekvenčnega odziva, ko se diskretni sistem pri določeni frekvenci obnaša enako kot zvezni sistem pri neki višji frekvenci. Dokler so frekvence veliko nižje od Nyquistove frekvence $\frac{\omega_s}{2}$, so ta popačenja razmeroma majhna. Ko pa se frekvenca približuje Nyquistovi frekvenci, popačenja drastično narastejo, kar ilustrira tudi slika 6.3. Glede na enačbo (6.14) se celoten frekvenčni odziv zveznega sistema (na frekvenčnem intervalu od 0 do neskončno) v izkrivljeni obliki preslika v frekvenčni odziv diskretnega sistema (na frekvenčnem intervalu od 0 do Nyquistove frekvence), kjer transformacijo neodvisne spremenljivke prikazuje potek modre krivulje na sliki 6.3. Nad Nyquistovo frekvenco seveda pride do zgibanja frekvenc, kar smo spoznali v prejšnjih poglavjih.



Slika 6.3: Potek funkcij, ki ilustrirajo pojav izkrivljenja frekvenc: ω , $\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ in $C \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$



Primer 6.1

S Tustinovim pravilom določite dva diskretna ekvivalentna zveznega filtra s prenosno funkcijo

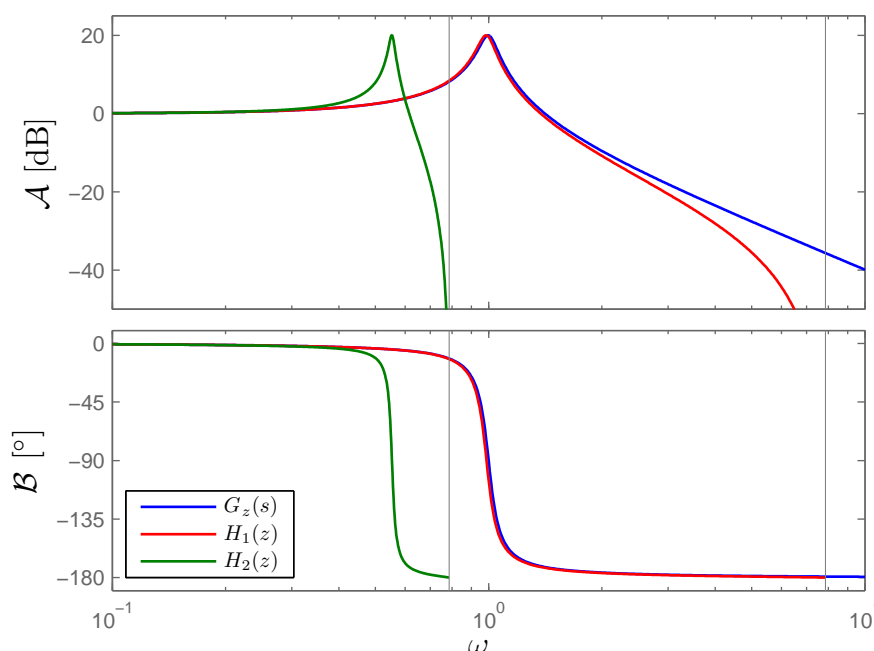
$$G_z(s) = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 1} \quad (6.15)$$

Prvi digitalni filter naj ima čas vzorčenja enak $T_1 = 0,4$, drugi pa $T_2 = 4$.

Diskretna ekvivalentna obeh sistemov dobimo z upoštevanjem Tustinovega pravila (6.11):

$$H_1(z) = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_1} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{\left(5 \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0,1 \left(5 \frac{z-1}{z+1}\right) + 1} = \frac{(z+1)^2}{26,5z^2 - 48z + 25,5}$$

$$H_2(z) = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_2} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{2(z+1)}\right)^2 + 0,1 \left(\frac{z-1}{2(z+1)}\right) + 1} = \frac{(z+1)^2}{1,3z^2 + 1,5z + 1,2}$$



Slika 6.4: Bodejev diagram prenosnih funkcij $G_z(s)$, $H_1(z)$ in $H_2(z)$ iz primera 6.1

V programskem paketu MATLAB narišimo Bodejev diagram zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ iz primera 6.1, na isti graf pa še Bodejeva diagrama obeh diskretnih ekvivalentov. To storimo z naslednjo kodo:

```

T1 = 0.4; % čas vzorčenja sistema H1(z)
T2 = 4; % čas vzorčenja sistema H2(z)
s = tf('s'); % operator s kot objekta tipa LTI
Gz = 1 / (s^2 + 0.1*s + 1); % zvezna prenosna funkcija
H1 = c2d(Gz, T1, 'tustin'); % diskretizirana pren. f. s časom vzor. T1
H2 = c2d(Gz, T2, 'tustin'); % diskretizirana pren. f. s časom vzor. T2
bode(Gz, H1, H2) % izris Bodejevih diagramov vseh sistemov

```

Bodejev diagram vseh treh sistemov je prikazan na sliki 6.4. Ta slika na zelo nazoren način prikazuje pojav izkrivljenja frekvenc, saj se jasno vidi, da se pri diskretizaciji celoten frekvenčni odziv zveznega sistema horizontalno stisne, tako da se odziv zaključi do Nyquistove frekvence, ki je prikazana s sivo navpično črto. Zaradi izkrivljenja frekvenc se celoten frekvenčni odziv prestavi proti nižjim frekvencam, pri čemer so bistveno bolj »prizadete« visoke frekvence (glede na frekvenco vzorčenja). Če je torej frekvenca vzorčenja prenizka, se to bolj odraža v frekvenčnem odzivu diskretnega sistema, kar v našem primeru ilustrira sistem $H_2(z)$, ki je na sliki 6.4 prikazan z zeleno barvo. Ta sistem ima namreč glede na dinamiko zveznega sistema povsem neustrezno izbran čas vzorčenja, zato se resonančni vrh zelo prestavi.

Pri reševanju naloge iz primera 6.1 si lahko pomagamo tudi s simbolično knjižnico programskega paketa MATLAB:

```
T1 = sym(0.4); % simbolični zapis desetiškega števila časa vzorčenja T1
T2 = sym(4);  % simbolični zapis desetiškega števila časa vzorčenja T2
syms s z     % simbolični zapis spremenljivk s in z
Gz = 1 / (s^2 + 0.1*s + 1); % zvezna prenosna funkcija
H1 = subs(Gz,s,2/T1*(z-1)/(z+1)); % Tustinovo pravilo za vzorčenje T1
pretty(simple(H1))                % "lep" zapis poenostavljenega izraza
H2 = subs(Gz,s,2/T2*(z-1)/(z+1)); % Tustinovo pravilo za vzorčenje T2
pretty(simple(H2))                % "lep" zapis poenostavljenega izraza
```

Rezultat zgornje kode je naslednji izpis, ki potrjuje pravilnost rezultatov v primeru 6.1:

```

      2
    2 (z + 1)
-----
      2
    53 z  - 96 z + 51

      2
    10 (z + 1)
-----
      2
    13 z  + 15 z + 12
```

6.1.2 Metoda predkrivljenja frekvenc

Včasih (običajno pri načrtovanju digitalnih filtrov) želimo ujemanje frekvenčnih odzivov zveznega in diskretnega sistema pri poljubni frekvenci ω_r (običajno pri mejni frekvenci nizkoprepustnega ali visokoprepustnega filtra ali pa pri centralni frekvenci pasovnoprepustnega filtra). V tem primeru pomnožimo modro funkcijo na sliki 6.3 s takšno konstanto, da se seka z rdečo funkcijo ravno pri želeni frekvenci. To v praksi pomeni, da v izrazu $\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ konstanto $\frac{2}{T}$ nadomestimo z neko drugo konstanto C ($C < \frac{2}{T}$), katere vrednost bomo še določili. Na ta način smo dobili novo funkcijo $C \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$, katere potek je na sliki 6.3 prikazan z zeleno barvo. Kot že rečemo, bomo določili vrednost konstante C , s katero bomo dosegli, da se rdeča in zelena krivulja sekata pri želeni frekvenci ω_r :

$$C \operatorname{tg} \frac{\omega_r T}{2} = \omega_r \quad \Rightarrow \quad C = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T}{2} = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s} \quad (6.16)$$

S tem smo prišli do splošnejše oblike bilinearne transformacije

$$H(z) = G_z(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}} \quad (6.17)$$

ki se od Tustinovega pravila (6.11) razlikuje v splošnejši konstanti C namesto konstante $\frac{2}{T}$. To preslikavo imenujemo tudi bilinearna transformacija s predkrivljenjem frekvenc (angl. *pre-warping, bilinear transformation with pre-warping*). Ime izhaja iz dejstva, da želimo s transformacijo izničiti vpliv pojava izkrivljenja frekvenc, kar seveda lahko storimo le pri eni neničelni frekvenci. Opozorimo naj, da tudi ta transformacija preslika levo polovico ravnine s v krog enote. Ker se rdeča in zelena krivulja na sliki 6.3 sekata pri frekvenci $\omega = 0$ in $\omega = \omega_r$, se tudi frekvenčna odziva zveznega sistema in diskretnega sistema ujemata pri teh dveh frekvencah.

Primer 6.2

Za diskretizacijo zveznega filtra s prenosno funkcijo

$$G_z(s) = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 1} \quad (6.18)$$

uporabite bilinearno transformacijo s predkrivljenjem frekvenc. Izračunajte prenosni funkciji dveh filtrov (prvi digitalni filter naj ima čas vzorčenja enak $T_1 = 0,4$, drugi pa $T_2 = 1$). Oba digitalna filtra in originalni zvezni filter naj imajo enako pasovno širino.

Pasovna širina nizkoprepustnega filtra je definirana kot frekvenca, kjer amplitudni odziv filtra pade na -3 dB. To se pri obravnavanem zveznem filtru zgodi pri frekvenci $1,55$ rad/s. Do tega podatka je možno priti po analitični poti, veliko lažje pa ga dobimo z analizo Bodejeva diagrama v programskem paketu MATLAB.

Najprej je potrebno izračunati konstanti C za bilinearno transformacijo:

$$\begin{aligned} C_1 &= \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T_1}{2} = 4,84 \\ C_2 &= \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T_2}{2} = 1,58 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nato uporabimo še enačbo (6.17), ki nas pripelje do končne rešitve:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= G_z(s) \Big|_{s=C_1 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{(z+1)^2}{24,9z^2 - 44,8z + 23,9} \\ H_2(z) &= G_z(s) \Big|_{s=C_2 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{(z+1)^2}{3,66z^2 - 3,01z + 3,35} \end{aligned} \quad (6.20)$$

V programskem paketu MATLAB narišimo Bodejev diagram zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ iz primera 6.2, na isti graf pa še Bodejeva diagrama obeh diskretnih ekvivalentov. To storimo z naslednjo kodo:

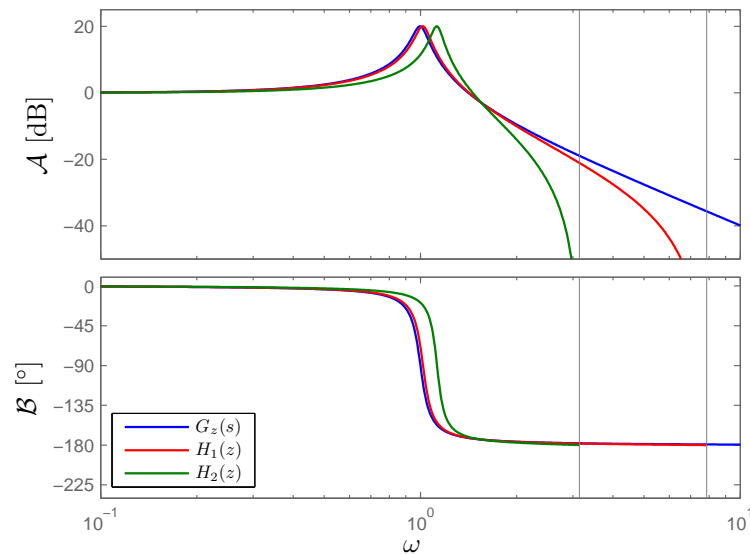
```

T1 = 0.4;
T2 = 1;
wr = 1.55;
s = tf('s');
z1 = tf('z',T1); % operator z za sistem s časom vzorčenja T1
z2 = tf('z',T2); % operator z za sistem s časom vzorčenja T2
Gz = 1 / (s^2 + 0.1*s + 1);
C1 = wr / tan(wr*T1/2);
s1 = C1*(z1-1)/(z1+1); % disk. sistem, ki ga vnesemo v Gz namesto s
H1 = 1 / (s1^2 + 0.1*s1 + 1);
H1 = minreal(H1); % krajšanje polov in ničel zaradi transformacije
C2 = wr / tan(wr*T2/2);
s2 = C2*(z2-1)/(z2+1); % disk. sistem, ki ga vnesemo v Gz namesto s
H2 = 1 / (s2^2 + 0.1*s2 + 1);
H2 = minreal(H2); % krajšanje polov in ničel zaradi transformacije
bode(Gz, H1, H2)

```

Potrebno je poudariti, da v zgornji kodi ni bila uporabljena funkcija `c2d` in njena vgrajena metoda `prewarp`, ker uporablja drugačen algoritem in daje drugačne rezultate kot obravnavana metoda predkrivljenja frekvenc. Bodejev diagram vseh treh sistemov je prikazan na sliki 6.5. Na sliki lahko vidimo, da se vsi trije frekvenčni odzivi ujema pri mejni frekvenci filtra. Lahko opazimo, da se frekvenčni odziv diskretnega sistema glede na zveznega pri frekvencah pod ω_r premakne k višjim frekvencam, nad ω_r pa je opazen premik k nižjim frekvencam. Opazimo lahko tudi, da je mogoče popačenje zaradi izkrivljenja frekvenc s to metodo nekoliko omiliti upoštevajoč Tustinovo pravilo, kar kaže primerjava zelenega in modrega frekvenčnega odziva na sliki 6.5, četudi sta frekvenca ω_r in Nyquistova frekvenca v tem primeru razmaknjeni zgolj za eno oktavo (faktor 2).

Pri obeh oblikah bilinearne transformacije (Tustinovo pravilo in metoda s predkrivljenjem frekvenc) se pri diskretizaciji ohranja število polov sistema, medtem ko to ne velja za število ničel sistema. Zlahka lahko pokažemo, da je število ničel rezultirajočega diskretnega sistema enako številu polov, kar pomeni, da ima diskretizirani sistem takojšnji vpliv vhoda na izhod, zaradi česar metoda ni primerna za transformacijo reguliranih procesov. Kot smo povedali v uvodu, je metoda primerna za diskretizacijo filtrov in zveznih regulatorjev, ki smo jih načrtali s kakšno od metod za načrtovanje zveznih regulacijskih sistemov.



Slika 6.5: Bodejev diagram prenosnih funkcij $G_z(s)$, $H_1(z)$ in $H_2(z)$ iz primera 6.2

6.2 Metode prilagajanja časovnega odziva

Metode v prejšnjem razdelku so temeljile na podobnosti frekvenčnih odzivov zveznega sistema in njegovega diskretnega ekvivalenta. V tem razdelku pa diskretizacijo zveznih sistemov temeljimo na primerjavi časovnih odzivov obeh sistemov. Doseči namreč želimo enakost odzivov na določeno vrsto vzbujanja. Četudi obstaja več metod, ki se delijo glede na vrsto vhodnega vzbujanja, je v praksi daleč najbolj uporabljana metoda stopnične invariance, ki daje diskretni sistem, katerega odziv na stopničasti vhodni signal se v trenutkih vzorčenja povsem sklada z odzivom zveznega sistema. V nadaljevanju se bomo omejili zgolj na metodo stopnične invariance.

6.2.1 Določanje diskretnega ekvivalenta prenosne funkcije z metodo stopnične invariance

Zvezni sistem, ki ga želimo diskretizirati, opisuje prenosna funkcija $G_z(s)$. Diskretni ekvivalent $H(z)$ te prenosne funkcije dobimo po metodi stopnične invariance tako, da izenačimo vrednosti odzivov v trenutkih vzorčenja

$$y^s(k) = y_z^s(t)|_{t=kT} \quad (6.21)$$

pri čemer je $y_z^s(t)$ odziv zveznega sistema $G_z(s)$ na enotino stopnico:

$$y_z^s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G_z(s) \right\} \quad (6.22)$$

$y^s(k)$ pa odziv diskretnega sistema $H(z)$ na enotino stopnico:

$$y^s(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} H(z) \right\} \quad (6.23)$$

Če enačbi (6.22) in (6.23) vstavimo v enačbo (6.21), dobimo:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} H(z) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G_z(s) \right\} \Big|_{t=kT} \quad (6.24)$$

Iz enačbe (6.24) lahko izrazimo $H(z)$:

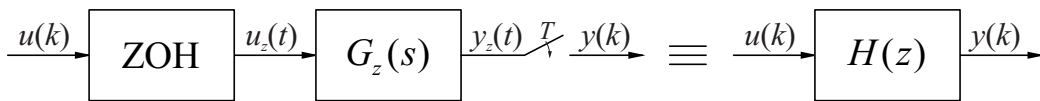
$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_z(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad (6.25)$$

V praksi se stopnična invarianca uporablja za diskretizacijo zveznega procesa, ki ima na vhodu D/A pretvornik oz. zadrževalnik ničtega reda. Če namreč pred zvezni blok postavimo zadrževalnik ničtega reda (ZOH), za zvezni blok pa vzorčevalno vezje ter sta vzorčevalnik in zadrževalnik časovno sinhronizirana, potem je takšen sistem ekvivalenten diskretnemu sistemu, ki je dobljen z diskretizacijo zveznega sistema po metodi stopnične invariance, kar ponazarja slika 6.6. Dokazimo to trditev. Izračunajmo impulzni odziv $h(k) = y(k)$ sistema na levi strani slike 6.6 na enotin impulz $u(k) = \delta(k)$. Zadrževalnik ničtega reda pretvori ta impulz v pulz amplitude 1 in trajanja T , le-tega pa lahko razstavimo v dve stopničasti funkciji, ki se pričneta ob času 0 in ob času T ter imata amplitudo $+1$ in -1 . Laplaceova transformacija tega signala je

$$U_z(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} \quad (6.26)$$

Odziv sistema $G_z(s)$ lahko zato napišemo v naslednji obliki

$$y_z(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_z(s)}{s} - \frac{G_z(s)}{s} e^{-sT} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_z(s)}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_z(s)}{s} e^{-sT} \right\} \quad (6.27)$$



Slika 6.6: Ekvivalentnost sistemov pri uporabi metode stopnične invariance

Glede na enačbo (6.22) nadalje velja:

$$y_z(t) = y_z^s(t) - y_z^s(t - T) \quad (6.28)$$

Impulzni odziv sistema dobimo z vzorčenjem signala $y_z(t)$ na vhodu vzorčevalnika, pri čemer upoštevamo še enačbi (6.21) in (6.28):

$$h(k) = y(k) = y_z(t)|_{t=kT} = y^s(k) - y^s(k - 1) \quad (6.29)$$

Prenosno funkcijo dobimo z z-transformacijo impulznega odziva v prejšnji enačbi, kjer upoštevamo še teorem premika v desno ter enačbi (6.21) in (6.22):

$$H(z) = \mathcal{Z} \{y^s(k)\} - z^{-1} \mathcal{Z} \{y^s(k)\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_z(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad (6.30)$$

Primer 6.3

Določite diskretni ekvivalent prenosne funkcije $G_z(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ po metodi stopnične invariance, če je čas vzorčenja $T = \ln \frac{10}{9} \doteq 0,1054$.

Najprej moramo izračunati inverzno Laplaceovo transformacijo funkcije $\frac{G_z(s)}{s}$:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_z(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right\} = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad (6.31)$$

Nato signal diskretiziramo (t nadomestimo s kT) in na njem izvedemo z-transformacijo:

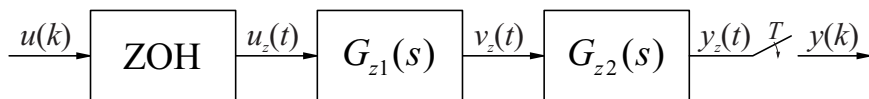
$$\mathcal{Z} \{1 - 2e^{-kT} + e^{-2kT}\} = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-T}} + \frac{z}{z-e^{-2T}} \quad (6.32)$$

Izračunajmo vrednosti e^{-T} in e^{-2T} :

$$\begin{aligned} e^{-T} &= e^{-\ln \frac{10}{9}} = e^{\ln \frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \\ e^{-2T} &= (e^{-T})^2 = \frac{81}{100} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Z upoštevanjem (6.33) v (6.32) pridemo do končnega rezultata:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-\frac{9}{10}} + \frac{z}{z-\frac{81}{100}} \right) = \frac{\frac{1}{100}(z+\frac{9}{10})}{(z-\frac{9}{10})(z-\frac{81}{100})} \quad (6.34)$$



Slika 6.7: Diskretizacija zaporedne vezave zveznih sistemov

Če imamo v sistemu več zveznih blokov, ki jih želimo diskretizirati s pomočjo metode stopnične invariance, je potrebno biti previden. Analizirajmo sistem na sliki 6.7. Če po metodi stopnične invariance diskretiziramo $G_{z1}(s)$ in $G_{z2}(s)$, dobimo:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \\ H_2(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Če pa diskretiziramo celoten sistem na sliki 6.7, dobimo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad (6.36)$$

Izkaže se, da $\frac{Y(z)}{U(z)}$ ni enak $H_1(z)H_2(z)$. Če torej iščemo diskretni ekvivalent zaporedne vezave dveh zveznih sistemov, je potrebno najprej poiskati produkt zveznih prenosnih funkcij in ga nato diskretizirati po metodi stopnične invariance. Rezultirajoči diskretni sistem bomo označili z $H_1H_2(z)$, s čimer zapis ločimo od $H_1(z)H_2(z)$, kjer gre za zaporedno vezavo diskretnih sistemov. Velja torej:

$$H_1H_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \neq H_1(z)H_2(z) \quad (6.37)$$

Primer 6.4

Poiščite diskretni ekvivalent (po metodi stopnične invariance) sistemov $G_{z1}(s)$, $G_{z2}(s)$ in $\frac{Y(z)}{U(z)}$ s slike 6.7 za čas vzorčenja $T = \ln \frac{10}{9}$, če velja:

$$G_{z1}(s) = \frac{1}{s+1} \quad G_{z2}(s) = \frac{4}{s+2} \quad (6.38)$$

Primerjajte prenosni funkciji $H_1H_2(z)$ in $H_1(z)H_2(z)$. Kako bi morali spremeniti sistem na sliki 6.7, da bi bila prenosna funkcija med $u(k)$ in $y(k)$ enaka $H_1(z)H_2(z)$?

Z uporabo enačb (6.35) in (6.37) dobimo:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{\frac{1}{10}}{z - \frac{9}{10}} \\ H_2(z) &= \frac{\frac{38}{100}}{z - \frac{81}{100}} \\ H_1 H_2(z) &= \frac{\frac{1}{50} \left(z + \frac{9}{10} \right)}{\left(z - \frac{9}{10} \right) \left(z - \frac{81}{100} \right)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Prenosna funkcija $H_1(z)H_2(z)$ ima pola pri $\frac{9}{10}$ in $\frac{81}{100}$, nima ničel, ojačenje pa je 2. Prenosna funkcija $H_1H_2(z)$ ima pola pri $\frac{9}{10}$ in $\frac{81}{100}$, ničlo pri $-\frac{9}{10}$, ojačenje pa je 2. Prenosni funkciji se torej razlikujeta le v ničli.

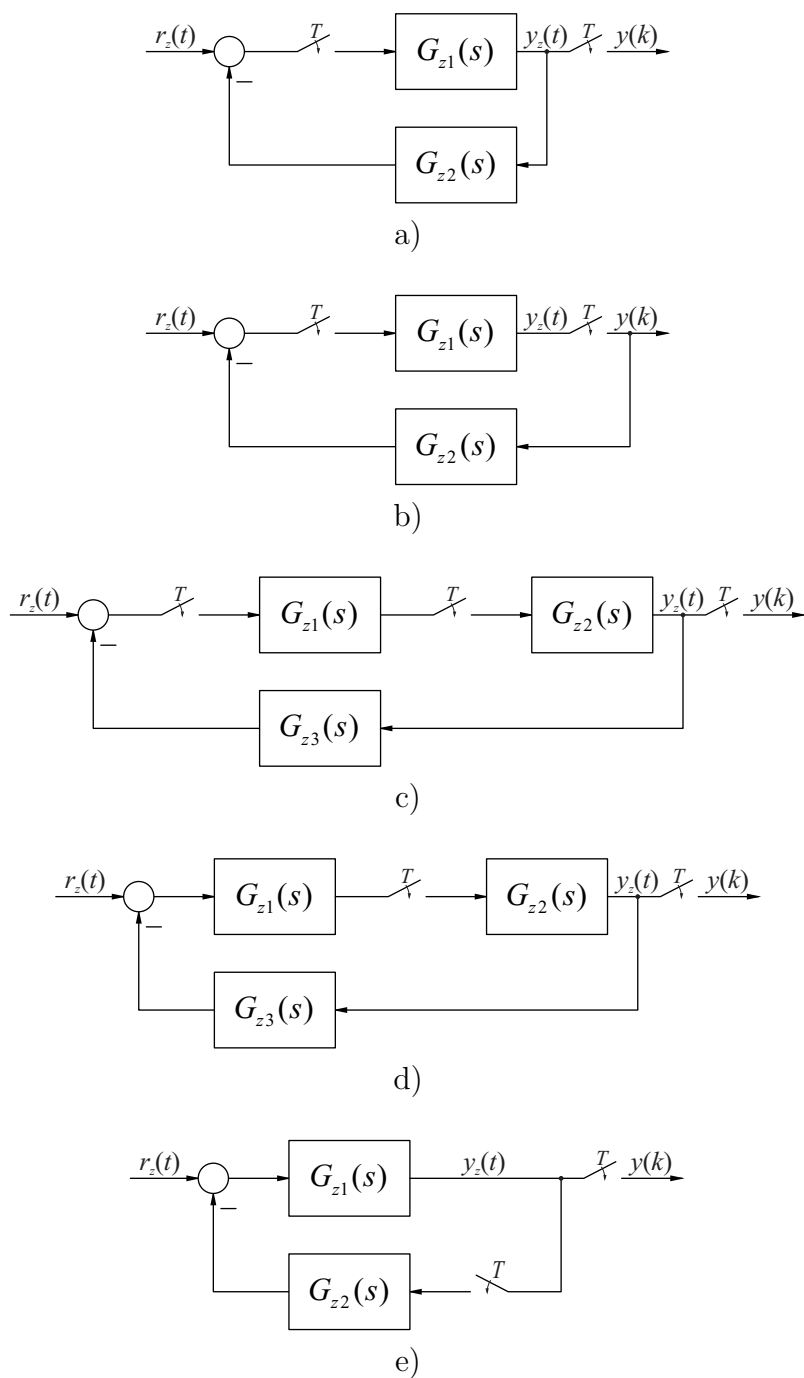
Prenosna funkcija $H_1(z)H_2(z)$ bi bila prenosna funkcija celotnega sistema, če bi bila med zveznima blokoma $G_{z1}(s)$ in $G_{z2}(s)$ na sliki 6.7 vzorčevalnik in zadrževalnik ničtega reda.

V prejšnjem primeru smo spoznali, da je potrebno zvezna sistema, ki sta ločena z vzorčevalnikom in zadrževalnikom ničtega reda, diskretizirati vsakega posebej. Če med zveznima sistemoma ni diskretnega bloka, računamo diskretni ekvivalent iz produkta zveznih prenosnih funkcij. To spoznanje lahko posplošimo na diskretizacijo bolj kompleksnih struktur, kot so zanke.

Bločna algebra, ki je veljala za zvezne sisteme, velja tudi za diskretne sisteme. Tako zvezne kot diskretne prenosne funkcije spadajo namreč med linearne operatore, zato veljajo enaka pravila in formule za poenostavljanje bločnih diagramov. Kot smo spoznali že pri enostavni zaporedni vezavi dveh zveznih sistemov, katerih diskretne ekvivalente iščemo, je potrebno biti pozoren na lego zadrževalnikov in vzorčevalnikov v sistemu.

Primer 6.5

Poiščite z -transformirane signala $y(k)$ za pet bločnih diagramov na sliki 6.8. Upoštevajte, da so bločni diagrami zaradi večje preglednosti prikazani brez zadrževalnikov ničtega reda, ki se smiselno uporabljajo takrat, ko je potrebno diskretni signal peljati v zvezni sistem.



Slika 6.8: Bločni diagrami zaprtizančnih sistemov za primer 6.5

Ker je v vseh sistemih, ki jih analiziramo, le ena zanka, je v števcu $Y(z)$ ojačenje direktne poti, pomnoženo z $R(z)$, v imenovalcu pa ojačenje zanke, povečano za 1. Potrebno je biti pazljiv le na točke, kjer vzorčevalnik prekinja direktno pot ali zanko.

Če analiziramo najprej direktne poti, vidimo, da v primerih a, b in c signal $r_z(t)$ vstopa v vzorčevalnik in nato v sistem $G_{z1}(s)$, zaradi česar nastopa v števcu iskane z-transformirane produkt $R(z)G_1(z)$. V primerih d in e signal $r_z(t)$ vstopa v blok $G_{z1}(s)$ kot zvezni signal (vmes ni nobenega diskretnega bloka), zato je potrebno diskretizirati zvezni signal $\mathcal{L}^{-1}\{R_z(s)G_{z1}(s)\}$. V ta namen bomo uvedli novo označbo, in sicer:

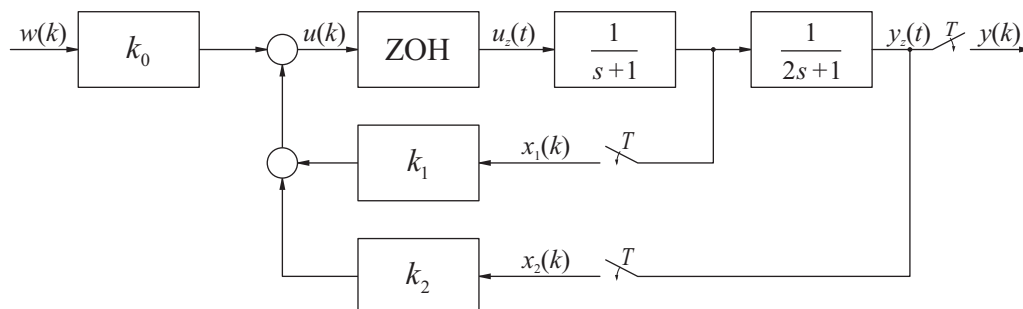
$$R_{G_1}(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[R_z(s)G_{z1}(s)]|_{t=kT}\} \quad (6.40)$$

V tem primeru ne gre za metodo stopnične invariance, ker je potrebno le diskretizirati zvezni signal, in ne poiskati diskretnega ekvivalenta zveznega sistema.

Pri analizi zank moramo poiskati točke, kjer je zanka prekinjena z diskretnim blokom (v našem primeru vzorčevalnikom), in transformirati zvezne sisteme, ki jih takšna delitev ustvari. Več podrobnosti lahko razberete iz rešitev:

$$\begin{aligned} \text{Primer a: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)}{1 + H_1H_2(z)} \\ \text{Primer b: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \\ \text{Primer c: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)H_2(z)}{1 + H_1(z)H_2H_3(z)} \\ \text{Primer d: } Y(z) &= \frac{R_{G_1}(z)H_2(z)}{1 + H_1H_2H_3(z)} \\ \text{Primer e: } Y(z) &= \frac{R_{G_1}(z)}{1 + H_1H_2(z)} \end{aligned} \quad (6.41)$$

V zgornjih izrazih smo upoštevali enačbo (6.40) ter dejstvo, da predstavljajo $H_1(z)$, $H_2(z)$ in $H_3(z)$ diskretne ekvivalente po metodi stopnične invariance zveznih sistemov $G_{z1}(s)$, $G_{z2}(s)$ in $G_{z3}(s)$.



Slika 6.9: Bločni diagrami regulacijskega sistema za primer 6.6

$\sum_{-\infty}^{\infty}$ Primer 6.6

Na sliki 6.9 je prikazan regulacijski sistem. Parametri regulatorja so $k_0 = \frac{8}{3}$, $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 = -1$. Čas vzorčenja je $T = \ln 4 \doteq 1,3863$. Izračunajte signala $u(k)$ in $y(k)$, če sistem vzbujamo z enotino stopnico $w(k)$. Določite in skicirajte tudi poteka zveznih signalov $u_z(t)$ in $y_z(t)$.

Če označimo zvezni prenosni funkciji

$$G_{z1}(s) = \frac{1}{s+1} \quad G_{z2}(s) = \frac{1}{2s+1} \quad (6.42)$$

ter poiščemo diskretna ekvivalentna funkcij $G_{z1}(s)$ in $G_{z1}(s)G_{z2}(s)$

$$H_1(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} = \frac{\frac{3}{4}}{z - \frac{1}{4}} \quad (6.43)$$

$$H_1H_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} = \frac{\frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

lahko na podlagi slike 6.9 zapišemo:

$$U(z) = k_0W(z) + k_1X_1(z) + k_2X_2(z) = k_0W(z) + (k_1H_1(z) + k_2H_1H_2(z))U(z)$$

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{k_0}{1 - k_1H_1(z) - k_2H_1H_2(z)} = \frac{8}{3} - 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{k_0H_1H_2(z)}{1 - k_1H_1(z) - k_2H_1H_2(z)} = \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \quad (6.44)$$

Prenosni funkciji $\frac{U(z)}{W(z)}$ in $\frac{Y(z)}{W(z)}$ imata oba pola v koordinatnem izhodišču, zaradi česar se odziv signalov $u(k)$ in $y(k)$ na stopničasto vzbujanje $w(k)$ po $k = 2$ ne spreminja. Diskretna signala $u(k)$ in $y(k)$ določimo na naslednji način:

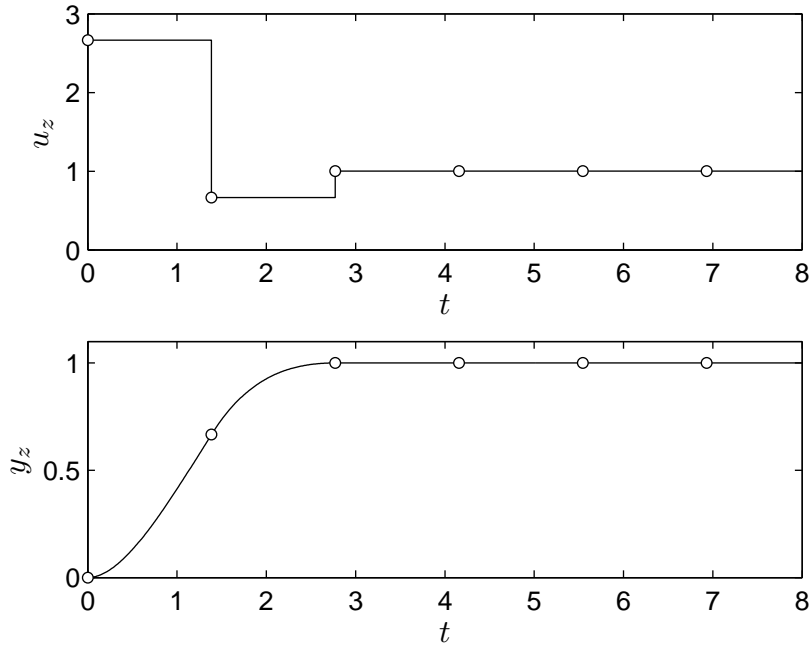
$$\begin{aligned} u(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{U(z)}{W(z)} W(z) \right\} = 1 + \frac{5}{3}\delta(k) - \frac{1}{3}\delta(k-1) = \begin{cases} \frac{8}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{3} & k = 1 \\ 1 & k \geq 2 \end{cases} \\ y(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{Y(z)}{W(z)} W(z) \right\} = 1 - \delta(k) - \frac{1}{3}\delta(k-1) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{2}{3} & k = 1 \\ 1 & k \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Signal vzbujanja $u_z(t)$ dobimo tako, da peljemo signal $u(k)$ v zadrževalnik ničtega reda in dobimo odziv, prikazan na sliki 6.10 zgoraj. Ker je signal vzbujanja odsekoma konstanten (ima tri odseke: $0 \leq t < T$, $T \leq t < 2T$ in $t \geq 2T$), lahko zelo enostavno poiščemo analitično rešitev za $y_z(t)$. Na sliki 6.10 spodaj je prikazan simulirani odziv $y_z(t)$. Na prikazih regulirnega in reguliranega signala na sliki 6.10 so prikazani tudi vzorci diskretnih signalov $u(k)$ in $y(k)$.

Zanimivo je dejstvo, da regulacijski sistem na sliki 6.9 zagotavlja, da je regulirani signal $y_z(t)$ od $t = 2T \doteq 2,8$ natančno enak referenčnemu signalu. Tega procesa ni mogoče zregulirati v končnem času z nobenim zveznim linearnim regulatorjem, z diskretnim linearnim regulatorjem pa je to očitno mogoče, kot je prikazal ta primer.

6.2.2 Določanje diskretnega ekvivalenta zapisa v prostoru stanj z metodo stopnične invariance

Do sedaj smo se ukvarjali zgolj s pretvorbo zvezne prenosne funkcije v diskretni prostor. Seveda je možno pretvoriti tudi zapis zveznega sistema v prostoru stanj v zapis diskretnega sistema v prostoru stanj. Pretvorba tudi tokrat ni enolična, ker pri njej zgubljammo informacijo. Zopet je potrebno privzeti določene predpostavke, s čimer pridemo do enačb za transformacijo. Tokrat se bomo ukvarjali le z metodo stopnične invariance. Privzeli bomo torej, da je na vhodu zveznega sistema zadrževalnik ničtega reda, ki povzroči, da je zvezni signal na vhodu v proces med dvema trenutkoma vzorčenja konstanten. Kot vedno pri diskretnih sistemih, nas zanima le vrednost izhoda procesa v trenutkih vzorčenja.



Slika 6.10: Regulirni in regulirani signal za primer 6.6

Izhajamo torej iz zveznega sistema, zapisanega v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z u_z(t) \\ y_z(t) &= \mathbf{c}_z^T \mathbf{x}_z(t) + d_z u_z(t)\end{aligned}\quad (6.46)$$

Iz teorije zveznih sistemov poznamo odziv stanja takšnega sistema za $t \geq t_0$:

$$\mathbf{x}_z(t) = e^{\mathbf{A}_z(t-t_0)} \mathbf{x}_z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_z(t-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(\tau) d\tau \quad (6.47)$$

Če v zgornji enačbi t_0 nadomestimo s kT , t pa s $kT + T$ ter upoštevamo, da je $u_z(\tau)$ enak $u_z(kT)$ za $kT \leq \tau < kT + T$, dobimo:

$$\mathbf{x}_z(kT + T) = e^{\mathbf{A}_z T} \mathbf{x}_z(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(kT) d\tau \quad (6.48)$$

Zanima nas le vrednost signalov v trenutkih vzorčenja, torej:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_z(kT), \quad u(k) = u_z(kT) \quad \text{in} \quad y(k) = y_z(kT) \quad (6.49)$$

Če upoštevamo enačbo (6.49), iz enačbe (6.48) sledi:

$$\mathbf{x}(k+1) = [e^{\mathbf{A}_z T}] \mathbf{x}(k) + \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z d\tau \right] u(k) \quad (6.50)$$

Če primerjamo enačbo (6.50) z enačbo stanj diskretnega sistema, ugotovimo, da sta veličini v oglatih oklepajih matriki \mathbf{A} in \mathbf{b} zapisa sistema v prostoru stanj. Izraz za \mathbf{b} lahko nadalje poenostavimo, če v enačbi zamenjamo integracijsko spremenljivko τ s $t = kT + T - \tau$, s čimer pridemo do končne formule za obe matriki:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} \quad \mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_z t} \mathbf{b}_z dt \quad (6.51)$$

Kadar nas zanima eksaktna transformacija zapisa zveznega sistema v prostoru stanj v zapis diskretnega sistema v prostoru stanj po metodi stopnične invariance, je potrebno izračunati $e^{\mathbf{A}_z T}$. Pri tem si pomagamo z zvezno matriko prehajanja stanj:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} = e^{\mathbf{A}_z t} \Big|_{t=T} = \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} \right\} \right]_{t=T} \quad (6.52)$$

Diskretizacija izhodne enačbe ni problematična, saj enačbo opazujemo le v trenutkih vzorčenja, torej sta obe matriki v izhodni enačbi nespremenjeni:

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{c}_z^T \quad d = d_z \quad (6.53)$$

V večini realnih primerov je matrika \mathbf{A}_z nesingularna. Takrat lahko formulo za vektor \mathbf{b} še bolj poenostavimo, tako da rešimo integral v enačbi (6.51):

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1} e^{\mathbf{A}_z t} \Big|_0^T \mathbf{b}_z = \mathbf{A}_z^{-1} (e^{\mathbf{A}_z T} - e^{\mathbf{A}_z 0}) \mathbf{b}_z = \mathbf{A}_z^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{b}_z \quad (6.54)$$

kjer smo upoštevali formulo za \mathbf{A} (6.51).

Relativno zapletenim enačbam za pretvorbo matrik zveznega sistema v matrike diskretnega sistema se lahko izognemo, če se namesto z eksaktno rešitvijo zadovoljimo s približkom, ki pa velja le za kratke čase vzorčenja (precej krajše kot so časovne konstante zveznega sistema). V takšnih primerih lahko eksponentno funkcijo $e^{\mathbf{A}_z T}$ v enačbi za diskretno sistemsko matriko razvijemo v Taylorjevo vrsto, pri kateri upoštevamo le člena ničtega in prvega reda

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}_z T \quad (6.55)$$

Potem to rešitev vstavimo v enačbo za \mathbf{b} (6.54)

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{b}_z \doteq T \mathbf{b}_z \quad (6.56)$$

kjer smo pri izračunu zopet predpostavili, da je matrika \mathbf{A}_z nesingularna. Tu je potrebno omeniti, da velja približek za \mathbf{b} iz enačbe (6.56) tudi v primeru singularne matrike \mathbf{A}_z , le da do njega pridemo z rešitvijo integrala v (6.51).



Primer 6.7

Pretvorite naslednji zvezni sistem v diskretni prostor. Transformirani diskretni sistem zapišite v prostoru stanj, pri čemer naj bodo diskretna stanja dobljena z vzorčenjem zveznih stanj ob predpostavki prisotnosti zadrževalnika ničtega reda na vhodu v zvezni proces. Model zveznega procesa, zapisan v prostoru stanj, se glasi:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z(t) \\ y_z(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(t)\end{aligned}\quad (6.57)$$

Za izračun systemske matrike diskretnega sistema uporabimo enačbo (6.52). Najprej izračunamo $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1}$:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\quad (6.58)$$

Nad matriko v enačbi (6.58) izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo in v rezultatu nadomestimo t s T , s čimer pridemo do systemske matrike diskretnega sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}\quad (6.59)$$

Ker je matrika \mathbf{A}_z singularna, je potrebno vektor \mathbf{b} izračunati iz enačbe (6.51):

$$\mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_z t} \mathbf{b}_z dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T}-1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}\quad (6.60)$$

Diskretizirani sistem se torej glasi:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T}-1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (6.61)$$

6.3 Primerjava lastnosti zveznega sistema in pripadajočega diskretiziranega sistema

Obravnavane metode diskretizacije ohranjajo lastnost linearnosti in časovne spremenljivosti. Obravnavali smo le metode za diskretizacijo časovno nespremenljivih sistemov, ki so lahko podani s prenosno funkcijo ali s konstantnimi matrikami zapisa v prostoru stanj. Tudi po diskretizaciji dobimo enako obliko zapisa, ki spet opisuje linearni časovno nespremenljivi sistem.

6.3.1 Enosmerno ojačenje

Naslednja pomembna lastnost sistema je enosmerno ojačenje. Iz zveznih sistemov se spomnimo, da ojačenje K_z zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ izračunamo tako, da v prenosni funkciji s nadomestimo z 0:

$$K_z = \lim_{s \rightarrow 0} G_z(s) \quad (6.62)$$

Ojačenje diskretnega sistema K_d dobimo tako, da izračunamo odziv sistema na enotino stopnico v ustaljenem stanju, pri čemer si pomagamo s teoremom končne vrednosti (3.115)

$$K_d = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z}{z-1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (6.63)$$

V razdelku 6.1 smo diskretizacijo izvajali tako, da smo v enačbi zvezne prenosne funkcije s nadomestili z neko funkcijo spremenljivke z :

$$G(z) = G_z(s) \Big|_{s=h(z)} \quad (6.64)$$

Glede na primerjavo enačb (6.62) in (6.63) lahko ugotovimo, da imata sistema enako ojačenje, če za funkcijo $h(z)$ velja $h(1) = 0$. Ker je ta pogoj izpolnjen pri vseh obravnavanih metodah iz te skupine (metodi prvih in zadnjih diferenc, obe različici bilinearne transformacije), se ojačenje pri diskretizaciji ohranja.

Metoda stopnične invariance je že definirana tako, da se odziva zveznega in diskretiziranega sistema ujemata ob trenutkih vzorčenja, kar pomeni, da se ujemata tudi v ustaljenem stanju. Zato se tudi pri metodi stopnične invariance ohranja ojačenje sistema.

Pri vseh obravnavanih metodah diskretizacije zveznih sistemov se ohranja enosmerno ojačenje sistema.

6.3.2 Poli sistema

Diskretizirati želimo zvezno prenosno funkcijo, ki jo lahko zapišemo v več oblikah

$$G_z(s) = \frac{K_z^*(s - z_1) \dots (s - z_{m_z})}{(s - p_1) \dots (s - p_{n_z})} = \frac{R_1}{s - p_1} + \dots + \frac{R_{n_z}}{s - p_{n_z}} \quad (6.65)$$

pri čemer smo predpostavili, da ima sistem le enostavne oz. enkratne pole. Pri diskretizaciji iščemo diskretno prenosno funkcijo:

$$G(z) = \frac{K_d^*(z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_{m_d})}{(z - \pi_1) \dots (z - \pi_{n_d})} = \frac{P_1}{z - \pi_1} + \dots + \frac{P_{n_d}}{z - \pi_{n_d}} \quad (6.66)$$

Pri metodah prilagajanja frekvenčnega odziva dobimo glede na enačbo (6.64) pole sistema pri tistih z , za katere velja:

$$h(z) = p_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i = h^{-1}(p_i) \quad i = 1, 2, \dots, n_z \quad (6.67)$$

kar pomeni, da se število polov ohranja ($n_z = n_d$). Poli pri metodah te skupine se preslikajo v skladu z obrnjeno enačbo h^{-1} oz. z enačbo (6.10), kar v primeru najpogosteje uporabljanega Tustinovega pravila pomeni, da se položaj polov preslika v skladu z enačbo:

$$\pi_i = \frac{1 + \frac{p_i T}{2}}{1 - \frac{p_i T}{2}} \quad i = 1, 2, \dots, n_z \quad (6.68)$$

Transformacija (6.68) preslika zvezne pole iz leve (desne) polravnine v notranjost (zunanost) kroga enote, kar pomeni, da se stabilnost in nestabilnost sistema pri transformaciji ohranjata.

Zelo enostavno lahko pokažemo, da se pri metodi stopnične invariance prenosna funkcija (6.65) preslika v

$$G_z(s) = \frac{R_1 (1 - e^{p_1 T})}{z - e^{p_1 T}} + \dots + \frac{R_{n_z} (1 - e^{p_{n_z} T})}{z - e^{p_{n_z} T}} \quad (6.69)$$

kar pomeni, da se spet ohranja število polov, položaj pa se preslika v skladu z enačbo:

$$\pi_i = e^{p_i T} \quad i = 1, 2, \dots, n_z \quad (6.70)$$

Tudi transformacija (6.70) preslika zvezne pole iz leve (desne) polravnine v notranjost (zunanost) kroga enote, kar pomeni, da se stabilnost in nestabilnost sistema pri transformaciji ohranjata.

Potrebno je poudariti, da vse ugotovitve iz tega razdelka veljajo tudi za sisteme z večkratnimi in/ali konjugirano kompleksnimi poli. Čeprav smo analizirali le zapis

s prenosno funkcijo, ugotovitve veljajo tudi za zapis v prostoru stanj, saj gre le za različna zapisa enakega sistema. **Pri vseh obravnavanih metodah diskretizacije zveznih sistemov se ohranja število polov sistema, pri stopnični invarianci in bilinearni transformaciji pa tudi stabilnost sistema.**

6.3.3 Ničle sistema

Pri metodah prilagajanja frekvenčnega odziva dobimo glede na enačbo (6.64) m_z ničel sistema pri tistih z , za katere velja:

$$h(z) = z_i \quad \Rightarrow \quad \zeta_i = h^{-1}(z_i) \quad i = 1, 2, \dots, m_z \quad (6.71)$$

To pa niso vse končne ničle diskretnega sistema. Ker ima zvezna prenosna funkcija $(n_z - m_z)$ ničel v neskončnosti, se $(n_z - m_z)$ ničel pojavi tam, kjer postane funkcija $h(z)$, ki jo vstavimo namesto s , neskončna. Funkcija $h(z)$ pri metodi prvih diferenc nima pola, zato sistem poleg ničel iz (6.71) nima dodatnih ničel. Pri metodi zadnjih diferenc in pri bilinearni transformaciji vedno dobimo sistem, ki ima enako število polov in ničel (ne glede na število ničel zveznega sistema). Ker ima $h(z)$ pri metodi zadnjih diferenc pol pri $z = 0$, ima sistem $(n_z - m_z)$ ničel pri $z = 0$. Ker ima $h(z)$ pri metodi bilinearne transformacije pol pri $z = -1$, ima sistem $(n_z - m_z)$ ničel pri $z = -1$.

Pri diskretizaciji po metodi preslikave polov in ničel je število ničel diskretnega sistema za ena manjše od števila polov in ni odvisno od števila zveznih ničel.

Pri metodi stopnične invariance med ničlami izhodiščne zvezne prenosne funkcije in rezultirajoče diskretne prenosne funkcije ne velja nobena povezava. Ne ohranja se niti njihovo število (v končnosti) niti lastnost fazne minimalnosti. Ničli v levi polovici ravnine s namreč lahko ustreza ničla v zunanosti kroga enote v ravnini z in obratno – ničli v desni polravnini ravnine s lahko ustreza ničla v notranosti kroga enote v ravnini z . Ilustrirajmo ti dve možnosti z naslednjim primerom.

 **Primer 6.8**

Poiščite diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije po metodi stopnične invariance in analizirajte fazno (ne)minimalnost zveznega in diskretnega sistema za naslednja zvezna sistema:

$$\begin{aligned} G_{z1}(s) &= \frac{1}{s^3} \\ G_{z2}(s) &= \frac{1-2s}{(1+s)^2} \end{aligned} \quad (6.72)$$

Diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije $G_{z1}(s)$ po metodi stopnične invariance je

$$G_1(z) = \frac{T^3 (z^2 + 4z + 1)}{6(z-1)^3} \quad (6.73)$$

Zvezni sistem $G_{z1}(s)$ nima končnih ničel, zato je sistem fazno minimalen. Diskretizirani sistem ima ničli pri $z = -2 \pm \sqrt{3}$, od katerih ena leži izven kroga enote, zato je diskretni sistem fazno neminimalen.

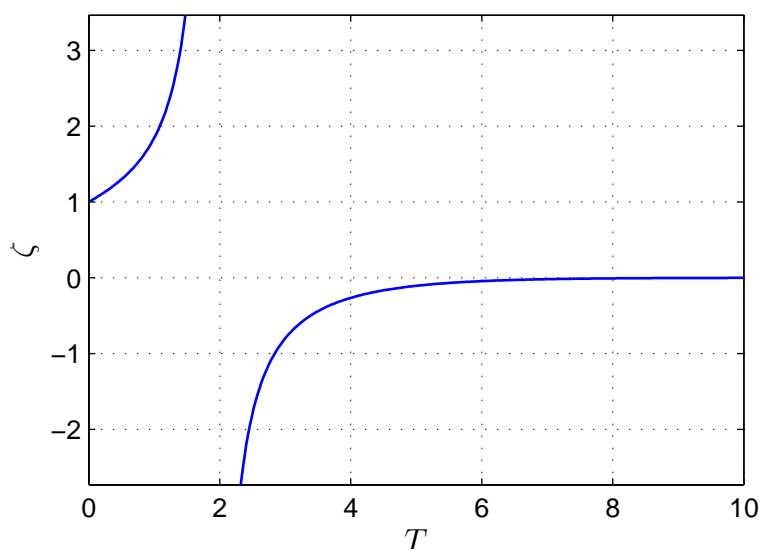
Diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije $G_{z2}(s)$ po metodi stopnične invariance je

$$G_2(z) = \frac{(1 - e^{-T} - 3Te^{-T})z + (3Te^{-T} - e^{-T} + e^{-2T})}{(z - e^{-T})^2} \quad (6.74)$$

Zvezni sistem $G_{z2}(s)$ ima ničlo v desni polravnini pri $s = 0,5$, zato je sistem fazno neminimalen. Diskretizirani sistem ima ničlo pri

$$\zeta = \frac{3T + e^{-T} - 1}{3T - e^T + 1} \quad (6.75)$$

Položaj ničle je odvisen od časa vzorčenja, kot to prikazuje slika 6.11. Pri zelo majhnih T ničla leži pri vrednostih, rahlo nad 1. Z naraščanjem T ničla narašča in doseže neskončno vrednost pri $T = 1,9038$. Z nadaljnjim naraščanjem T postane ničla negativna in zelo velika po absolutni vrednosti. Pri kritični vrednosti $T = T_k = 2,838446$ je ničla pri $z = -1$. Če čas vzorčenja še višamo, ničla ostaja v krogu enote in se približuje $z = 0$. To pomeni, da je diskretizirani sistem pri času vzorčenja nad T_k fazno minimalen.



Slika 6.11: Odvisnost položaja ničle od časa vzorčenja pri diskretizaciji $G_{z2}(s)$ za primer 6.8

Samo pri metodi prvih diferenc se ohranja število ničel. Položaj ničel zveznega sistema je predvidljiv le pri metodah prilagajanja frekvenčnega odziva, medtem ko je pri metodi stopnične invariance položaj ničel praktično nepredvidljiv.

Poglavje 7

Algoritmi digitalnega vodenja

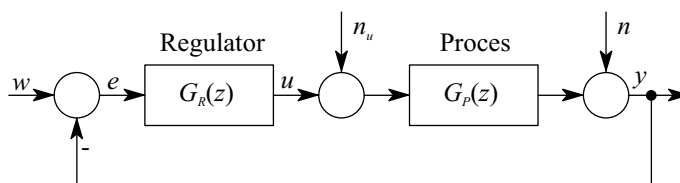
7.1 Načrtovanje vodenja na osnovi diskretne prenosne funkcije

V tem razdelku bomo obravnavali sisteme digitalnega vodenja, ki temeljijo na zapisu procesa z diskretno prenosno funkcijo. Vse regulatorje bomo skušali prikazati kot regulatorje v direktni veji, kot to prikazuje slika 7.1, kjer je $G_P(z)$ prenosna funkcija procesa, $G_R(z)$ prenosna funkcija regulatorja, $w(k)$ referenčna veličina, $u(k)$ regulirna veličina, $y(k)$ regulirana veličina, $e(k)$ signal pogreška ter $n(k)$ oz. $n_u(k)$ motnji na izhodu oz. na vходу procesa.

Proces opisuje diskretna prenosna funkcija

$$G_P = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d} \quad (7.1)$$

Realni procesi imajo običajno to lastnost, da vhodni signal v trenutku k ne vpliva



Slika 7.1: Regulacijska zanka

na izhodni signal v istem trenutku (niso zmožni trenutnih sprememb izhoda). Zato je običajno parameter b_0 enak 0.

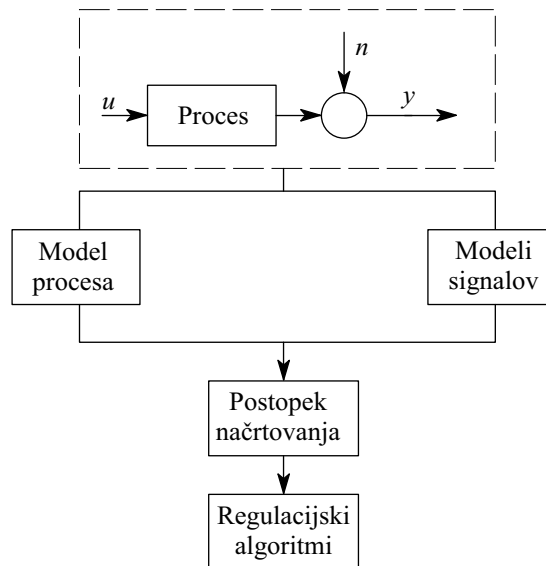
Največkrat reguliramo proces tako, da regulirana veličina y čim bolj sledi referenčni veličini w , tako da je pogrešek

$$e(k) = w(k) - y(k) \quad (7.2)$$

čim manjši. Če se referenčna veličina spreminja, govorimo o sledilni regulaciji ali problemu sledenja (angl. *servo problem*, *tracking problem*). Če pa je referenčna veličina konstantna govorimo o regulaciji konstantne vrednosti ali regulatorskemu problemu (angl. *regulator problem*).

Regulator mora s svojim delovanjem kompenzirati vpliv začetnih pogojev (četudi zapis s prenosno funkcijo le-teh ne obravnava), motenj $n(k)$ in $n_u(k)$ ter vpliv spremembe referenčne veličine $w(k)$, nestabilne procese pa mora s pomočjo povratne zanke stabilizirati.

V tem razdelku opisane naloge rešujemo z regulatorji, ki potrebujejo za svoje delovanje poznavanje izhoda procesa $y(k)$.



Slika 7.2: Princip načrtovanja regulatorjev

Princip načrtovanja regulatorjev prikazuje slika 7.2. Osnovo načrtovanja predstavljata matematični model procesa in model oz. lastnosti nastopajočih signalov (motilne veličine, krmilne veličine, začetne vrednosti). Modele signalov lahko običajno ocenimo le zelo približno. Kot motilne signale privzamemo največkrat skočne signale, čeprav so v praksi zelo redki. Pri načrtovanju regulatorjev za

stohastične motnje privzamemo motnje s t.i. racionalnim frekvenčnim spektrom, to je motnje, za katere si predstavljamo, da so nastale s filtriranjem belega šuma na t.i. šumnem filtru.

Načrtovanje vodenja z optimizacijo

Postopki načrtovanja vodenja so lahko zelo različni. Pri nekaterih regulatorjih obstaja direktna analitična povezava med modelom procesa in regulatorjem, pri drugih pa ta povezava ni eksplicitna. Osrednjo vlogo pri načrtovanju regulatorjev pa ima faktor kakovosti vodenja, ki omogoča ovrednotenje obnašanja regulacijske zanke. Seveda je pri tem pristopu bistvena izbira kriterijske funkcije. Pri zveznih regulatorjih se uporabljajo predvsem integralski kriteriji. Le-te lahko prevedemo tudi v diskretno obliko. Najbolj pogosto se uporabljajo naslednje kriterijske funkcije:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e(k) \\
 J_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e^2(k) \\
 J_3 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |e(k)| \\
 J_4 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N k|e(k)|
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ker kriterij J_1 ni uporaben, če $e(k)$ menja predznak, običajno uporabljamo kriterij J_2 , ki pa vodi do oscilatornih potekov regulirane veličine. Bolj dušene poteke dobimo z uporabo kriterijev J_3 in J_4 .

Za analitično načrtovanje regulatorjev so primerni predvsem kvadratični kriteriji, kajti pri iskanju ekstremov pridemo ob enkratnem odvajanju do izrazov, ki so linearno odvisni od pogreška $e(k)$. Dodaten vpliv na dušenje regulacijske zanke lahko dosežemo s kriteriji, ki aditivno vsebujejo še kvadrat odklona regulirne veličine. Tako dobimo splošni kvadratični kriterij

$$J_5 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + ru^2(k)] \tag{7.4}$$

kjer je r utežni faktor vpliva regulirne veličine na kriterijsko funkcijo.

Kriterijska funkcija (7.4) pride v poštev le, če je stacionarna vrednost regulirnega signala enaka 0. Stacionarna vrednost, ki je različna od 0, namreč stalno prispeva k neskončni vsoti in rezultirajoči regulator postane brez smisla. V takšnem primeru moramo namesto signala $u(k)$ upoštevati njegovo odstopanje od stacionarne vrednosti

$$\tilde{u}(k) = u(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} u(k) \quad (7.5)$$

Enačba (7.4) tako postane

$$J_6 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + r\tilde{u}^2(k)] \quad (7.6)$$

Problem pa nastane tedaj, ko ne poznamo stacionarne vrednosti regulirnega signala (ker je le-ta odvisna od npr. velikosti neznane motnje). V tem primeru lahko namesto regulirnega signala upoštevamo njegovo časovno spremembo

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (7.7)$$

Tako dobimo kriterijsko funkcijo

$$J_7 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + r[\Delta u(k)]^2] \quad (7.8)$$

Obnašanje sistema vodenja v ustaljenem stanju

Neodvisno od izbire kriterijske funkcije lahko postavimo dodatne zahteve za obnašanje sistema vodenja v ustaljenem stanju in tako še dodatno vplivamo na strukturo in parametre regulatorja.

Pri konstantnih referenčnih in motilnih veličinah mora signal pogreška limitirati k nič

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0 \quad (7.9)$$

Z upoštevanjem teorema končne vrednosti lahko zapišemo

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = 0 \quad (7.10)$$

Za povratnoznančni sistem na sliki 7.1 velja

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_R(z)G_P(z)} (W(z) - N(z)) - \frac{G_P(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} N_u(z) \quad (7.11)$$

V primeru skočne spremembe reference $W(z) = \frac{z}{z-1}$ in/ali motnje na izhodu $N(z) = \frac{z}{z-1}$ prevedemo enačbo (7.10) v naslednjo obliko

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + G_R(z)G_P(z)} = 0 \quad (7.12)$$

kar pomeni, da gre pogrešek proti 0, če je izpolnjen pogoj

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z)G_P(z) = \infty \quad (7.13)$$

V primeru skočne spremembe motnje na vhodu v proces $N_u(z) = \frac{z}{z-1}$ pa mora za konvergenco pogreška proti 0 veljati

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{zG_P(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} = 0 \quad (7.14)$$

oziroma

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty \quad (7.15)$$

Zahtevi (7.13) in (7.15) sta izpolnjeni, če velja

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty \quad (7.16)$$

Glede na enačbo (7.16) regulacijski pogrešek v ustaljenem stanju izgine, če vsebuje regulator pol pri $z = 1$, torej, če velja

$$G_R(z) = \frac{Q(z)}{P'(z)(z-1)} \quad (7.17)$$

in $Q(1) \neq 0$. Tak regulator ima integrirno obnašanje.

Glede na ugotovitev (7.13) tudi regulacijski sistemi s proporcionalnim regulatorjem nima pogreška v ustaljenem stanju, če vsebuje proces pol pri $z = 1$, vendar le v primeru spremembe reference oziroma motnje na izhodu procesa, ne pa tudi v primeru stopnične motnje na vhodu procesa.

Podobne zahteve lahko postavimo tudi za linearno oz. kvadratično naraščajoče referenčne signale in/ali motilne signale. Regulatorji morajo v tem primeru vsebovati dvojni oz. trojni pol pri $z = 1$.

7.2 Diskretni proporcionalno-integrirno-diferencirni regulatorji

V praksi se izmed vseh regulatorjev še vedno največ uporabljajo proporcionalni (P), proporcionalno-integrirni (PI) in proporcionalno-integrirno-diferencirni (PID)

regulator Proporcionalni regulator običajno ne zadošča, saj ima regulirani signal pri procesih ničte vrste stacionarni pogrešek. Z dodatkom integrirnega člena odpravimo pogrešek v stacionarnem stanju, z diferencirnim členom pa povečamo hitrost regulacijskega sistema. Zato bomo obravnavali najbolj splošni primer, t.j. proporcionalno-integrirno-diferencirni diskretni regulacijski algoritem.

7.2.1 Pretvorba diskretnega algoritma PID iz zveznega regulatorja

Diskretni algoritem PID lahko smiselno izpeljemo iz ustreznega zveznega regulacijskega algoritma, saj s tem za manjše čase vzorčenja uporabimo vse izkušnje, razna pravila in tabele za nastavljanje parametrov zveznega algoritma PID.

Diferencialna enačba idealnega zveznega algoritma PID je

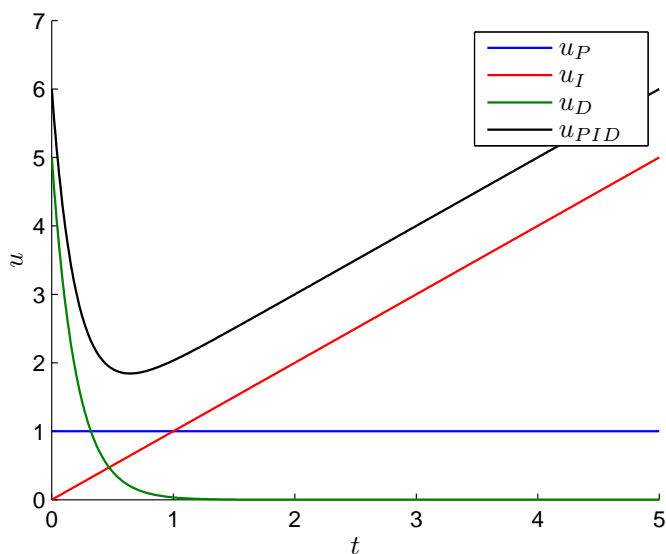
$$u_z(t) = K_P \left[e_z(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de_z(t)}{dt} \right] \quad (7.18)$$

kjer je $u_z(t)$ regulirni signal procesa in $e_z(t)$ pogrešek izhodnega signala procesa glede na predpisan referenčni signal. Pri tem pomenijo:

- K_P – ojačenje proporcionalnega člena regulatorja,
- T_I – časovna konstanta integrirnega dela in
- T_D – časovna konstanta diferencirnega dela.

Idealnega regulatorja PID pa v praksi nikoli ne uporabljamo, saj se ga ne da realizirati. Diferencirni člen pri zelo hitrih spremembah signala pogreška povzroči zelo velike (pri skočnih spremembah teoretično neskončne) vrednosti regulirnega signala, dobimo pa tudi ojačenje visokofrekvenčnih motilnih signalov. Zato uporabljamo razne metode za približno diferenciranje. Slika 7.3 prikazuje odziv realnega zveznega regulatorja PID pri stopničastem signalu pogreška $e_z(t)$. Za majhne čase vzorčenja T lahko enačbo (7.18) pretvorimo v diferenčno obliko, kar lahko naredimo na več načinov.

Pri prvi metodi diskretizacijo enačbe (7.18) izvedemo na *ad hoc* način, tako da na najenostavnejši način diskretiziramo posebej odvod in posebej integral. Odvod nadomestimo z diferencnim kvocientom, pri čemer to lahko storimo le za nazaj, ker vrednosti signala v prihodnosti ne poznamo. Integral nadomestimo z vsoto,



Slika 7.3: Odziv realnega zveznega regulatorja PID in posameznih komponent pri stopničastem signalu pogreška.

pri čemer uporabimo Eulerjevo metodo oz. pravokotniško aproksimacijo. Na ta način dobimo diferenčno enačbo

$$u(k) = K_P \left[e(k) + \frac{1}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i)T + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right] \quad (7.19)$$

Pri tem smo namesto zveznih signalov uporabili diskretizirane različice. Enačba (7.19) predstavlja nerekurzivno obliko regulacijskega algoritma, saj je regulacijski izhod odvisen od sedanje in vseh preteklih vrednosti signala pogreška.

Za programiranje na digitalnih računalnikih je ugodnejša rekurzivna oblika algoritma. V tem primeru izračunamo trenutno vrednost regulirnega signala iz pretekle vrednosti ter iz sedanje in nekaj preteklih vrednosti signala pogreška. Rekurzivni zapis diskretnega algoritma PID dobimo tako, da zapišemo enačbo (7.19) za diskretni časovni trenutek $(k-1)$:

$$u(k-1) = K_P \left[e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right] \quad (7.20)$$

Dobljeno enačbo nato odštejemo od enačbe (7.19) in dobimo:

$$u(k) - u(k-1) = K_P \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right] \quad (7.21)$$

Rekurzivni diskretni algoritem PID se glasi

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (7.22)$$

pri čemer vrednosti parametrov q_0 , q_1 in q_2 določimo s pomočjo naslednjih enačb:

$$q_0 = K_P \left(1 + \frac{T_D}{T} \right) \quad (7.23)$$

$$q_1 = -K_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} - \frac{T}{T_I} \right) \quad (7.24)$$

in

$$q_2 = K_P \frac{T_D}{T} \quad (7.25)$$

Integriranje v enačbi (7.18) lahko diskretiziramo tudi z drugo pravokotniško integracijsko formulo, kjer je višina pravokotnika definirana z desnim vzorcem (pri Eulerjevi metodi višino določa levi vzorec). Pri tem se obe meji seštevanja v enačbi (7.19) povišata za 1, zaradi česar se ustrezno spremenita tudi koeficienta q_0 in q_1 :

$$\begin{aligned} q_0 &= K_P \left(1 + \frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I} \right) \\ q_1 &= -K_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} \right) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Pri krajših časih vzorčenja lahko torej parametre diskretnega regulatorja PID q_0 , q_1 in q_2 izračunamo iz parametrov zveznega regulatorja (K_P , T_I , T_D) pri določenem času vzorčenja T . Kot smo spoznali že pri obravnavi diskretizacije zveznih sistemov, pri kratkih časih vzorčenja ni pričakovati bistvenega vpliva metode na končni rezultat. S primerjanjem enačb (7.23), (7.24) in (7.26) lahko ugotovimo, da se razlikujeta le enačbi za izračun koeficientov q_0 in q_1 , in sicer za $\frac{T}{T_I}$, kar pomeni, da za majhne čase vzorčenja izbor metode diskretizacije nima večjega vpliva na parametre diskretnega regulatorja. Z naraščanjem časa vzorčenja pa razlike med metodami postanejo bolj izrazite. Zgoraj obravnavane metode diskretizacije so v določenem pogledu problematične, saj pri diskretizaciji odvoda in integrala v enačbi (7.18) ni uporabljen enak algoritem. Bolj natančno

povedano – pri drugem postopku sta metodi enaki, pri prvem pa ne. Analiza namreč pokaže, da smo odvod v obeh primerih diskretizirali z metodo zadnjih diferenc, pri diskretizaciji integrala pa smo najprej uporabili metodo prvih diferenc, nato pa metodo zadnjih diferenc. To pomeni, da v prvem primeru operaciji integriranja in odvajanja več nista nasprotni.

Diskretizacija regulatorja je bolj teoretično osnovana, če uporabimo eno od metod, obravnavanih v poglavju 6. Metode prvih diferenc ne moremo uporabiti, saj po diskretizaciji nekavzalnega idealnega regulatorja PID (7.18) dobimo nekavzalni diskretni regulator, ki ga ne moremo implementirati, saj za izračun trenutne vrednosti regulirne veličine $u(k)$ potrebujemo prihodnjo vrednost signala pogreška $e(k+1)$, ki seveda ni na voljo. Diskretizacijo po metodi zadnjih diferenc smo že obravnavali. Dobimo algoritem (7.22), kjer so konstante regulatorja določene z enačbama (7.26) in (7.25).

Tretja možnost je uporaba Tustinovega pravila. Enostavno lahko pokažemo, da v tem primeru dobimo regulacijski algoritem:

$$u(k) = u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (7.27)$$

kjer so vrednosti konstant naslednje:

$$\begin{aligned} q_0 &= K_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} + \frac{T}{2T_I} \right) \\ q_1 &= -K_P \left(\frac{4T_D}{T} - \frac{T}{T_I} \right) \\ q_2 &= K_P \left(\frac{2T_D}{T} + \frac{T}{2T_I} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Pri tej realizaciji je potrebno opozoriti na nekaj dejstev:

- gre za kavzalni sistem, čeprav je originalni zvezni sistem nekavzalen,
- iz enačbe (7.27) vidimo, da $u(k)$ ni odvisen od $u(k-1)$, pač pa od $u(k-2)$,
- iz prejšnje točke izhaja, da ima prenosna funkcija regulatorja poleg integrirnega pola pri $z = 1$ še en pol na meji stabilnosti pri $z = -1$, zaradi česar so odzivi regulatorja zelo oscilatorni.

Zaradi zadnje lastnosti Tustinovo pravilo ni najbolj ustrezno za diskretizacijo nekavzalnega sistema, kakršen je idealni regulator PID. Že pri obravnavi zveznih sistemov smo zaradi težav z implementacijo običajno uporabili t.i. »realni« regulator PID, pri katerem je izhod »idealnega« D-člena filtriran skozi nizkoprepustni

filter s časovno konstanto T_f , ki je nekajkrat (trikrat do desetkrat) nižja od diferencirne časovne konstante T_D . Prenosna funkcija realnega zveznega regulatorja PID je:

$$G_z(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_f s} \right] \quad (7.29)$$

Če namesto s vstavimo Tustinovo formulo $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, dobimo diskretni algoritem PID naslednje oblike

$$u(k) = p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (7.30)$$

kjer so parametri določeni s formulami

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{4C_f}{1 + 2C_f} \\ p_2 &= \frac{1 - 2C_f}{1 + 2C_f} \\ q_0 &= K_P \frac{1 + 2C_D + \frac{C_I}{2} + 2C_f + C_I C_f}{1 + 2C_f} = K_P \left(1 + \frac{C_I}{2} + \frac{2C_D}{1 + 2C_f} \right) \\ q_1 &= -K_P \frac{4C_D - C_I + 4C_f}{1 + 2C_f} \\ q_2 &= K_P \frac{2C_D + \frac{C_I}{2} - C_f C_I + 2C_f - 1}{1 + 2C_f} = \frac{2C_D - (1 - \frac{C_I}{2})(1 - 2C_f)}{1 + 2C_f} \end{aligned} \quad (7.31)$$

kjer smo uvedli normirane časovne konstante

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{T_D}{T} \\ C_f &= \frac{T_f}{T} \\ C_I &= \frac{T}{T_I} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Čeprav je bilo v tem razdelku podanih veliko formul za izračun parametrov diskretnega regulatorja PID, je bil naš namen, da na ta način pridemo do nekaterih zaključkov, ki so pomembni pri uporabi formul:

- Pri kratkih časih vzorčenja (glede na integrirno in diferencirno časovno konstanto) daje različne metode za diskretizacijo diskretne regulatorje s podobnimi lastnostmi, vendar pa je potrebno biti pazljiv pri uporabi Tustinovega pravila za diskretizacijo idealnega zveznega regulatorja PID, saj dobimo praktično neuporaben diskretni regulator.

- Algoritem (7.30) s konstantami (7.31) predstavlja najbolj natančno preslikavo zveznega realnega regulatorja PID v diskretno obliko. Dobra lastnost tega regulatorja je tudi ta, da lahko eksplicitno izberemo časovno konstanto filtra na D-členu.
- V vsakem primeru moramo dobljene vrednosti parametrov regulatorja smatrati le kot zelo okvirne in jih je potrebno pri implementaciji še dodatno uglasiti.

7.2.2 Relacije med parametri tipičnega diskretnega regulatorja PID

Kot smo pokazali pri pretvorbi zveznih regulatorjev PID, obstaja glede na različne pretvorbe več različnih struktur regulatorja PID. Kadar pa načrtujemo parametre diskretnega regulatorja PID neposredno, običajno izhajamo iz najbolj enostavne strukture, s katero je možno realizirati proporcionalno-integrirno-diferencirni regulator – opisuje jo enačba (7.22). Potrebno se je zavedati, da vsak regulator, ki ga opisuje enačba (7.22), še ni regulator PID. Med parametri regulatorja PID namreč veljajo določene relacije, ki jih bomo določili v nadaljevanju.

Prenosna funkcija regulatorja PID je glede na enačbo (7.22)

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (7.33)$$

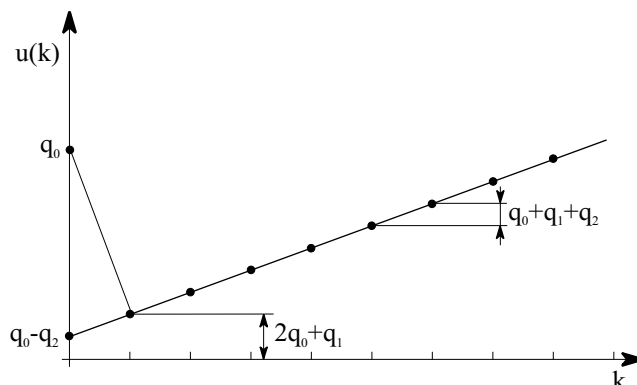
Algoritem v časovnem prostoru pa ima obliko

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (7.34)$$

Relacije med parametri q_0 , q_1 in q_2 določimo tako, da ima diskretni regulacijski sistem pri krajših časih vzorčenja podoben odziv na stopničasti signal pogreška, kot ga ima tipični zvezni regulator PID (slika 7.3). Zato iz enačbe (7.34) izračunamo vrednosti regulirnega signala v diskretnih časovnih trenutkih $0, T, 2T, \dots, kT$:

$$\begin{aligned} u(0) &= q_0 \\ u(1) &= u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1 \\ u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2 \\ &\vdots \\ u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2 \end{aligned} \quad (7.35)$$

Slika 7.4 prikazuje, kakšen naj bo odziv diskretnega regulatorja PID pri stopničastem signalu pogreška glede na analogijo z odzivom tipičnega zveznega regulatorja



Slika 7.4: Odziv diskretnega regulatorja PID na stopničasti signal pogreška

PID

$$u_z(t) = K_P \left[e_z(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de_z(t)}{dt} \right] \quad (7.36)$$

Glede na analogijo lahko iz slike 7.4 določimo naslednje značilne vrednosti. Iz odziva vidimo, da je prispevek P-člena k odzivu enak $(q_0 - q_2)$, kar je neposredno enako ojačenju K_P :

$$K_P = q_0 - q_2 \quad (7.37)$$

Prispevek D-člena je enak q_2 in je opazen le pri prvem vzorcu. Ker se diferenčni kvocient računa čez eno periodo vzorčenja, je prispevek D-člena v prvi periodi vzorčenja glede na enačbo (7.36) enak:

$$K_P T_D \frac{de_z(t)}{dt} \approx K_P T_D \frac{1}{T} = q_2 \quad (7.38)$$

Prispevek I-člena je čez eno periodo vzorčenja T enak $(q_0 + q_1 + q_2)$ in ga lahko določimo kjerkoli po $k = 1$:

$$K_P \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \approx K_P \frac{1}{T_I} \int_{kT}^{kT+T} 1 \cdot d\tau = K_P \frac{T}{T_I} = q_0 + q_1 + q_2, \quad k \geq 1 \quad (7.39)$$

Enačbe (7.37), (7.39) in (7.38) podajajo enake relacije kot enačbe za *ad hoc* diskretizacijo zveznega regulatorja PID (7.23), (7.24) in (7.25).

Če predpostavimo, da je proporcionalno ojačenje zveznega regulatorja PID pozitivno, mora za diskretne parametre zaradi (7.37) veljati:

$$q_0 - q_2 > 0 \quad \text{oz.} \quad q_0 > q_2 \quad (7.40)$$

Zaradi pozitivne diferencirne konstante glede na (7.38) velja

$$q_2 > 0 \quad (7.41)$$

Zaradi pozitivne integrirne konstante mora biti glede na (7.39) izpolnjen pogoj

$$q_0 + q_1 + q_2 > 0 \quad \text{oz.} \quad q_2 > -(q_0 + q_1) \quad (7.42)$$

V vseh praktičnih primerih je prispevek D-člena v vzorcu pri $k = 0$ izrazito večji od prispevka I-člena pri $k = 1$, zato velja $u(1) < u(0)$ oziroma

$$u(1) - u(0) = q_0 + q_1 < 0 \quad \text{oz.} \quad -(q_0 + q_1) > 0 \quad (7.43)$$

Če združimo zaključke neenačb (7.40), (7.41), (7.42) in (7.43), mora za parametre diskretnega regulatorja PID s pozitivnim proporcionalnim ojačenjem K_P veljati:

$$q_0 > q_2 > -(q_0 + q_1) > 0 \quad (7.44)$$

Podobno neenačbo zlahka izpeljemo tudi za primer negativnega proporcionalnega ojačenja. Neenačba (7.44) je zelo pomembna, saj podaja omejitve, ki se jih pri ugaševanju regulatorja moramo držati, če želimo, da regulator ohrani proporcionalno-integrirno-diferencirni značaj.

7.2.3 Določitev parametrov diskretnega regulatorja PID

Za določitev parametrov q_0 , q_1 in q_2 lahko uporabimo zlasti pri računalniškem načrtovanju parametrsko optimizacijo, lahko pa uporabljamo tudi razna pravila ali metode preizkušanja.

Za približno optimalno nastavitvev parametrov zveznih regulatorjev PID pogosto uporabljamo t.i. nastavitvena pravila. Ta pravila so običajno podana za procese, katerih frekvenčni odziv je podoben nizkoprepustnemu filtru, in običajno izhajajo iz časovnih parametrov procesa ali pa iz rezultatov nihajnega preizkusa. Pri nihajnem preskusu povečujemo ojačenje P-regulatorja toliko časa, da postane odziv sistema oscilatoren. Ena najstarejših nastavitvenih pravil izhajajo iz del Zieglerja in Nicholasa. Kasneje se je s problemom nastavljanja parametrov regulatorjev tipa PID ukvarjalo zelo veliko raziskovalcev.

Omenjena pravila so poizkušali prirediti tudi za časovno diskretne regulacijske algoritme vrste PID [11]. Najbolj enostavna pravila temeljijo na predpostavki, da lahko zvezni proces približno opišemo z zvezno prenosno funkcijo

$$G_z(s) = \frac{1}{1 + sT} e^{-T_d s} \quad (7.45)$$

Rezultirajoče parametre časovno diskretnih regulatorjev PID dobimo z uporabo pravil za časovno zvezne regulatorje PID, če nadomestimo mrtvi čas T_D z mrtvim

časom ($T_d + \frac{T}{2}$). Pri tem aproksimira $\frac{T}{2}$ zakasnitev zaradi vzorčenja signalov, njihove obdelave in pretvorb.

Ker je možno optimizacijski problem analitično rešiti le v zelo enostavnih primerih, običajno uporabljamo metode numerične optimizacije. Optimizacijo izvajamo tako, da z ustreznim računalniškim orodjem simuliramo zaprtozančni odziv na predpisani referenčni signal in izračunamo kriterijsko funkcijo po eni izmed formul (7.3) do (7.8). Takšna simulacijska shema predstavlja podprogram za optimizacijski algoritem, ki izračuna optimalne vrednosti parametrov.

7.2.4 Modificirani diskretni PID algoritmi

V tem podpoglavju bomo navedli nekaj modifikacij omenjenega osnovnega algoritma regulatorja PID.

Če želimo zadušiti relativno velike regularne signale $u(k)$ pri hitrih spremembah reference $w(k)$, le-te ne upoštevamo pri diferenciranju. Ustrezna nerekurzivna diferenčna enačba se tako glasi

$$u(k) = K_P \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + y(k-1)] \right] \quad (7.46)$$

Ustrezna rekurzivna enačba ima obliko

$$u(k) = u(k-1) + K_P \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \right] \quad (7.47)$$

Še večje dušenje regularnega signala dobimo, če upoštevamo signal pogreška le še v integrirnem členu. Tako dobimo

$$u(k) = u(k-1) + K_P \left[-y(k) + y(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \right] \quad (7.48)$$

Obravnavana modificirana regulacijska algoritma ovrednotita visokofrekvenčne signale reference slabše od tistih v izhodni veličini.

Druge modifikacije dobimo z različnimi realizacijami diferencirnega člena. Če vsebuje izhodni signal relativno visokofrekvenčne motilne signale, ki jih ni mogoče kompenzirati ali pa to ni potrebno, lahko nastanejo pri izračunu diferenčnega kvocienta $\frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)]$ v nerekurzivni obliki, oziroma $\frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$ v rekurzivni obliki, nezaželeno velike spremembe regulirne veličine. Vendar pa je diferencirni člen lahko potreben za kompenzacijo srednjefrekvenčnih motilnih signalov in za izboljšanje kakovosti regulacije, saj lahko v primeru, če ni prevelik, kompenzira pol prenosne funkcije procesa, razširi stabilnostno območje in dopušča večje faktorje ojačenja. Zato moramo upoštevati kompromise, ki jih lahko uvedemo tudi z raznimi filtri, ki po želji odstranijo določen del spektra signala.

7.3 Splošni linearni regulator in premikanje polov

V prejšnjem razdelku smo obravnavali proporcionalno-integrirno-diferencirne regulatorje. Ti regulatorji imajo fiksno strukturo, parametre pa jim določimo z optimizacijo izbrane kriterijske funkcije. Zato jih imenujemo (še zlasti v primeru, ko sta tako števec kakor tudi imenovalca polinoma) tudi parametrsko optimalni regulatorji. V tem razdelku pa si bomo ogledali strukturo optimalne kompenzacijske regulatorje, ki jih običajno uporabljamo pri raznih sledilnih regulacijah. Ti regulatorji imajo procesu prilagojeno tudi strukturo (red prenosne funkcije).

Splošni linearni regulator lahko podamo s prenosno funkcijo

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}} \quad (7.49)$$

Stopnjo števca ν in imenovalca μ ter parametre p_i , q_i moramo izbrati tako, da popolnoma zadovoljimo regulacijskim zahtevam. Pravzaprav lahko poljuben linearen regulator opišemo z izrazom (7.49). Linearni proces, ki ga želimo regulirati, naj ima obliko

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d} \quad (7.50)$$

kjer velja $b_1 \neq 0$.

Splošni linearni regulator lahko načrtamo z metodo optimizacije parametrov ali z metodo premikanja polov. Metoda optimizacije parametrov je primerna le za regulatorje z nizkim redom prenosne funkcije, saj se z večanjem števila parametrov zelo hitro povečuje število potrebnih računskih operacij, predvsem pa je

problematična pogojenost problema, kar pomeni, da je zelo vprašljiva konvergenca parametrov k želenim vrednostim. V tem podpoglavju bomo predstavili postopek načrtovanja linearnih regulatorjev z metodo premikanja polov.

Bistvo metode je v izbiri polov zaprtizančne prenosne funkcije regulacijskega sistema. Želena lega polov predpišemo z izbiro koeficientov karakterističnega polinoma, ki bo v naši obravnavi vedno moničen polinom (vodilni koeficient oz. koeficient pri najvišji potenci z je enak 1)

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_\ell z^{-\ell} = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} \quad (7.51)$$

Stopnja karakterističnega polinoma $\deg(\mathcal{A}) = \ell$ je določena z izrazom

$$\ell = \max\{m + \mu, m + d + \nu\} \quad (7.52)$$

kjer je $m + \mu = \deg(PA)$ stopnja produkta polinomov $P(z^{-1})A(z^{-1})$ in $(m + d + \nu)$ stopnja produkta polinomov $Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}$. Operator $\deg(\cdot)$ v zgornji izrazih podaja stopnjo polinoma v argumentu.

V izrazu (7.51) moramo določiti koeficiente polinomoma $Q(z^{-1})$ in $P(z^{-1})$. Da bomo lahko poiskali stopnji polinomov $Q(z^{-1})$ in $P(z^{-1})$, si oglejmo problem, ki ga je rešil že grški filozof Diofant.

7.3.1 Diofantske enačbe

Rešimo enačbo

$$3x + 2y = 5 \quad (7.53)$$

tako, da bosta x in y celi števili. Rešitev dobimo za $x = 1$ in $y = 1$. Novo rešitev dobimo, če x povečamo za 2 in y zmanjšamo za 3. Naj bosta x_0 in y_0 rešitvi enačbe (7.53), vse ostale rešitve poiščemo z izrazoma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 2n \\ y &= y_0 - 3n \end{aligned} \quad (7.54)$$

kjer je n celo število. Oglejmo si nekaj rešitev

$$\begin{array}{ccccccc} x: & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ y: & 10 & 7 & 4 & 1 & -2 & -5 & -8 \end{array}$$

Naštete rešitve dobimo tako, da od znane rešitve x_0 odštevamo ali prištevamo 2 in hkrati rešitvi y prištevamo ali odštevamo 3. Prvo rešitev najdemo tako, da izberemo x v intervalu

$$0 \leq x < 2 \quad (7.55)$$

ali y v intervalu

$$0 \leq y < 3 \quad (7.56)$$

Poiščimo rešitev naslednje enačbe

$$4x + 6y = 1 \quad (7.57)$$

Če sta x in y celi števili, potem je leva stran enačbe vedno soda, desna pa vedno liha. Povsem jasno je, da rešitev ne obstaja. Problem nima rešitve, ko največji skupni delitelj koeficientov na levi strani enačbe ni delitelj desne strani enačbe. Ko sta si koeficienta na levi strani enačbe tuja, oziroma ko je njun največji skupni delitelj tudi delitelj desne strani enačbe, pa rešitev obstaja.

7.3.2 Diofantske enačbe nad polinomi

Za polinome z realnimi koeficienti in cela števila veljajo podobna računaska pravila. Operaciji množenja in seštevanja imata enake lastnosti. Vsota oziroma produkt dveh celih števil je spet celo število. Isto velja za polinome. Količnik, ki ga dobimo pri deljenju dveh celih števil (polinomov), ni nujno celo število (polinom).

Diofantov problem velja tudi za polinome. Reševali bomo enačbo (7.51), kjer bomo uvedli polinom $B_d(z^{-1}) = B(z^{-1})z^{-d}$:

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_\ell z^{-\ell} = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B_d(z^{-1}) \quad (7.58)$$

Če polinoma $P_0(z^{-1})$ in $Q_0(z^{-1})$ rešita enačbo (7.58), potem predstavljata rešitev enačbe (7.51) tudi polinoma

$$P(z^{-1}) = P_0(z^{-1}) + X(z^{-1})B_d(z^{-1}) \quad (7.59)$$

in

$$Q(z^{-1}) = Q_0(z^{-1}) - X(z^{-1})A(z^{-1}) \quad (7.60)$$

kjer je $X(z^{-1})$ poljuben polinom z realnimi koeficienti. Rešitev izraza (7.58) vedno obstaja, če je proces vodljiv, torej če sta si polinoma $A(z^{-1})$ in $B(z^{-1})$ v prenosni funkciji (7.50) tuja (nimata skupnih korenov). Prvo rešitev poiščemo tako, da velja

$$\deg(P) = \mu < \deg(B_d) = m + d \quad (7.61)$$

ali

$$\deg(Q) = \nu < \deg(A) = m \quad (7.62)$$

Enačbo (7.58) rešimo na $P(z^{-1})$ in $Q(z^{-1})$ tako, da izberemo

$$\mu = m + d - 1 \quad (7.63)$$

$$\nu = m - 1 \quad (7.64)$$

Pri tako izbrani stopnji polinomov $Q(z^{-1})$ in $P(z^{-1})$ je število vseh neznank (koeficientov q_i in p_i)

$$\nu + 1 + \mu = (m - 1) + 1 + (m + d - 1) = 2m + d - 1 \quad (7.65)$$

število podanih enačb (stopnja karakterističnega polinoma) pa

$$\begin{aligned} \ell = \max[\mu + m, \nu + m + d] = \\ \max[(m + d - 1) + m, (m - 1) + m + d] = 2m + d - 1 \end{aligned} \quad (7.66)$$

Pri zgoraj navedeni izbiri vrednosti je število neznank enako številu enačb in problem (7.58) je enolično rešljiv.

V prisotnosti stopničastih motenj odpravimo pogrešek v ustaljenem stanju, če zahtevamo integrirno obnašanje regulatorja oziroma če ima regulator pol pri $z = 1$. Veljata enačbi

$$P(1) = 0 \quad \text{oz.} \quad \sum_{i=1}^{\mu} p_i = -1 \quad (7.67)$$

Omenjena zahteva poveča število enačb na $\ell + 1$, iščemo pa $\mu + \nu + 1$ neznanih parametrov q_i in p_i regulatorja (7.49). Minimalno sistemsko prenosno funkcijo dobimo, če povečamo stopnjo polinomov Q in P glede na enačbi (7.63) in (7.64) za 1:

$$\mu = m + d \quad \text{in} \quad \nu = m \quad (7.68)$$

Število neznank je

$$\mu + \nu + 1 = (m + d) + m + 1 = 2m + d + 1 \quad (7.69)$$

število enačb pa

$$\ell + 1 = \max[(m + d) + m, m + m + d] + 1 = 2m + d + 1 \quad (7.70)$$

Problem je enolično rešljiv. Iskane parametre poiščemo z rešitvijo sistema enačb, kot prikazuje naslednji primer.

 **Primer 7.1**

Načrtajte dve različici splošnega linearne regulatorja za diskretni proces s prenosno funkcijo

$$G_P(z) = \frac{0,05z^{-1}}{(1 - 0,9z^{-1})(1 - 0,95z^{-1})} = \frac{0,05z^{-1}}{1 - 1,85z^{-1} + 0,855z^{-2}} \quad (7.71)$$

V obeh primerih postavite vse pole povratnozančnega sistema v točko $z = 0,8$, pri čemer v prvem primeru uporabite enačbe za osnovni regulator, v drugem pa za integrirni. Prikažite odziv sistema na stopničasti referenčni signal.

Stopnja polinoma $A(z^{-1})$ je enaka dva, stopnja $B(z^{-1})$ pa je ena ($b_2 = 0$), kar pomeni, da je $m = 2$, zato sta stopnji $P(z^{-1})$ in $Q(z^{-1})$ glede na enačbi (7.63) in (7.64) enaki $\mu = m + d - 1 = 1$ in $\nu = m - 1 = 1$. Posledično lahko predpostavimo naslednjo strukturo obeh polinomov:

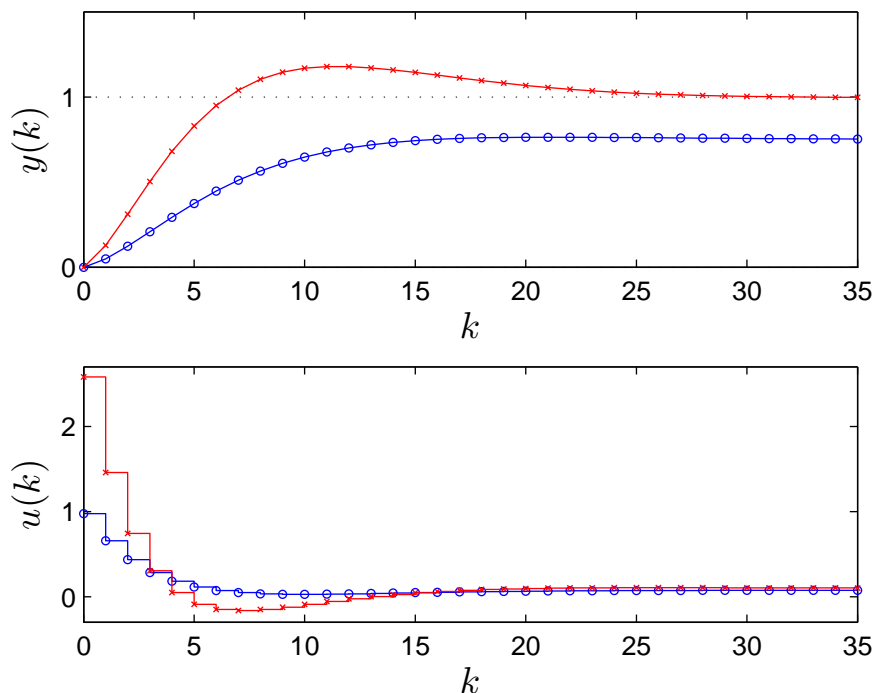
$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= 1 + p_1 z^{-1} \\ Q(z^{-1}) &= q_0 + q_1 z^{-1} \end{aligned} \quad (7.72)$$

Sedaj moramo izračunati karakteristični polinom povratnozančnega sistema in ga izenačiti z zelenim, katerega stopnja ℓ znaša 3. To pomeni, da ima sistem vse tri pole v točki $z = 0,8$:

$$\begin{aligned} P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} &= \\ &= (1 + p_1 z^{-1})(1 - 1,85z^{-1} + 0,855z^{-2}) + (q_0 + q_1 z^{-1})(0,05z^{-1}) = \\ &= 1 + [p_1 + 0,05q_0 - 1,85] z^{-1} + [-1,85p_1 + 0,05q_1 + 0,855] z^{-2} + [0,855p_1] z^{-3} = \\ &= \mathcal{A}(z^{-1}) = (1 - 0,8z^{-1})^3 = 1 + [-2,4] z^{-1} + [1,92] z^{-2} + [-0,512] z^{-3} \end{aligned}$$

Izenačiti je potrebno izraze v oglatih oklepajih pri enakih potencah z^{-1} , s čimer pridemo do sistema treh enačb s tremi neznankami, katerega rešitev je enolična: $p_1 = -0,5988$, $q_0 = 0,9766$ in $q_1 = -0,8567$.

V drugem delu naloge iščemo integrirni regulator, kar pomeni, da sta stopnji polinomov Q in P glede na enačbo (7.68) višji za 1 in znašata 2. Karakteristični polinom zaprtozančnega sistema je tokrat četrte stopnje ($\ell = 4$), zato z izenačevanjem koeficientov polinomov dobimo štiri enačbe, ki so zaradi drugačne strukture polinomov $P(z^{-1})$ in $Q(z^{-1})$ seveda nekoliko drugačne kot v prvem delu naloge. Peto enačbo definira integrirni značaj regulatorja



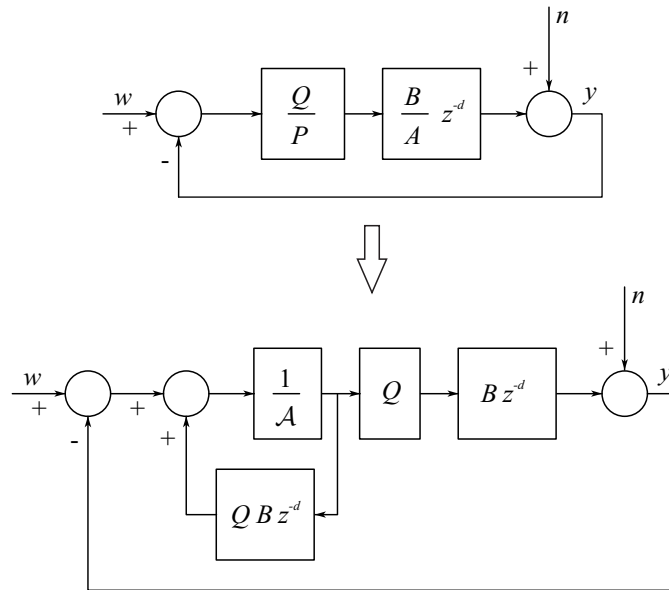
Slika 7.5: Odziv sistema iz primera 7.1 na stopničasti referenčni signal – modri krivulji s krožci prikazujeta odziva osnovne različice splošnega linearnega regulatorja, rdeči krivulji s križci pa odziva sistema z integrirnim regulatorjem

($1 + p_1 + p_2 = 0$), s čimer imamo pet enačb in pet neznank:

$$\left. \begin{array}{l} 0,855p_2 \qquad \qquad \qquad -0,4096 = 0 \\ 0,855p_1 - 1,85p_2 \qquad \qquad +0,05q_2 \quad +2,048 = 0 \\ -1,85p_1 \quad +p_2 \qquad \qquad +0,05q_1 \qquad -2,985 = 0 \\ p_1 \qquad \qquad +0,05q_0 \qquad \qquad \qquad +1,35 = 0 \\ p_1 \quad +p_2 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad +1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -1,4791 \\ p_2 = 0,4791 \\ q_0 = 2,5813 \\ q_1 = -4,6067 \\ q_2 = 2,0574 \end{cases}$$

Odziva in regulirni veličini obeh sistemov pri vzbujanju s stopničastim referenčnim signalom so prikazani na sliki 7.5. Modri krivulji s krožci prikazujeta signale pri osnovni različici, rdeči krivulji s križci pa signale v sistemu z integrirnim regulatorjem. Izvlečene krivulje prikazujejo potek zveznih signalov, če bi algoritem implementirali na (namišljenem) zveznem sistemu. Integrirni regulator ima višji red, a v popolnosti odpravi pogrešek v ustaljenem stanju, česar osnovni regulator pri stopničastem referenčnem signalu ni zmožen.

Splošni linearni regulator, ki ga načrtamo z metodo premikanja polov, t.j. z rešitvijo enačbe (7.51), ilustrira slika 7.6. Prenosno funkcijo v direktni veji lahko



Slika 7.6: Splošni linearni regulator, načrtan z metodo premikanja polov

razbijemo na QBz^{-d} in $\frac{1}{PA}$, slednjo pa lahko glede na enačbo (7.51) zapišemo kot

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{\mathcal{A} - QBz^{-d}} = \frac{\frac{1}{A}}{1 - \frac{1}{A}QBz^{-d}} \quad (7.73)$$

pri čemer smo pri zadnji enačbi števec in imenovalec izraza delili z \mathcal{A} . Prenosno funkcijo v enačbi (7.73) lahko interpretiramo kot pozitivno povratno zanko, pri kateri je blok v direktni veji $\frac{1}{A}$, blok v povratni veji pa QBz^{-d} . Če na izhodu procesa nimamo prisotne motnje $n(k)$, se glede na spodnji del slike 7.6 prispevka notranje in zunanje povratne zanke izničita, zato je odziv sistema na referenčni signal $w(k)$ določen le s prenosno funkcijo $\frac{QBz^{-d}}{\mathcal{A}}$ v glavni veji. Kadar pa je motnja $n(k)$ prisotna, je njen vpliv na izhod procesa glede na zgornji del slike 7.6 podan z naslednjo prenosno funkcijo

$$G_n = \frac{Y}{N} = \frac{1}{1 + \frac{QBz^{-d}}{PA}} = \frac{PA}{PA + QBz^{-d}} = \frac{PA}{\mathcal{A}} \quad (7.74)$$

Ojačenje prenosne funkcije je torej enako 0, če je $P(1) = 0$ (integrirni regulator) ali $A(1) = 0$ (integrirni proces), kar pomeni, da v teh dveh primerih ni pogreška v ustaljenem stanju, če na sistem vpliva stopničasta motnja $n(k)$. Dinamika regulacije motnje je določena z izbiro karakterističnega polinoma $\mathcal{A}(z^{-1})$ zaprtizančne prenosne funkcije. Na sliki 7.6 lahko vidimo, da s tako regulacijo ne krajšamo niti polov niti ničel procesa.

Podajmo še nekaj zaključnih misli o splošnem linearnem regulatorju, ki ga načrtujemo z metodo premikanja polov:

- Enačba (7.58) ima rešitev le, če sta si polinoma $A(z^{-1})$ in $B(z^{-1})$ tuja (koreni obeh polinomov ne sovpadajo oz. poli in ničle prenosne funkcije se ne krajšajo).
- Povratnozančna prenosna funkcija $G_w(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$ in prenosna funkcija od motnje do izhoda procesa $G_n(z) = \frac{Y(z)}{N(z)}$ imata enake pole.
- Na ničle prenosne funkcije $G_n(z)$ ne moremo vplivati. Na ničle sistemske prenosne funkcije $G_w(z)$ pa lahko vplivamo z ustreznim predfiltrom, kar pride v poštev pri sledilni regulaciji.

7.4 Regulator stanj

Pri predmetu *Digitalno vodenje* bomo obravnavali zgolj načrtovanje vodenja za linearne časovno nespremenljive sisteme. V takšnem primeru so praviloma tudi regulatorji oz. sistemi vodenja linearni in časovno nespremenljivi. Ideja linearnega regulatorja stanj je zelo preprosta. Regulirno veličino računamo kot linearno kombinacijo vseh stanj. Izkaže se, da lahko s primernim izborom uteži posameznih stanj v regulirni veličini pole povratnozančnega vodljivega sistema postavimo na poljubna mesta.

Predpostavimo, da so vse spremenljivke stanja, ki jih vsebuje vodljivi proces

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (7.75)$$

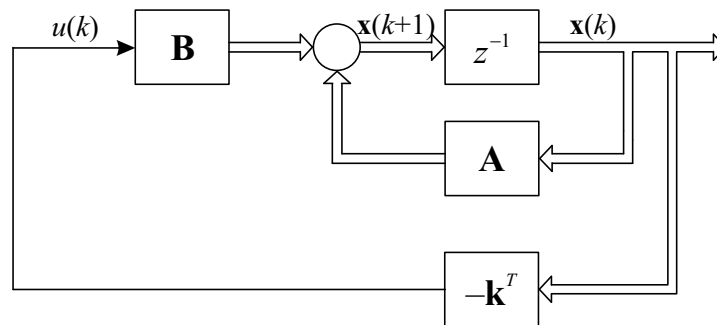
dostopne in jih lahko točno izmerimo. Regulator stanj tvori regulirno veličino $u(k)$ z linearno kombinacijo vseh stanj

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) \quad (7.76)$$

kjer je \mathbf{k}^T matrika oz. vrstični vektor v povratni zanki, kot prikazuje slika 7.7. Če upoštevamo enačbi (7.75) in (7.76), dobimo zaprtozančni sistem

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(-\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k)) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}(k) \quad (7.77)$$

Enačbo (7.77) lahko interpretiramo kot homogeni sistem s sistemsko matriko $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$. S primernim izborom \mathbf{k}^T dosežemo ustrezno dinamiko povratnozančnega sistema. Gotovo je eden prvih ciljev pri načrtovanju vodenja stabilnost povratnozančnega sistema. Če je povratnozančni sistem (7.77) asimptotično stabilen (vsi poli sistema ležijo znotraj kroga enote), vsa stanja sistema konvergirajo proti 0, kar pomeni, da je tovrsten način vodenja primeren za regulacijske namene. Če želimo regulator stanj uporabiti v sledilnem načinu, ga je potrebno ustrezno razširiti.



Slika 7.7: Regulator stanj

7.4.1 Načrtovanje regulatorja stanj z metodo premikanja polov

Lego polov povratnozančnega sistema določimo z rešitvijo karakteristične enačbe povratnozančnega sistema pri znanem ojačenju regulatorja stanj \mathbf{k}^T :

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = 0 \quad (7.78)$$

Iz enačbe (7.78) vidimo, da lahko s spreminjanjem povratnozančne matrike \mathbf{k}^T spreminjamo pole sistema. Pri načrtovanju regulatorja torej želimo izbrati ojačenje regulatorja \mathbf{k}^T tako, da bodo povratnozančni poli ležali na zelenih lokacijah.

Če je sistem podan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, postane problem določanja polov zelo enostaven. Proces torej lahko opišemo z enačbo stanj (5.120):

$$\mathbf{x}_v(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_v(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (7.79)$$

Ker regulator stanj regulirno veličino računa iz vektorja stanj \mathbf{x}_v sistema zapisanega v vodljivostni kanonični obliki, bomo tudi pripadajoče ojačenje regulatorja označili z indeksom v in poudarili, da gre za regulator, ki je načrtan za stanje v vodljivostni kanonični obliki:

$$u(k) = -\mathbf{k}_v^T \mathbf{x}_v(k) = -[k_{v1} \ k_{v2} \ \cdots \ k_{vn}] \mathbf{x}_v(k) \quad (7.80)$$

Zaradi Frobeniusove oblike matrike \mathbf{A}_v in enostavne oblike vektorja \mathbf{b}_v se enačba

povratnozančnega sistema zelo poenostavi

$$\mathbf{x}_v(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - k_{v1} & -a_{n-1} - k_{v2} & -a_{n-2} - k_{v3} & \cdots & -a_1 - k_{vn} \end{bmatrix} \mathbf{x}_v(k) \quad (7.81)$$

Ker ima sistemska matrika povratnozančnega sistema (7.81) spet Frobeniusovo obliko, se karakteristična enačba povratnozančnega sistema glasi

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_v + \mathbf{b}_v \mathbf{k}_v^T) = z^n + (a_1 + k_{vn})z^{n-1} + \dots + (a_n + k_1) = 0 \quad (7.82)$$

Izredno lepa lastnost sistema (7.81) je, da vsak koeficient regulatorja stanj vpliva na en koeficient karakterističnega polinoma, pri čemer je ta zveza celo linearna. Če torej predpišemo želeni karakteristični polinom povratnozančnega sistema

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (7.83)$$

lahko takšno delovanje dosežemo z naslednjim izborom koeficientov regulatorja stanj

$$k_{v1} = \alpha_n - a_n \quad k_{v2} = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad k_{vn} = \alpha_1 - a_1 \quad (7.84)$$

oz. z naslednjo vektorsko obliko zapisa regulatorja stanj:

$$\mathbf{k}_v^T = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] \quad (7.85)$$

Na ta način postane načrtovanje vodenja z metodo premikanja polov zelo enostavno. Poseben primer nastopi, če postavimo vse pole povratnozančnega sistema v koordinatno izhodišče ravnine z . Takrat je karakteristični polinom sistema enak

$$z^n \quad (7.86)$$

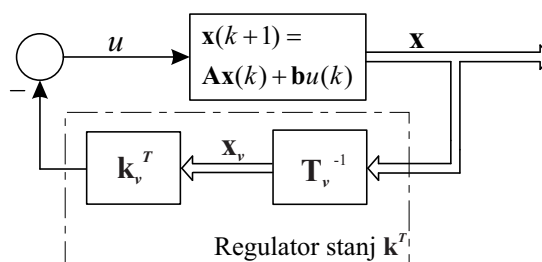
takšno delovanje sistema s končnim nastavitvenim časom pa torej dosežemo z naslednjo matriko regulatorja stanj:

$$\mathbf{k}_v^T = [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \cdots \quad -a_1] \quad (7.87)$$

Takšen regulator stanj pripelje proces v n korakih iz poljubnega začetnega stanja v končno stanje $\mathbf{0}$, kjer ostane za vedno. Zgovorno je poimenovanje takšnega načina vodenja v angleški literaturi – *deadbeat control by state feedback*.

Če vodljiv sistem ni zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, ga vanjo vedno lahko pretvorimo. Stanja diskretnega sistema \mathbf{x} pretvorimo v transformirana stanja sistema \mathbf{x}_v , ki je zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, z upoštevanjem enačbe (5.105)

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{x} \quad (7.88)$$



Slika 7.8: Regulator stanj za premikanje polov, če sistem ni zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki

pri čemer je transformacijska matrika \mathbf{T}_v določena z enačbo (5.123)

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{Q}_v \mathbf{W} \quad (7.89)$$

Regulator stanj, ki smo ga načrtali z enačbo (7.85), izračuna regulirno veličino iz transformiranih stanj

$$u(k) = - [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] \mathbf{x}_v(k) \quad (7.90)$$

ki pa jih lahko po enačbah (7.88) in (7.89) izračunamo iz originalnih stanj, zato se regulacijski zakon glasi:

$$u(k) = - [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] (\mathbf{Q}_v \mathbf{W})^{-1} \mathbf{x}(k) \quad (7.91)$$

Glede na enačbo (7.91) lahko določimo ojačenje regulatorja stanj za originalni netransformirani sistem:

$$\mathbf{k}^T = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1] (\mathbf{Q}_v \mathbf{W})^{-1} \quad (7.92)$$

Shematski prikaz regulatorja stanj za premikanje polov, če sistem ni zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, je podan na sliki 7.8.

7.4.2 Optimalni regulator stanj

V tem razdelku obravnavamo optimalni regulator stanj, torej regulator, ki je načrtan z minimizacijo kriterijske funkcije. Predpostavili bomo, da imamo opravka s sistemom z več vhodi, in izpeljali splošno rešitev sistema za ta primer. Tudi če imamo sistem z enim vhodom, je pot do rešitve enaka, zaradi česar bomo rešitev za sisteme z enim vhodom določili z ustrezno prilagoditvijo splošne rešitve. To poglavje je v celoti povzeto po [15].

Določili bomo regulator stanj, ki generira iz vektorja stanj $\mathbf{x}(k)$ tak regulirni vektor $\mathbf{u}(k)$, ki privede proces iz stanja $\mathbf{x}(0)$ v končno stanje $\mathbf{x}(N) \approx 0$ in pri tem minimizira naslednji kriterij

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right] \quad (7.93)$$

kjer je:

- \mathbf{Q} pozitivno semidefinitna ($\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0$ za poljubni \mathbf{x}) in simetrična matrika ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$),
- \mathbf{R} pozitivno definitna ($\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \geq 0$ za poljubni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) in simetrična matrika ($\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$).

Pri izračunu regulirne veličine, ki minimizira kriterij (7.93), imamo opravka s problemom dinamičnega programiranja, ki ga rešujemo s Pontrjaginovim principom maksimalnosti ali Bellmanovim principom optimalnosti.



Tu bomo podali nekoliko enostavnejšo metodo Lagrangeovih multiplikatorjev, ki pa je v eni točki nekoliko špekulativna.

Matematično lahko formuliramo dani problem kot optimizacijo kriterija (7.93) z omejitvijo, ki jo daje enačba prehajanja stanj (7.75), ki jo zapišemo v nekoliko drugačni obliki

$$-\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (7.94)$$

Tako smo dobili standardni problem iskanja minimuma z omejitvijo, ki ga lahko rešimo z metodo Lagrangeovih multiplikatorjev. Vpeljimo vektor Lagrangeovih multiplikatorjev $\boldsymbol{\lambda}(k+1)$ za vsak k . Tako tvorimo modificirano kriterijsko funkcijo

$$J' = \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1) (-\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)) \right] \quad (7.95)$$

in iščemo njen minimum glede na $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$ in $\boldsymbol{\lambda}(k)$. Opazimo lahko, da sta pri optimalnem vektorju $\mathbf{u}(k)$, ki zadošča omejitvi (7.94), vrednosti kriterijskih funkcij J in J' enaki. Prav tako je indeks pri vektorju $\boldsymbol{\lambda}$ poljuben, zaradi preglednosti smo izbrali $k+1$.

Nadaljevanje postopka minimizacije da tri enačbe in sicer regulatorsko enačbo

$$\frac{\partial J'}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1)\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (7.96)$$

enačbo stanj

$$\frac{\partial J'}{\partial \boldsymbol{\lambda}(k+1)} = -\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \quad (7.97)$$

in pridruženo enačbo

$$\frac{\partial J'}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q} - \boldsymbol{\lambda}^T(k) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1)\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7.98)$$

Zadnjo, pridruženo enačbo lahko zapišemo tudi v obliki nazaj obrnjene diferenčne enačbe

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(k+1) + \mathbf{Q}^T\mathbf{x}(k) \quad (7.99)$$

Regulatorsko enačbo (7.96) zapišemo v obliki

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(k+1) \quad (7.100)$$

enačba stanj pa je klasična

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (7.101)$$

Tako smo dobili tri enačbe, katerih rešitev da optimalni regulirni vektor $\mathbf{u}(k)$.

Določiti moramo še robne pogoje. Začetni pogoj za vektor stanj $\mathbf{x}(0)$ je znan, ni pa znan začetni pogoj za $\boldsymbol{\lambda}$. Iz enačbe (7.93) sledi, da mora biti $\mathbf{u}(N)$ enak nič, saj le ta nima nobenega vpliva na vektor stanj $\mathbf{x}(N)$ (glej en. (7.101)). Iz en. (7.100) sledi $\boldsymbol{\lambda}(N+1) = \mathbf{0}$ in iz en. (7.99) sledi *končni pogoj* za $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda}(N) = \mathbf{Q}\mathbf{x}(N) \quad (7.102)$$

Rešitev optimizacijskega problema smo dobili tako v obliki treh enačb ((7.99), (7.100) in (7.101)), enega začetnega in enega končnega pogoja. Rešitev tega problema robnih vrednosti pa ni enostavna. Zato bomo nekoliko špekulativno predpostavili

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \quad (7.103)$$

kar bo omogočilo prevedbo dvotočkovnega robnega problema v spremenljivkah \mathbf{x} in λ v enotočkovni robni problem v spremenljivki \mathbf{P} . Z upoštevanjem en. (7.103) prevedemo regulatorsko enačbo (7.96) v naslednjo obliko

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathbf{u}(k) &= -\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) \\ &= -\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)]\end{aligned}\quad (7.104)$$

iz katere sledi

$$\mathbf{u}(k) = -[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}\mathbf{x}(k)\quad (7.105)$$

Naslednji korak je eliminiranje spremenljivke λ iz en. (7.99) s pomočjo en. (7.103)

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{Q}\mathbf{x}(k)\quad (7.106)$$

oziroma z upoštevanjem en. (7.101)

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)[\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)] + \mathbf{Q}\mathbf{x}(k)\quad (7.107)$$

Če vpeljemo še en. (7.105), dobimo

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\left[\mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{B}[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A}\mathbf{x}(k)\right] + \mathbf{Q}\mathbf{x}(k)\quad (7.108)$$

Če združimo vse člene na eni strani, dobimo enačbo

$$\left[\mathbf{P}(k) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A} - \mathbf{Q}\right]\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}\quad (7.109)$$

ki mora biti izpolnjena za vsak $\mathbf{x}(k)$, zato mora biti izraz v oglatem oklepaju te enačbe enak nič. Tako dobimo nazaj obrnjeno diferenčno enačbo za \mathbf{P}

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(k+1)\left[\mathbf{I} - \mathbf{B}[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\right]\mathbf{A} + \mathbf{Q}\quad (7.110)$$

ki je znana pod imenom *Riccatijeva diferenčna enačba*. Opozorimo naj, da je ta enačba nelinearna! Potrebno je določiti še njene robne pogoje.

S primerjavo en. (7.102) in (7.103) dobimo

$$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}\quad (7.111)$$

to je končni pogoj za \mathbf{P} . Regulatorsko enačbo (7.105) lahko zapišemo tudi v obliki

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}(k)\mathbf{x}(k) \quad (7.112)$$

kjer je

$$\mathbf{K}(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(k+1)\mathbf{A} \quad (7.113)$$

Rešitev problema minimizacije kriterija (7.93) je torej regulator stanj s časovno spremenljivo povratnozančno matriko (vektorjem v primeru sistemov z enim vhom in enim izhodom). Problem rešimo tako, da postavimo najprej končni pogoj za $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}$. Nato po vrsti izračunamo $\mathbf{P}(N-1)$, $\mathbf{P}(N-2)$ in postopek nadaljujemo do $\mathbf{P}(0)$. Matriko \mathbf{P} torej računamo v obratni smeri naraščanja časa. S tako dobljenimi matrikami \mathbf{P} nato izračunamo optimalno povratnozančno matriko \mathbf{K} za vsak trenutek k .

Če dopustimo, da gre v kriterijski funkciji (7.93) $N \rightarrow \infty$, dobimo časovno neodvisen regulator oziroma linearni kvadratični regulator (angl. *linear-quadratic regulator*, s kratico *LQR*)

$$\mathbf{u}(k) = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}(k) \quad (7.114)$$

Regulacijsko matriko $\bar{\mathbf{K}}$ dobimo iz enačbe

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} \quad (7.115)$$

kjer je $\bar{\mathbf{P}}$ rešitev stacionarne Riccatijeve enačbe

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{P}}\left[\mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\right]\mathbf{A} \quad (7.116)$$

Potrebno je poudariti, da je Riccatijeva enačba kvadratna enačba glede na neznanke $\bar{\mathbf{P}}$, zaradi česar dobimo dve rešitvi. Od obeh rešitev je potrebno vzeti pozitivno definitno.

Časovno nespremenljivi regulator stanj (enačba (7.114)) je primernejši za praktične aplikacije. Zaradi matričnega invertiranja moramo v izrazu (7.116) zadovoljiti pogoj

$$\det[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}] \neq 0 \quad (7.117)$$

Ta pogoj v splošnem zadovoljimo s pozitivno definitno matriko \mathbf{R} .

S primerjavo enačb (7.114) in (7.76) vidimo, da ima optimalni regulator stanj identično strukturo kot osnovni regulator stanj, razlika je le v postopku načrtovanja. Osnovnega smo načrtovali s premikanjem polov, optimalnega pa z minimizacijo kriterijske funkcije.

7.5 Opazovalnik stanj ali observator stanj

Regulator stanj predstavlja zelo enostaven način za doseganje zelene dinamike povratnozančnega sistema. Ima pa regulator stanj eno pomanjkljivost. Za njegovo realizacijo morajo biti merljiva vsa stanja procesa, kar je še posebej pri procesih višjega reda dokaj omejujoča zahteva. Dostopnost vseh stanj namreč omejujejo razni dejavniki – zelo pogosto gre za tehnološke omejitve, ko meritve določenih stanj niso mogoče, ker bi sama meritev predstavljala preveliko motnjo v procesu, ali pa za ekonomske razloge, ko bi izvedba meritev bila predraga.

Tudi če meritev stanj iz kakršnega koli razloga nimamo na voljo, jih lahko ocenimo z merjenjem ostalih spremenljivk. Merjene spremenljivke so po definiciji izhodi procesa. Če je proces spoznaven, je možno rekonstruirati stanja sistema. Ker so običajno nekateri izhodi hkrati tudi stanja, le-teh ni potrebno ocenjevati. V takih primerih pravimo, da gre za opazovalnik minimalnega reda za razliko od opazovalnika polnega reda, kjer ocenjujemo vsa stanja (torej tudi tista, ki jih merimo kot izhode). Smisel ocenjevanja stanj, ki jih hkrati merimo, je v dejstvu, da so meritve pošumljene in lahko opazovalnik stanj deluje tudi kot filter, ki skuša šum odstraniti.

7.5.1 Odprtozančni opazovalnik stanj

Predikcijo stanj procesa lahko izračunamo z enačbo stanj procesa:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (7.118)$$

V zgornji enačbi poznamo $u(k)$, ki ga vodimo v proces. Če predpostavimo, da natančno poznamo model procesa (torej matriki \mathbf{A} in \mathbf{b}), lahko torej stanja procesa ocenimo z enačbo, ki je zelo podobna kot enačba stanj procesa

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (7.119)$$

kjer smo oceno stanj označili z $\mathbf{x}^*(k)$. Če je začetna ocena vektorja stanj $\mathbf{x}^*(0)$ enaka vektorju stanj procesa $\mathbf{x}(0)$, ostane ocena stanj vedno enaka dejanskim stanjem. Ker pa stanj ni mogoče meriti, tudi začetno stanje ni znano. V takšnih primerih je potrebno zapisati dinamiko spreminjanja pogreška ocene stanj $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, ki je definiran kot razlika med vektorjem stanj in njegovo oceno:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k) \quad (7.120)$$

Če enačbo (7.119) odštejemo od enačbe (7.118) in upoštevamo še (7.120), dobimo

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (7.121)$$

Če je sistem asimptotično stabilen (vse lastne vrednosti matrike \mathbf{A} ležijo znotraj kroga enote), začetni pogrešek ocene stanj konvergira proti 0, pri čemer je dinamika konvergence določena z lastnimi vrednostmi matrike \mathbf{A} . Če pa je sistem nestabilen, pogrešek ocene stanj divergira in takšen opazovalnik je neuporaben.

7.5.2 Luenbergerjev opazovalnik stanj

Luenbergerjev opazovalnik stanj odpravlja pomanjkljivost odprtozančnega opazovalnika, pri katerem nimamo vpliva na dinamiko spreminjanja pogreška ocene stanj. Ideja temelji na dejstvu, da je za oceno parametrov poleg vhodnega signala $u(k)$ smiselno upoštevati še merjeni izhod $y(k)$, ki ga definira izhodna enačba sistema

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \quad (7.122)$$

kjer smo predpostavili, da je vhodno-izhodna konstanta d enaka 0. Na podoben način lahko definiramo še oceno izhodnega signala procesa

$$y^*(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k) \quad (7.123)$$

Izhodni pogrešek $y(k) - y^*(k)$ vsebuje dodatno informacijo o pogrešku ocene stanj, zato ga je smiselno upoštevati pri popravku ocene stanj. To pomeni, da enačbi odprtozančnega ocenjevalnika (7.119) dodamo še popravek zaradi izhodnega pogreška:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}[y(k) - y^*(k)] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}[\mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}\mathbf{c}^T [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (7.124)$$

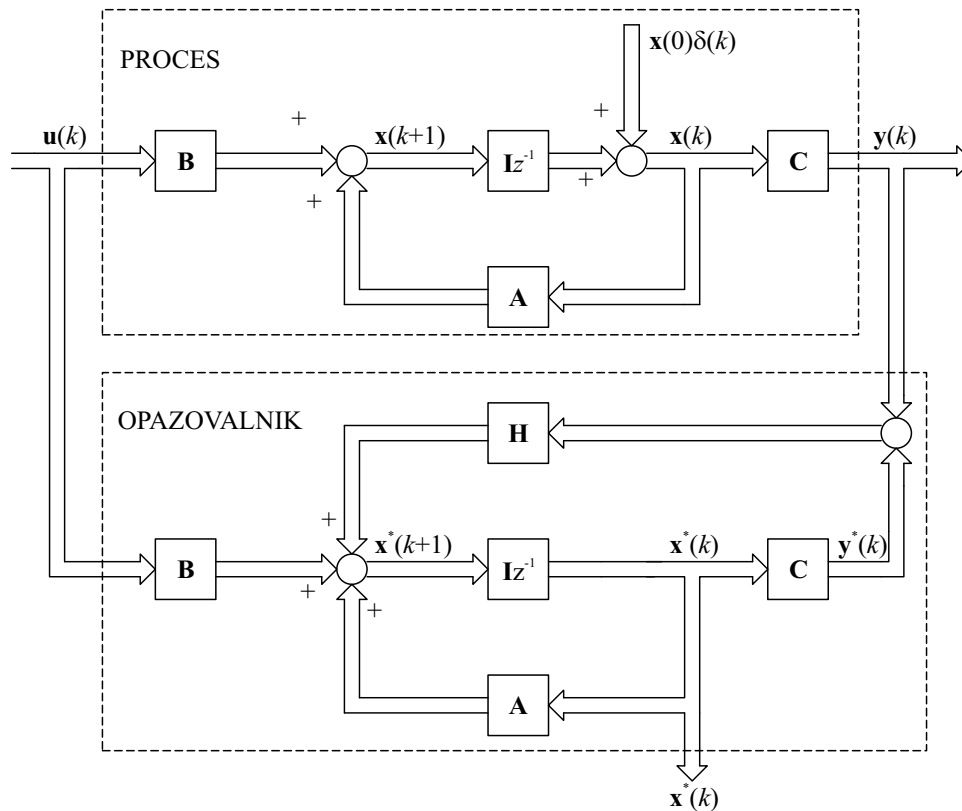
Shematski prikaz izvedbe Luenbergerjevega opazovalnika je podan na sliki 7.9, kjer je podana splošna različica za sisteme z več vhodi in več izhodi – vsi signali so vektorski, vse matrike pa imajo vsaj dve vrstici in vsaj dva stolpca. Pri izvedbi opazovalnika za univariabilne sisteme (sisteme z enim vhodom in enim izhodom) postaneta vhodni in izhodni signal procesa skalarna, matriki \mathbf{B} in \mathbf{H} postaneta stolpna vektorja \mathbf{b} in \mathbf{h} , matrika \mathbf{C} pa vrstični vektor \mathbf{c}^T .

Če enačbo (7.124) odštejemo od enačbe (7.118), dobimo enačbo

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (7.125)$$

Sistemska matrika opazovalnika je torej $(\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)$, karakteristična enačba pa se glasi:

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T = 0 \quad (7.126)$$



Slika 7.9: Luenbergerjev opazovalnik stanj

Enačba (7.125) je zelo pomembna za razumevanje opazovalnika. Kaže namreč na nekaj pomembnih dejstev:

- Vektor \mathbf{h} vpliva na dinamiko pogreška ocene stanj $\tilde{\mathbf{x}}(k)$. Velja tudi obratno – če želimo doseči določeno dinamiko pogreška ocene stanj, je potrebno ustrezno izbrati vektor \mathbf{h} .
- Problem določitve vektorja \mathbf{h} je dualen problemu določitve vektorja \mathbf{k} pri določanju regulatorja stanj. Dinamiko stanj pri uporabi regulatorja stanj določa glede na enačbo (7.77) matrika $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$, dinamiko pogreška ocene stanj pa glede na enačbo (7.125) matrika $(\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)$. Če prvo matriko transponiramo (s čimer se njene lastne vrednosti ne spremenijo), dobimo matriko $(\mathbf{A}^T - \mathbf{k}\mathbf{b}^T)$. To pomeni, da lahko za določitev \mathbf{h} uporabimo enake metode kot za določitev \mathbf{k} , če namesto \mathbf{A} upoštevamo \mathbf{A}^T , namesto \mathbf{b} pa \mathbf{c} . Spomnimo se, da prav takšna povezava velja med vodljivostno regulatorsko kanonično obliko in spoznavnostno observatorsko kanonično obliko. Zato lahko pričakujemo identičen način načrtovanja opazovalnika na osnovi spoznavnostne observatorske kanonične oblike, kot smo ga predsta-

vili za načrtovanje regulatorja na osnovi vodljivostne regulatorne kanonične oblike. Zlahka namreč pokažemo, da lahko v primeru, da je proces zapi- san v spoznavnostni observatorski kanonični obliki, ojačenje observatorja določimo s formulo:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \beta_n - a_n \\ \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (7.127)$$

pri čemer so a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) koeficienti karakterističnega polinoma procesa, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pa so koeficienti želenega karakterističnega polinoma opazovalnika.

- Pogrešek ocene stanj ni vodljiv glede na vhod $u(k)$, ker slednji v enačbi (7.125) ne nastopa eksplisitno. To pomeni, da z vhomom na noben način ne moremo vplivati na spreminjanje pogreška ocene stanj.

Luenbergerjev opazovalnik stanj ima povsem ekvivalentno različico v teoriji zveznih dinamičnih sistemov. V predhodnih enačbah je potrebno zamenjati le predikcijo vektorja stanj z odvodom vektorja stanj, medtem ko so algoritmi za izračun koeficientov opazovalnika povsem enaki.

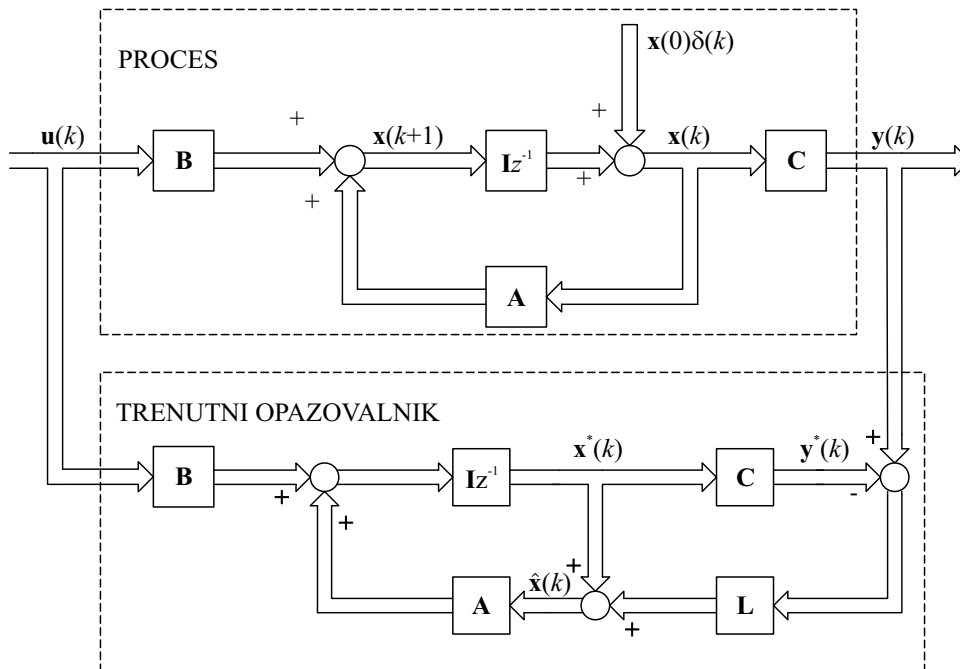
7.5.3 Trenutni opazovalnik stanj

Luenbergerjev opazovalnik stanj včasih imenujemo tudi *napovedni opazovalnik* (angl. *prediction estimator*), oceno $\mathbf{x}^*(k)$ pa *napovedana ocena*, kar izhaja iz dejstva, da za oceno trenutnega stanja $\mathbf{x}^*(k)$ glede na enačbo (7.124) uporabimo le pretekle meritve izhoda (vključno do trenutka $k - 1$). Napovedni opazovalnik torej oceno trenutnega stanja napove glede na pretekle meritve izhoda. Ker imamo v trenutku k na voljo tudi meritev $y(k)$, je gotovo smiselno to meritev upoštevati pri oceni trenutnega stanja. To naredimo enostavno tako, da pogrešek zaradi netočno napovedane ocene ($y(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)$) upoštevamo pri izračunu trenutne ocene:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{l} (y(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)) \quad (7.128)$$

pri čemer je \mathbf{l} ojačenje trenutnega opazovalnika, vektor $\hat{\mathbf{x}}(k)$ pa imenujemo *trenutna ocena stanj*. Napovedano oceno v naslednjem trenutku vzorčenja $\mathbf{x}^*(k + 1)$ izračunamo iz trenutne ocene v tekočem trenutku z upoštevanjem enačbe

$$\mathbf{x}^*(k + 1) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{b} u(k) \quad (7.129)$$



Slika 7.10: Trenutni opazovalnik stanj

ki jo lahko interpretiramo kot enačbo stanj, pri čemer imamo na levi strani napovedano oceno stanj, na desni pa trenutno oceno stanj. Tukaj je potrebno opozoriti na dejstvo, da v enačbi (7.129) za razliko od Luenbergerjevega opazovalnika več ni eksplicitno prisoten korekcijski člen (člen, ki popravlja stanje glede na izhodni pogrešek opazovalnika), vendar je korekcija sedaj prisotna pri izračunu trenutne ocene (7.128). Shematski prikaz multivariabilne različice trenutnega opazovalnika je podan na sliki 7.10.

Dinamiko ocene stanj dobimo tako, da enačbo (7.128) vnesemo v enačbo (7.129) in dobimo

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{A}\mathbf{l}(y(k) - \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*(k)) \quad (7.130)$$

Če zgornjo enačbo odštejemo od enačbe stanj procesa ($\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$), namesto $y(k)$ vnesemo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}(k)$ ter upoštevamo enačbo pogreška ocene stanj (7.120), dobimo

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (7.131)$$

Če enačbo (7.131) primerjamo z enačbo (7.125), ugotovimo, da sta pogreška $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ ekvivalentna, če med ojačenjema velja relacija

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{l} \quad (7.132)$$

Ker je pri obeh opazovalnikih pogrešek $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ definiran kot razlika med $\mathbf{x}(k)$ in $\mathbf{x}^*(k)$, smo ugotovili, da je napovedana ocena stanj $\mathbf{x}^*(k)$ trenutnega opazovalnika ekvivalentna oceni stanj $\mathbf{x}^*(k)$ Luenbergerjevega opazovalnika, če sta seveda ojačeni obeh opazovalnikov povezani, kot kaže enačba (7.131). Potrebno je poudariti, da sta observatorja lahko ekvivalentna glede dinamike $\mathbf{x}^*(k)$, medtem ko v Luenbergerjevem opazovalniku ni signala, ki bi bil ekvivalenten trenutni oceni.

7.5.4 Optimalni opazovalnik stanj ali Kalmanov filter

V tem razdelku bomo obravnavali optimalni opazovalnik stanj, ki na osnovi zaporedja pošumljenih meritev proizvede zaporedje optimalnih ocenjenih vektorjev stanja. Ocene so optimalne v smislu minimizacije pričakovane srednje kvadratne napake med oceno stanja in dejanskim stanjem. Podobno kot je veljalo, da je Luenbergerjev opazovalnik dualen regulatorju stanj, se bo izkazalo, da je Kalmanov filter dualen optimalnemu regulatorju stanj. Ojačenje opazovalnika se namreč sproti spreminja, s čimer dosežemo omenjeno optimalnost. Podobno kot v primeru optimalnega regulatorja stanj, se bomo tudi sedaj posvetili splošnemu primeru optimalnega ocenjevanja sistemov z več vhodi in več izhodi (število izhodov bomo označili z l , število vhodov pa z m).

V tem razdelku bomo predpostavili, da sta vektor stanj in izhodni vektor motena z Gaussovimi šumom. Enačba stanj procesa se torej glasi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{v}(k) \quad (7.133)$$

Vidimo, da je prvi del enačbe stanj takšen kot običajno, zadnji člen pa modelira prispevek šuma na stanjih. Šumov seveda ne moremo meriti, poznamo pa nekatere njihove statistične lastnosti, zato bomo v nadaljevanju pogosto uporabljali operator matematičnega upanja naključne spremenljivke. Matematično upanje naključne spremenljivke X bomo označili z $\mathbb{E}[X]$. Procesni šum (dimenzije $p \times 1$) $\mathbf{v}(k)$ ima ničelno srednjo vrednost

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)] = \mathbf{0} \quad (7.134)$$

vrednosti šuma so med različnimi časovnimi trenutki neodvisne

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(i)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{0} \quad i \neq j \quad (7.135)$$

njegova kovariančna matrika pa je enaka

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{V} \quad (7.136)$$

kar pomeni, da je procesni šum t.i. beli šum. Matrika \mathbf{F} se imenuje vhodna matrika procesnega šuma in ima dimenzijo $n \times p$.

Izhodna enačba sistema se z dodatkom šuma glasi:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) \quad (7.137)$$

kjer je $\mathbf{n}(k)$ merilni šum dimenzije $l \times 1$ z ničelno srednjo vrednostjo

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(k)] = \mathbf{0} \quad (7.138)$$

vrednosti šuma so med različnimi časovnimi trenutki neodvisne

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}^T(j)] = \mathbf{0} \quad i \neq j \quad (7.139)$$

njegova kovariančna matrika pa je enaka

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{N} \quad (7.140)$$

kar pomeni, da je tudi merilni šum bel.

Predpostavimo, da so izpolnjeni naslednji pogoji:

- Matrike \mathbf{A} , \mathbf{B} in \mathbf{C} zapisa procesa v prostoru stanj so natančno poznane. V vsakem trenutku poznamo tudi vhodno veličino procesa $\mathbf{u}(k)$.
- Procesni šum $\mathbf{v}(k)$ in merilni šum $\mathbf{n}(k)$ sta med seboj nekorelirana bela šuma z ničelno srednjo vrednostjo, katerih kovariančni matriki \mathbf{V} in \mathbf{N} sta znani. Poznana je tudi vhodna matrika procesnega šuma \mathbf{F} .
- Podani sta tudi ocena začetnega vektorja stanj $\hat{\mathbf{x}}(0)$ in kovariančna matrika te ocene $\hat{\mathbf{P}}(0)$. Kakovost začetne ocene je močno odvisna od predhodnega poznavanja sistema.

Potrebno je poudariti, da je problem mogoče rešiti tudi, če so nekatere od zgornjih zahtev kršene, vendar te zahteve predstavljajo klasične predpostavke pri izpeljavi Kalmanovega filtra.

Kalmanov filter bi lahko opredelili kot trenutni opazovalnik, vendar se za razliko od trenutnega opazovalnika, opisanega v razdelku 7.5.3, njegovo ojačenje s časom spreminja. Tudi pri Kalmanovem filtru bomo uporabljali dve oceni vektorja stanj. Napovedana ocena (s tujko *a priori*) $\mathbf{x}^*(k)$ je ocena vektorja stanj, ki temelji na meritvah do vključno trenutka $(k - 1)$. Trenutna ocena (s tujko *a posteriori*)

$\hat{\mathbf{x}}(k)$ je ocena vektorja stanj, ki temelji na meritvah do vključno trenutka k . Ker imamo dve oceni vektorja stanj, bomo definirali tudi dve kovariančni matriki pogreška ocene ali drugače povedano dve matematični upanji kvadrata pogreška ocene. Kovarianca pogreška napovedane ocene $\mathbf{x}^*(k)$ je

$$\mathbf{P}^*(k) = \mathbb{E} [(\mathbf{x}^*(k) - \mathbf{x}(k))(\mathbf{x}^*(k) - \mathbf{x}(k))^T] \quad (7.141)$$

kovarianca pogreška trenutne ocene $\hat{\mathbf{x}}(k)$ pa

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \mathbb{E} [(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))(\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))^T] \quad (7.142)$$

Kalmanov filter minimizira slednjo kovariančno matriko oz. pričakovano srednjo kvadratno napako med oceno stanja in dejanskim stanjem.

Kalmanov filter je običajno podan v obliki algoritma v petih točkah, ki se izvede ob vsakem trenutku vzorčenja:

1. Na osnovi pretekle trenutne ocene vektorja stanj $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ določimo napovedano oceno vektorja stanj $\mathbf{x}^*(k)$:

$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (7.143)$$

Ta korak si lahko pripravimo vnaprej (medtem ko čakamo na meritve ob trenutku k , a že poznamo $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$).

2. Na osnovi kovariančne matrike (iz prejšnjega trenutka vzorčenja) pogreška trenutne ocene $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$ tvorimo kovariančno matriko pogreška napovedane ocene $\mathbf{P}^*(k)$:

$$\mathbf{P}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T \quad (7.144)$$

Tudi ta korak si lahko pripravimo vnaprej (medtem ko čakamo na meritve ob trenutku k , a že poznamo $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$).

3. Na osnovi kovariančne matrike pogreška napovedane ocene $\mathbf{P}^*(k)$ določimo ojačenje $\mathbf{L}(k)$, ki ga imenujemo tudi Kalmanovo ojačenje (določeno je tako, da minimiziramo $\hat{\mathbf{P}}(k)$):

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{N}]^{-1} \quad (7.145)$$

Tudi ta korak si lahko pripravimo vnaprej (medtem ko čakamo na meritve ob trenutku k , a že poznamo $\mathbf{P}^*(k)$).

4. Ko dobimo meritev izhoda $\mathbf{y}(k)$, lahko določimo trenutno oceno stanj $\hat{\mathbf{x}}(k)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{L}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}^*(k)] \quad (7.146)$$

5. V zadnjem koraku izračunamo kovariančno matriko vektorja trenutnega pogreška $\hat{\mathbf{P}}(k)$ na osnovi kovariančne matrike vektorja napovedanega pogreška $\mathbf{P}^*(k)$:

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{P}^*(k) - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k) \quad (7.147)$$

Bločni diagram Kalmanovega filtra je enak kot bločni diagram trenutnega opazovalnika 7.10. Edina razlika v samem bločnem diagramu je prisotnost procesnega in merilnega šuma v procesu. Je pa seveda velika razlika v izračunavanju ojačenja \mathbf{L} , ki je v Kalmanovem filtru spremenljivo in ga računamo v korakih 2,3 in 5 zgornjega algoritma.

Stacionarni Kalmanov filter

V praksi je zanimiva rešitev Kalmanovega filtra v ustaljenem stanju ($k \rightarrow \infty$). Matrika \mathbf{L} postane konstantna in ima glede na enačbo (7.145) naslednjo obliko

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T \left(\mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T + \mathbf{N} \right)^{-1} \quad (7.148)$$

kjer je $\bar{\mathbf{P}}^*$ rešitev stacionarne matrične Riccatijeve enačbe (ali algebrajske Riccatijeve enačbe):

$$\bar{\mathbf{P}}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}^*(N) = \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T + \mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}^* \left[\mathbf{I} - \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{C} \bar{\mathbf{P}}^* \right] \mathbf{A} \quad (7.149)$$

ko jo dobimo z združitvijo enačb (7.144), (7.145) in (7.147). Pri stacionarnem Kalmanovem filtru je Kalmanovo ojačenje konstantno (se ne spreminja s časom), algoritem pa je naslednji:

1. Na osnovi pretekle trenutne ocene vektorja stanj $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ določimo napovedano oceno vektorja stanj $\mathbf{x}^*(k)$:

$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \quad (7.150)$$

Ta korak si lahko pripravimo vnaprej (medtem ko čakamo na meritve ob trenutku k).

2. Ko dobimo meritev izhoda $\mathbf{y}(k)$, lahko določimo trenutno oceno stanj $\hat{\mathbf{x}}(k)$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{L} [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}^*(k)] \quad (7.151)$$

kjer je Kalmanovo ojačenje določeno z enačbama (7.148) in (7.149).

Algoritem stacionarnega Kalmanovega filtra je torej povsem enak kot algoritem trenutnega opazovalnika. Ta dva algoritma za oceno stanj se ločita le v načinu določitve ojačenja \mathbf{L} . Pri obeh algoritmih za izračun potrebujemo matriki \mathbf{A} in \mathbf{C} . Pri trenutnem opazovalniku smo morali podati še zelene pole opazovalnika, pri Kalmanovem filtru pa lastnosti motilnih signalov (matrike \mathbf{F} , \mathbf{V} in \mathbf{N}).

7.5.5 Princip dualnosti

Matematični izrazi (7.115) in (7.116), ki opisujejo optimalni regulator stanj, ter (7.148), (7.149), ki opisujejo Kalmanov filter, so si zelo podobni. Ustrezna povezava je podana v tabeli 7.1.

Tabela 7.1: Povezava med optimalno regulacijo in optimalnim filtriranjem

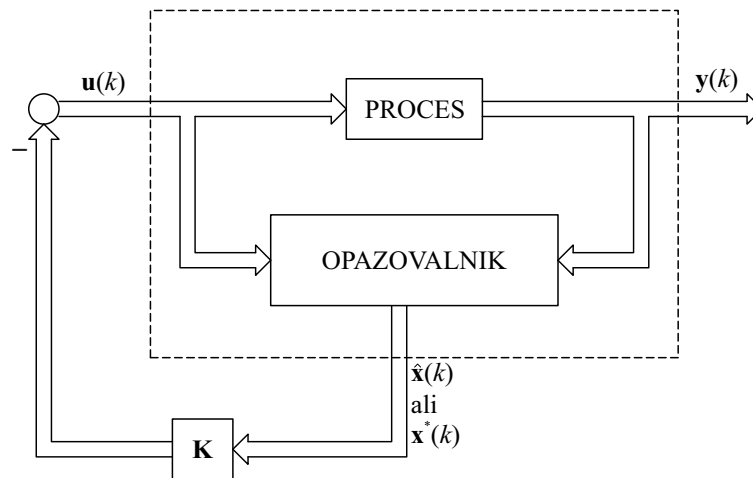
Optimalni regulator stanj	Kalmanov filter
$-k$	k
\mathbf{A}	\mathbf{A}^T
\mathbf{B}	\mathbf{C}^T
\mathbf{b}	\mathbf{c}
\mathbf{K}	\mathbf{H}^T
\mathbf{R}	\mathbf{N}
\mathbf{Q}	\mathbf{FV}^T

Pri optimalnem regulatorju stanj ustreza utežnostna matrika \mathbf{R} vektorja \mathbf{u} kovariančni matriki šuma na izhodu Kalmanovega filtra \mathbf{N} . Podobno ustreza matrika \mathbf{Q} kovariančni matriki šuma na stanja \mathbf{FV}^T .

7.6 Razširitev osnovnega regulatorja stanj

7.6.1 Regulator stanj na osnovi opazovalnika stanj

Kot smo že povedali, je regulator stanj zelo privlačen način vodenja, saj na zelo pregleden način vplivamo na položaj polov zaprtizančnega sistema. Vendar pa ima pristop pomembno pomanjkljivost – za njegovo realizacijo moramo imeti narmreč merljiva vsa stanja v procesu. V tem razdelku bomo v regulatorju stanj



Slika 7.11: Regulator stanj z opazovalnikom

uprabili oceno stanj iz opazovalnika. Preden to storimo, je potrebno ta pristop teoretično upravičiti oz. pokazati, kakšne so posledice uporabe kombinacije opazovalnika in regulatorja.

Če za oceno stanj uporabimo Luenbergerjev opazovalnik, se regulacijski zakon glasi:

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}^*(k) \quad (7.152)$$

Shematski prikaz sistema je prikazan na sliki 7.11. Blok »PROCES« je dinamični sistem n -tega reda z vektorjem stanj \mathbf{x} , blok »OPAZOVALNIK« je prav tako dinamični sistem n -tega reda, katerega vektor stanj je \mathbf{x}^* , blok \mathbf{K} pa je statični sistem (množenje s konstanto). Celotni povratnozančni sistem je reda $2n$. V nadaljevanju bomo izpeljali njegovo dinamiko. Vektor stanj je dolžine $2n$ in je sestavljen iz vektorja stanj procesa \mathbf{x} in pogreška ocene vektorja stanj $\tilde{\mathbf{x}}$. Slednjega bomo uporabili namesto \mathbf{x}^* zaradi bolj ugodne oblike enačb, je pa ta korak upravičen, saj zaradi linearnosti sistema nekaterim stanjem lahko prištejemo ali odštejemo linearno kombinacijo ostalih stanj.

Ko regulirno veličino (7.152) vnesemo v enačbo stanj procesa in upoštevamo še enačbo pogreška ocene stanj (7.120), dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{x}^*(k) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T (\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}\mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (7.153)$$

Enačba (7.153) določa predikcijo stanj procesa glede na vektorja $\mathbf{x}(k)$ in $\tilde{\mathbf{x}}(k)$. Enačba (7.125) določa predikcijo pogreška ocene stanj, ki je seveda neodvisna od

stanj procesa. Obe enačbi lahko združimo v naslednjo matrično enačbo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} \quad (7.154)$$

Enačba (7.153) je enačba stanj celotnega povratnozančnega sistema. Pole povratnozančnega sistema dobimo, če določimo lastne vrednosti matrike v enačbi (7.153). Poiskali bomo torej karakteristični polinom celotnega povratnozančnega sistema:

$$\det \left\{ z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \quad (7.155)$$

V prejšnji enačbi je potrebno upoštevati, da je prva matrika \mathbf{I} dimenzije $2n \times 2n$, ostali dve pa sta dimenzije $n \times n$. Karakteristični polinom sistema dobimo tako, da poiščemo determinanto matrike v enačbi (7.155). Gre za matriko dimenzije $2n \times 2n$, ki je sestavljena iz štirih matrik dimenzije $n \times n$. Matrična algebra pravi:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \quad (7.156)$$

kjer sta matriki \mathbf{A} in \mathbf{D} kvadratni matriki, dimenziji matrik \mathbf{B} in \mathbf{C} pa sta takšni, da ju lahko skupaj s preostalima matrikama zložimo v kvadratno matriko (to pomeni, da matriki \mathbf{B} in \mathbf{C} nista nujno kvadratni). Poseben primer dobimo, če je katera od matrik \mathbf{B} ali \mathbf{C} ničelna:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D}) \quad (7.157)$$

Glede na enačbo (7.157) je karakteristični polinom (7.155) povratnozančnega sistema enak

$$\det \left\{ z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \right\} = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T) \quad (7.158)$$

kar pomeni, da je karakteristični polinom celotnega sistema določen kot produkt karakterističnega polinoma regulatorja stanj (7.78) in karakterističnega polinoma opazovalnika (7.126). Karakteristični polinom regulatorskega dela je odvisen od \mathbf{k} , ni pa odvisen od \mathbf{h} , medtem ko je karakteristični polinom opazovalnika odvisen od \mathbf{h} , ni pa odvisen od \mathbf{k} . Izredno pomembna posledica enačbe (7.158) je, da so poli sistema unija polov regulatorja stanj in polov opazovalnika stanj, pri čemer z regulatorjem ne pokvarimo opazovalnika, z opazovalnikom pa ne pokvarimo regulatorja. Ta lastnost regulacijskega sistema je poseben primer principa ločitve (angl. *separation principle*). V našem primeru ta princip zagotavlja upravičenost

predlagane regulacijske sheme, prikazane na sliki 7.11. Če bomo namreč opazovalnik in regulator načrtali neodvisno, se poli sistema ob združitvi ne bodo spremenili. Potrebno je poudariti, da princip ločitve ne velja v splošnem (v primeru nelinearnih sistemov).

Do podobnih ugotovitev pridemo, tudi če uporabimo trenutni opazovalnik. Tudi v tem primeru namreč velja princip ločitve. Enako lahko ugotovimo za kombinacijo optimalnega regulatorja stanj in optimalnega opazovalnika stanj (Kalmanovega filtra). Ta kombinacija se v literaturi imenuje linearni kvadratični Gaussov regulator (angl. *linear-quadratic-Gaussian*, s kratico *LQG*).

Pokazali smo, da lahko regulator in opazovalnik načrtujemo ločeno. Vprašanje pa je, kam postaviti pole regulatorja in kam pole opazovalnika. Običajno načrtamo pole opazovalnika tako, da so pripadajoče časovne konstante dvakrat do šestkrat krajše kot časovne konstante regulatorskega dela [7]. Zavedati se je potrebno določenih omejitev pri izboru zelenih polov. Če izberemo prehitre pole regulatorja, je to potrebno plačati s (pre)velikimi regulirnimi akcijami, ki so bodisi predrage (cena regulirne akcije narašča z amplitudo regulirnega signala) ali nesprejemljive s tehnološkega vidika (regulirna veličina je zaradi praktične izvedbe izvršnega člena vedno omejena). Po drugi strani hitri poli opazovalnika ne povzročijo visokih amplitud regulirnega signala, pač pa velike korekcije ocenjenih stanj. Le-te so problematične, če je na merjenih signalih prisoten šum velike amplitude. Posledično prihaja do nepotrebnih popravkov ocenjenih stanj, ki »sledijo« motnjam in šumom v meritvi.

Dodatek A

Tabela z-transformacije

$x_z(t)$	$x(k) = x_z(kT)$	$\mathcal{L}\{x_z(t)\}$	$\mathcal{Z}\{x(k)\}$
	$\delta(k)$		1
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	k^2T^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
t^3	k^3T^3	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
t^n	k^nT^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
t^2e^{-at}	$k^2T^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2ze^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$t^n e^{at}$	$k^n T^n e^{akT}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$
$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(aT-1+e^{-aT})z^2+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\sin \omega_0 t$	$\sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$\cos \omega_0 t$	$\cos \omega_0 kT$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega_0 T)}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$e^{-akT} \sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$e^{-akT} \cos \omega_0 kT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$

Literatura

- [1] R. Aoufi, *Digital Control Systems*, Prentice Hall College Div, 2009.
- [2] K. J. Åström, B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition*, Prentice Hall, 1996.
- [3] S. Blažič, *Diskretni regulacijski sistemi: zbirka rešenih problemov, 2. izd.*, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2008, 2008.
- [4] R. Chapman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Wadsworth Publ. Co., Belmont, CA, USA, 2006.
- [5] T. S. ElAli, *Discrete Systems and Digital Signal Processing with MATLAB, Second Edition*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2011.
- [6] A. Feuer, G. C. Goodwin, *Sampling in digital signal processing and control*, Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1996.
- [7] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems, Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1990.
- [8] G. H. Hostetter, *Digital Control System Design*, Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1995.
- [9] C. Houppis, G. Lamont, *Digital control systems: theory, hardware, software*, McGraw-Hill, 1986.
- [10] D. Ibrahim, *Microcontroller Based Applied Digital Control*, John Wiley & Sons, 2006.
- [11] R. Isermann, *Digital Control Systems*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1996.
- [12] B. C. Kuo, *Digital Control Systems*, Oxford University Press, 1995.

-
- [13] I. D. Landau, G. Zito, *Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation (Communications and Control Engineering)*, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.
- [14] J. R. Leigh, *Applied Digital Control: Theory, design and implementation*, Prentice Hall International (UK) Ltd., Hertfordshire, UK, UK, 1985.
- [15] D. Matko, S. Strmčnik, B. Zupančič, G. Mušič, *Računalniško vodenje procesov*, Založba FER, Ljubljana, 1996.
- [16] D. Matko, *Diskretni regulacijski sistemi*, ZAFER, Ljubljana, 1991.
- [17] B. Mulgrew, P. Grant, J. Thompson, *Digital Signal Processing: Concepts and Applications*, Palgrave MacMillan, 2003.
- [18] F. Nekoogar, G. Moriarty, *Digital control using digital signal processing*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.
- [19] G. Olsson, G. Piani, *Computer systems for automation and control*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1992.
- [20] C. L. Phillips, H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design, 4th edition*, Prentice Hall Press, Upper Saddle River, NJ, USA, 2007.
- [21] J. Quevedo, T. Escobet, *Digital Control: Past, Present and Future of PID Control*, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2000.
- [22] R. Svečko, *Diskretni regulacijski sistemi*, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, 2003.
- [23] S. G. Tzafestas, *Applied Digital Control*, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 1986.
- [24] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis, Second Edition*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [25] G. Virk, *Digital computer control systems*, Macmillan new electronics, Macmillan, 1991.
- [26] B. Zupančič, *Zvezni regulacijski sistemi, II. del (2. izdaja)*, ZAFER, Ljubljana, 1995.