

Digitalno vodenje

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko
Podiplomski študijski program 2. stopnje, 1. letnik
Smeri Avtomatika in informatika ter Robotika
Zimski semester 2012/2013
Sašo Blažič



Digitalno vodenje



- Izvedeno z digitalnim računalnikom, mikroprocesorskim sistemom, programirljivim vezjem (npr. v tehnologiji FPGA) ali kakršnem koli drugem digitalnem elektronskem sistemu
- Izraz poudarja vrsto realizacije in s tem praktični vidik vodenja – signali se na svoji poti vsaj nekaj časa prenašajo v digitalni obliki
- Zelo soroden izraz – časovno diskretno vodenje:
 - izraz poudarja časovno diskretizacijo signalov → teoretični vidik vodenja
 - definiramo vzorčne signale (najbolj pogosto predpostavimo, da so le-ti vzorčeni z enakomernimi časovnimi presledki) → omogoča uporabo uveljavljenih metod za analizo in načrtovanje sistemov

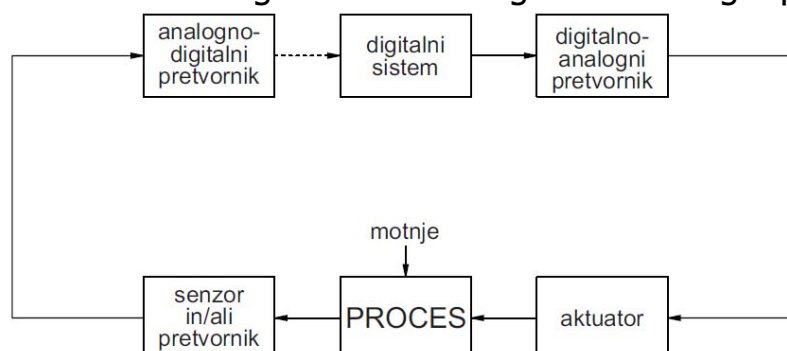


- Skupno vsem sistemom digitalnega vodenja je dejstvo, da vodenje ne deluje ves čas, ampak se novi ukazi pošljejo le ob diskretnih časovnih trenutkih, ki jih določa:
 - prihod nove informacije o stanju v vodenem sistemu
 - izvedba algoritma vodenja
- Izvedba digitalnega vodenja običajno vključuje:
 - pretvorbo regulirane analogne veličine v digitalno obliko
 - izvedbo algoritma vodenja v digitalnem elektronskem vezju
 - pretvorbo digitalne regulirne veličine v analogni signal
- Operacije v sistemu digitalnega vodenja zahtevajo precej časa, zato jih je mogoče izvajati le v diskretnih časovnih trenutkih

Shema sistema digitalnega vodenja

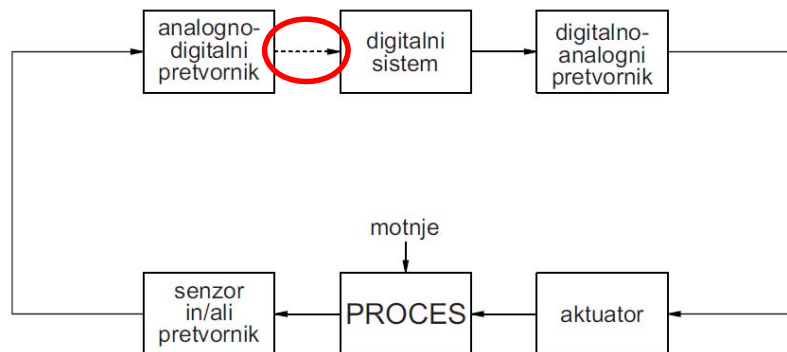


- Spodnji del sheme je enak kot pri analognem vodenju
- Razlika v zgornjem delu:
 - potrebujemo pretvornik analognega signala iz sensorja v digitalno veličino → analogno-digitalni pretvornik
 - pretvorjeni signal se obdelava v digitalnem sistemu
 - digitalni signal na izhodu digitalnega sistema je seveda potrebno znova pretvoriti v analogno obliko → digitalno-analogni pretvornik





- Shema nakazuje na dejstvo, da je vodenje lahko:
 - povratnozančno digitalno vodenje – običajno, a seveda ne nujno
 - odprtozančno digitalno vodenje oz. digitalno krmiljenje – krmilna veličina ni odvisna od izhodne veličine procesa → ena povezava, prikazana s črtkano črto, takrat odpade



5

Zakaj digitalno vodenje?



- Običajno digitalni računalnik tisti del regulacijske zanke, ki zahteva vzorčenje – zajemanje podatkov s časovno periodo
- Včasih narava procesa, delovanje sensorja oz. aktivatorja:
 - V kemični industriji se pogosto uporabljajo naprave za avtomatsko analizo (npr. plinski kromatograf). Takšna naprava vzame najprej vzorec snovi, nato izvede analizo, za kar potrebuje določen čas
 - Radar – z rotirajočo radarsko anteno določeni objekt vidimo le enkrat na obrat antene (isti princip velja pri stabilizaciji rotirajočih satelitov, ki svojo referenčno točko, npr. zvezdo, vidijo le enkrat na obrat)
 - Sonar – nov impulz lahko oddamo šele, ko smo registrirali odboj prejšnjega impulza (minimalna perioda odvisna od dosega sonarja)
 - Tiristorski usmerniki – kot vžiga lahko spremenimo le enkrat na periodo
 - Položaj rotacijsko stabiliziranega satelita lahko spreminjamo v smereh, ki sta pravokotni na os vrtenja, le z enim raketnim motorjem. Pri tem pa je možno proizvesti želeni moment le enkrat na obrat

6



- Digitalno realizirani parametri niso podvrženi lezenju in so neobčutljivi na vplive okolja (temperatura, motnje)
- Digitalna realizacija omogoča poljubno natančnost parametrov in izvedbe operacij – analogne izvedbe v tem oziru zelo težavne (npr. analogni množilniki)
- Večja fleksibilnost, predvsem pri povezovanju z nadrejenimi računalniki (hierarhično vodenje) in pri uvedbi kompleksnih sistemov vodenja (adaptivno, prediktivno, mehko vodenje)
- Možnost realizacije naprednih regulacijskih algoritmov, posebno pri vodenju procesov z več vhodi in več izhodi, pri katerih nastopajo interakcije med posameznimi vhodi oz. izhodi
- Digitalni spomin je bistveno lažje realizirati kot analogni

7



- Sistem sestavljajo zvezni in časovno-diskretni gradniki. Katera orodja je potrebno uporabiti za določitev časovnih in frekvenčnih odzivov tovrstnih sistemov?
- Razvoj algoritmov digitalnega vodenja:
 - diskretizacija zveznih algoritmov – kako jo izvesti?
 - razvoj od začetka (povsem digitalni algoritmi) – nove tehnike?
- Kako izbrati čas vzorčenja glede na ostale sistemske parametre?
- Sistemi digitalnega vodenja vnašajo v sistem zakasnitve in šum kvantizacije (oboje možno znižati z boljšo opremo). Kakšen vpliv na učinkovitost vodenja imata ta dva faktorja?
- Katere strategije (npr. multipleksiranje) smiselno uporabiti, če upoštevamo praktične vidike in stroške izvedbe?

8



- Izredno pomembno vlogo pri izvedbi imata uporabljena strojna oprema in strojno-programaska oprema
- Glede na uporabljeno infrastrukturo je potrebno prilagoditi algoritme vodenja, pripadajoče parametre ipd.
- Program teče na mikrokontrolerju ali programirljivem vezju, piše pa se v razvojnem okolju na razvojnem računalniku
- Glede na vrsto uporabljene strojne opreme se spreminja tudi način programiranja:
 - zbirni jezik
 - višjenivojski programski jezik (npr. C, C++, C#, Java)
- Potrebno se je zavedati omejitev zaradi opreme – povezane s hitrostjo izvajanja operacij, natančnostjo računanja, sistemom prekinitev, specifikami operacijskega sistema ipd.



- **Časovno zvezni signal** – funkcija, definirana na zveznem časovnem intervalu, katere amplituda lahko zavzame zvezno področje vrednosti ali pa končno število možnih vrednosti
- **Analogni signal** – funkcija, definirana na zveznem časovnem intervalu, katere amplituda lahko zavzame zvezno področje vrednosti (posebni primer časovno zveznega signala)
- **Kvantizacija** – opisuje proces predstavitve spremenljivke z naborom različnih vrednosti (kvant. sprem. zavzame le določene)
- **Časovno diskretni signal** – funkcija, definirana le v posameznih časovnih trenutkih (neodvisna spremenljivka čas je kvantizirana); **vzorčeni signal** – poseben primer, kjer je amplituda zvezna
- **Digitalni signal** – funkcija, kjer sta čas in amplituda kvantizirani veličini (digitalni signal predstavimo z nizom števil, pri čemer ima vsako število končno število digitov)

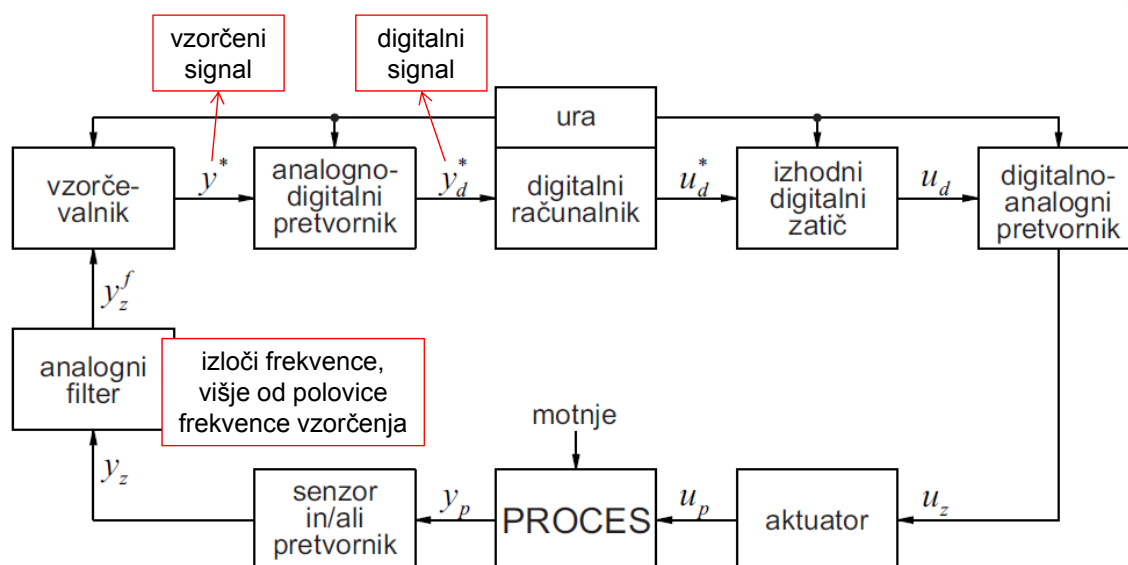
Časovno diskretni ali digitalni signal?



- V praksi pojma časovno diskretni in digitalni signal pogosto pomenita isto
- Ker velik del teorije časovno diskretnih signalov uporaben tudi za digitalne signale, ni potrebno vedno strogo ločiti obeh pojmov
- Izraz časovno diskretni signal se bolj pogosto uporablja pri teoretičnih raziskavah
- Izraz digitalni pa se uporablja pri opisu realizacije aparaturne in programske opreme

11

Tipična bločna shema



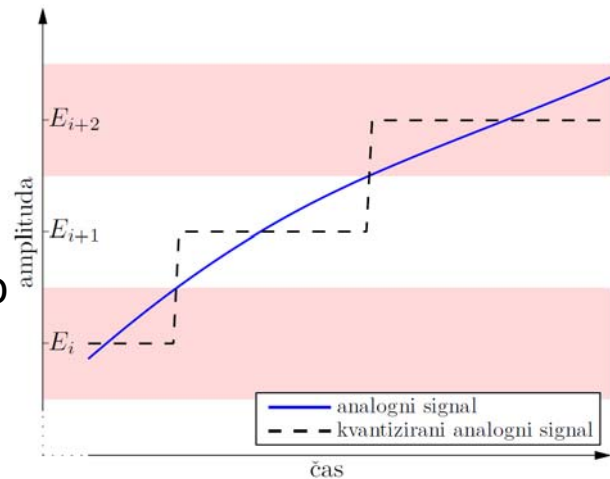
- Standardna oblika predstavitve digitalnih signalov – binarni številski zapis (n bitov \rightarrow število nivojev $m = 2^n$)

12

Kvantizacija po amplitudi



- Število nivojev, ki jih lahko predstavimo s številom, ki ima n bitov, je 2^n ; velja tudi obratno: če zahtevamo m nivojev, je potrebnih $\text{ceil}(\log_2 m)$ bitov
- Zato vzorce kvantiziramo v enega izmed standardnih nivojev (glede na število bitov)
- Najbolj razširjena metoda kvantizacije – vsakemu vzorcu predpišemo najbližji stand. nivo
- Beli in rožnati pasovi ilustrirajo področje merjene vrednosti, ki se zaokrožuje k istemu nivoju
- Rezolucija A/D – razdalja med sosednjima stand. nivojema



13

D/A-pretvorba oz. D/A-pretvornik

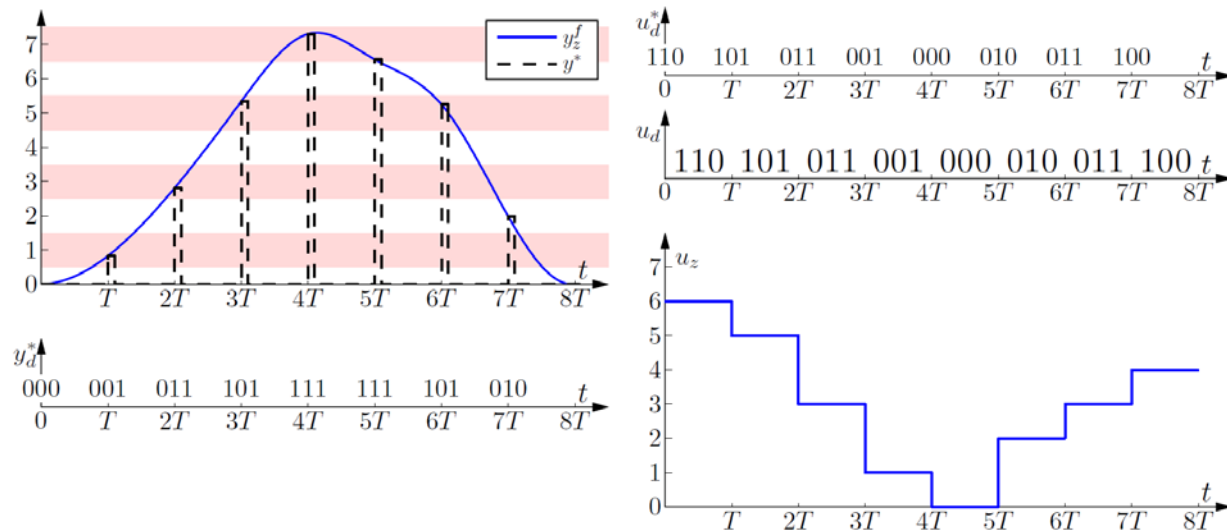


- Digitalni računalnik, ki lahko obravnava le digitalne signale, po ustreznem algoritmu izračuna regulirni digitalni signal
- Le-tega s pomočjo izhodnega zatiča in digitalno-analognega (D/A) pretvornika pretvorimo v časovno zvezni signal
- Vmesni signal u_d je časovno zvezni signal, katerega amplituda je podana v digitalni obliki
- Izhodni zatič zapolni vrzeli med impulzi, ki jih da digitalni računalnik – v teoriji vzorčenih signalov se takšno vezje imenuje zadrževalnik ničtega reda
- Aktuator oz. aktivator pretvori analogni signal u_z v fizikalno veličino u_{pr} , ki dejansko vstopa v proces
- Vse opisane pretvorbe morajo biti sinhronizirane → ura

14



- Analogni signal se spreminja med 0 in 7 V
- Uporabimo 8 možnih nivojev (v prirastkih po 1 V) za binarna števila



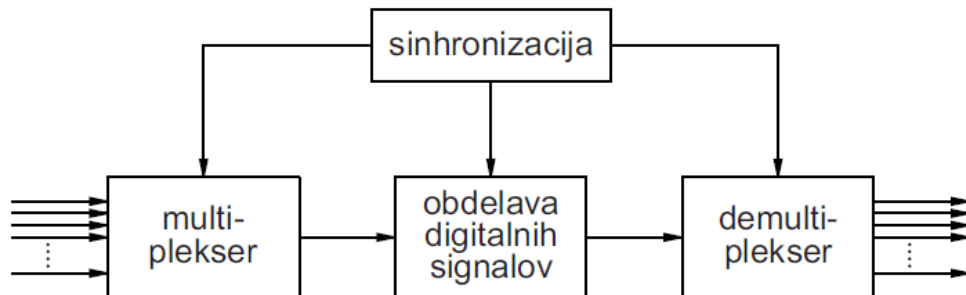
15

Časovno multipleksiranje



- Dokaj zapleten postopek A/D pretvorbe, obravnavanje tako dobljenih digitalnih signalov in končno D/A pretvorba tvorijo tako kompliciran proces, da običajno ni ekonomičen za obravnavanje enega samega signalnega kanala
- Bistvena prednost digitalnega koncepta je možnost obravnave večjega števila kanalov z isto aritmetično enoto
- To lahko dosežemo s t.i. časovnim multipleksiranjem:
 - Med posameznimi vzorci je relativno dolga perioda – v tej periodi lahko vodimo v računalnik vzorce drugih signalov
 - Posamezne kanale beremo drugega za drugim, vzorčene vrednosti pa v istem vrstnem redu pretvorimo v binarna števila, jih obdelamo in ustrezno ločimo v originalne kanale s pomočjo demultiplekserja
 - Te kanale nato vodimo v ustrezne D/A pretvornike
 - Sinhronizacija A/D pretvorbe, obdelave signalov in D/A pretvorbe!

16



Negativni stranski učinki kvantizacije



- Osnovno vprašanje: Ali smo pri postopku kvantizacije (po času in po amplitudi) izgubili kaj informacije?
- Signal smo namreč vzorčili le v diskretnih časovnih intervalih, pri kvantizaciji pa smo dejansko amplitudo nadomestili z najbližjo standardno vrednostjo
- Kvantizacija po amplitudi → **kvantizacijski pogrešek**
- Kvantizacija po času → **teorem o vzorčenju**
- Teorem o vzorčenju pravi, da lahko frekvenčno omejeni signal teoretično rekonstruiramo iz diskretnih vzorcev, če je frekvenca vzorčenja več kot dvakrat višja od najvišje frekvence signala (v praksi izberemo frekvenco vzorčenja nekajkrat višjo, da lahko zagotovimo praktično izvedbo)
- Vhodni analogni signal filtrirati z analognim filtrom!

Fenomen zibanja frekvenc

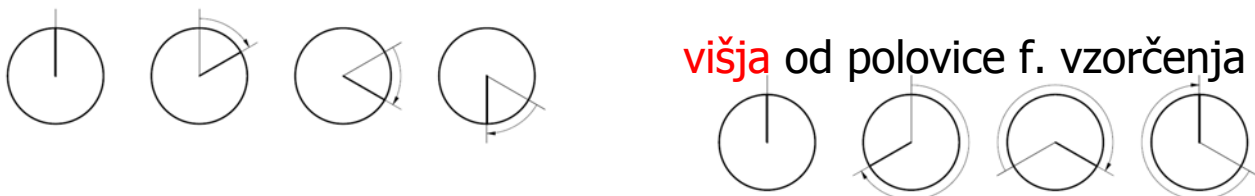


- Če frekvenca vzorčenja ni dovolj velika, se pojavi fenomen zibanja frekvenc ali prestavitve frekvenc
- Primer: če vzorčimo signal, ki vsebuje frekvence od 0 do 5 kHz, s frekvenco vzorčenja 6 kHz (ki je seveda prenizka) in poskušamo rekonstruirati signal, se frekvence nad 3 kHz prestavijo (5 kHz v 1 kHz; 4,5 kHz v 1,5 kHz; 4 kHz v 2 kHz, itd.), kar vodi k nepopravljivi popačenosti signala
- Splošni primer tega fenomena je efekt kolesa prerijske kočije, znan iz filmov o divjem zahodu:
 - vsaka sličica filma ustreza diskretnemu vzorcu
 - če je kot zasuka kolesa prevelik glede na hitrost snemanja, se kolo navidezno vrti nazaj ali prepočasi naprej ali pa celo stoji

19

Digitalno vodenje

Ilustracija efekta prerijske kočije



20

Digitalno vodenje

Kvantizacijski pogrešek



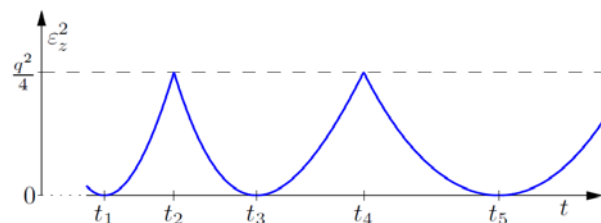
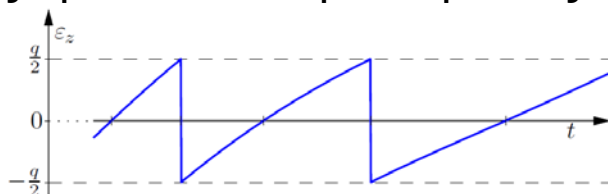
- V praksi seveda obstaja zgornja meja števila bitov, zato obstaja tudi *pogrešek kvantizacije* ali *šum kvantizacije*
- Pogrešek kvantizacije lahko poljubno zmanjšamo s povečanjem števila bitov A/D pretvornika
- Naj bosta E_{max} in E_{min} maksimalna oz. minimalna vrednost signala in q resolucija A/D pretvornika, t.j. razdalja med dvema sosednjima standardnima nivojema
- Z uporabo prej definiranih n in m lahko zapišemo:
$$q = \frac{E_{max} - E_{min}}{2^n} = \frac{E_{max} - E_{min}}{m}$$
- Definirajmo kvantizacijski pogrešek $\varepsilon_z(t)$ kot razliko med analognim signalom in kvantiziranim analognim signalom

21

Kvantizacijski pogrešek



- Kvantizacijski pogrešek $\varepsilon_z(t)$ se spreminja od 0 do maksimalne vrednosti $\frac{q}{2}$, preskoči na minimalno vrednost $-\frac{q}{2}$ in se vrne nazaj na 0, kasneje pa se takšen potek ponavlja
- Časovni potek signala na vsakem od intervalov približno linearen, srednja vrednost približno enaka 0
- Ker nas zanima moč kvantizacijskega pogreška, bomo predpostavili linearen potek kvantizacijskega pogreška (za namen analize)



Potek kvantizacijskega pogreška $\varepsilon_z(t)$ in njegovega kvadrata $\varepsilon_z^2(t)$

22



- Iščemo srednjo kvadratično vrednost oz. varianco, ki je direktno proporcionalna moči šuma
- Kvadrat kvantizacijskega pogreška na vseh intervalih enak
- Varianco zato lahko računamo na poljubnem intervalu:

$$\varepsilon_z(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{q}{2} \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\varepsilon_z^2(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{q}{2} \right)^2 \quad t \in [t_1, t_2]$$

- Izračun variance (povprečje kvadrata napake):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_z^2(t) dt = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{q}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{q^2}{4(t_2-t_1)^3} \int_{t_1}^{t_2} (t-t_1)^2 dt = \frac{q^2}{4(t_2-t_1)^3} \frac{(t-t_1)^3}{3} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{q^2}{12} \end{aligned}$$

23



- Opazimo lahko, da zavisi varianca šuma kvantizacije samo od resolucije A/D pretvornika, ne pa od trenutnega časa, dolžine signala ali strmine kvantizacijskega pogreška
- Kvadratni koren srednjekvadratične vrednosti (standardna deviacija) $\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}}$ je enak $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -kratni vrednosti maksimalnega pogreška kvantizacije $q/2$
- Zaključki:
 - pri vzorčenju ne izgubimo nobene informacije, če izberemo dovolj visoko frekvenco vzorčenja
 - z izbiro zadostnega števila bitov A/D pretvornika lahko zmanjšamo pogrešek kvantizacije na poljubno nizek nivo
 - ta koncept dopušča predstavitev časovno zveznega signala v obliki vrste diskretnih binarnih števil – obdelujemo jih z digitalnimi vezji

24



- Zvezno periodično funkcijo s periodo T , ki zadošča določenim omejitvam (ki pa običajno v inženirski praksi ne predstavljajo nobenih ovir) lahko zapišemo v obliki neskončne vsote harmoničnih izrazov

$$x_z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_1 t}$$

kjer so koeficienti c_m podani z izrazom

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_z(t) e^{-jm\omega_1 t} dt$$

in je T perioda funkcije, $f_1 = \frac{1}{T}$ je osnovna ciklična frekvenca, $\omega_1 = 2\pi f_1$ je osnovna krožna frekvenca in m celo število, ki definira red harmoničnega izraza

25



- Koeficienti c_m so v splošnem kompleksna števila, zato jih lahko zapišemo v naslednji obliki

$$c_m = |c_m| e^{j\phi_m}$$

pri čemer serijo koeficientov c_m imenujemo frekvenčni spekter danega periodičnega signala, serija $|c_m|$ predstavlja amplitudni spekter, serija $\phi_m = \arg c_m = \angle c_m$ pa fazni spekter

- **Bistvena značilnost frekvenčnega spektra periodične funkcije je njegova frekvenčna diskretnost**, saj vsebuje le enosmerno komponento, komponento osnovne frekvence f_1 (prvo harmonsko komponento) in komponente celoštevilčnih mnogokratnikov osnovne frekvence (višje harmonske komponente)

26

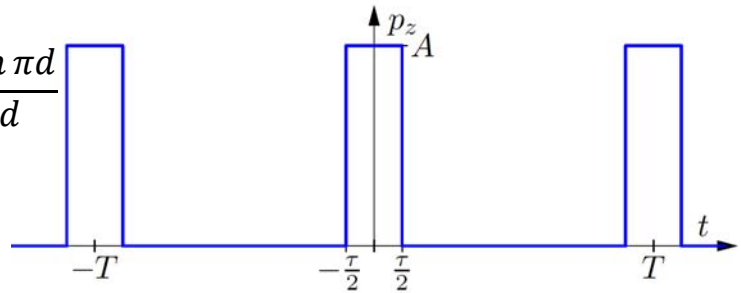
Primer – vlak pulzov



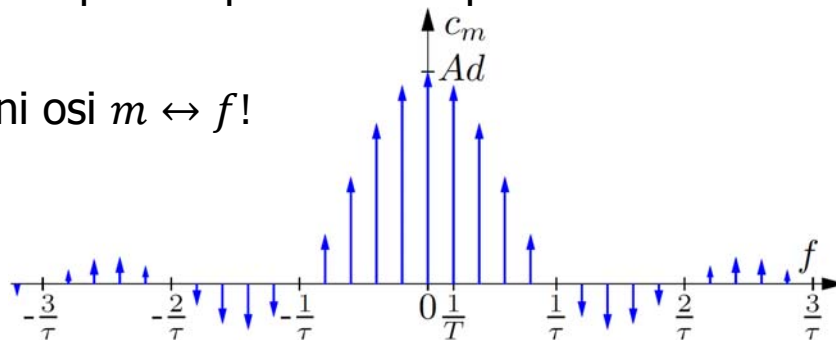
- Serija c_m za ta primer:

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jm\omega_1 t} dt = Ad \frac{\sin m\pi d}{m\pi d}$$

- Pri tem je $d = \frac{\tau}{T}$
- Koeficienti c_m so realni
- Negativna amplituda pomeni komponente s fazo -180°



- Na abscisni osi $m \leftrightarrow f$!
- $d = \frac{1}{5}$



27

Kardinalni sinus – funkcija sinc



- Nanj zelo pogosto naletimo v teoriji obdelave signalov
- Definicija v matematiki (nenormirani kardinalni sinus):

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- Na področju obdelave signalov se uporablja normirani kardinalni sinus (uporaba tudi v Matlabu in pri tem predmetu):

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- Funkcija $\text{sinc}(x)$ povsod analitična (pri $x = 0$ pride do krajšanja pola in ničle), zvezna in zvezno odvedljiva
- Z upoštevanjem definicije $\text{sinc}(\cdot)$ se Fourierova transformacija vlaka pulzov zapiše v bolj kompaktni obliki:

$$c_m = Ad \text{sinc}(md) = Ad \text{sinc}(f\tau) \Big|_{f=m\frac{1}{T}}$$

28



- Fourierova transformacija omogoča določitev spektra neperiodičnega signala
- Omejili se bomo na signale, ki vsebujejo končno energijo
- Fourierova transformacija zveznega signala $x_z(t)$:

$$X_z(f) = \mathcal{F}\{x_z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Fourierova transformacija $\mathcal{F}\{\cdot\}$ je linearni operator, ki operira nad časovno zveznim (in običajno realnim) signalom $x_z(t)$ in daje kot rezultat kompleksno funkcijo $X_z(f)$, ki jo včasih imenujemo tudi Fourierova transformiranka
- Ena od oblik zapisa Fourierove transformacije je tudi:

$$x_z(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_z(f)$$

29



- Pripadajoča inverzna Fourierova transformacija transformira signal iz frekvenčnega prostora nazaj v časovni prostor:

$$x_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_z(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Frekvenčni spekter neperiodične funkcije je v splošnem kompleksen, zato lahko zapišemo

$$X_z(f) = |X_z(f)| e^{j\phi(f)}$$

- **Bistvena značilnost frekvenčnega spektra neperiodične zvezne funkcije je njegova zveznost**, saj vsebuje v območju, kjer je različen od 0, komponente vseh frekvenc

30



	$x_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f)$
	$y_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$Y_z(f)$
linearnost	$ax_z(t) + by_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$aX_z(f) + bY_z(f)$
odvajanje	$\frac{d^n x_z(t)}{dt^n}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$(j2\pi f)^n X_z(f)$
integriranje	$\int_{-\infty}^t x_z(\tau) d\tau$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{X_z(f)}{j2\pi f}$
zakasnitev	$x_z(t - a)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$e^{-j2\pi fa} X_z(f)$
modulacija	$e^{j2\pi f_0 t} x_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f - f_0)$
skaliranje	$x_z(at)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\frac{1}{a} X_z\left(\frac{f}{a}\right)$
konvolucija	$\int_{-\infty}^{\infty} x_z(\tau) y_z(t - \tau) d\tau$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$X_z(f) Y_z(f)$
množenje	$x_z(t) y_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$\int_{-\infty}^{\infty} X_z(\varphi) Y_z(f - \varphi) d\varphi$
dualnost	$X_z(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$x_z(-f)$

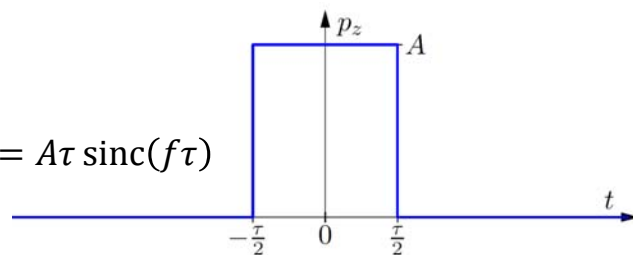
31

Primer – neperiodični pulz



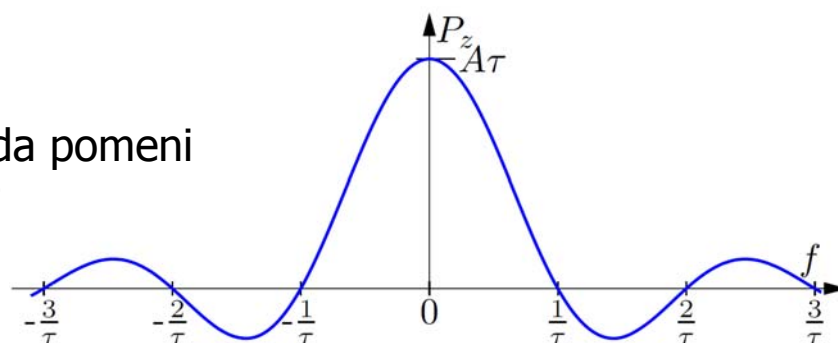
- Fourierova transformacija signala $p_z(t)$:

$$P_z(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi ft} dt = A\tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)$$



- Ker je funkcija $p_z(t)$ soda, je njena Fourierova transformacija realna funkcija

- Negativna amplituda pomeni fazo signala -180°



32



- Signali predstavljajo pomemben koncept sistemske teorije
- Z njimi predstavimo časovni potek neke veličine
- V naravi so praktično vsi signali zvezni – tako po amplitudi kot tudi po času
- Pojem *diskretni signal* je povezan s diskretizacijo neodvisne spremenljivke signala – gre torej za odvisno spremenljivko, ki je definirana le v diskretnih točkah pripadajoče neodvisne spremenljivke
- Pri uporabi v vodenju diskretne signale običajno dobimo z vzorčenjem zveznih signalov, čeprav to v splošnem ne velja (lahko jih namreč generira poljubni diskretni proces, npr. matematični algoritem, pri čemer neodvisna spremenljivka ni nujno čas, ampak poljubna veličina)

33

Zapis in prikazovanje diskretnih signalov



- Diskretni signal si lahko predstavljamo kot neskončno zaporedje števil
- Signal ima poljubno ime (običajno pišemo z malo začetnico), neodvisna spremenljivka (običajno označujemo s k) lahko zavzame poljubno celo število
- Možnosti zapisa diskretnega signala $x(k)$:
 - Zapis zaporedja

$$x(k) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$

- iz zapisa ni razvidno, kateri vrednosti neodvisne spremenljivke k pripada kateri element (čeprav običajno začnemo s $k = 0$)
- zaporedje je neskončno, zato je nemogoče enolično določiti nadaljevanje

- Analitičen zapis (v našem primeru dve možnosti):

$$x(k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} & k = 2l, l \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & k = 2l + 1, l \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad \text{ali} \quad x(k) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \mathbb{N}_0$$

34



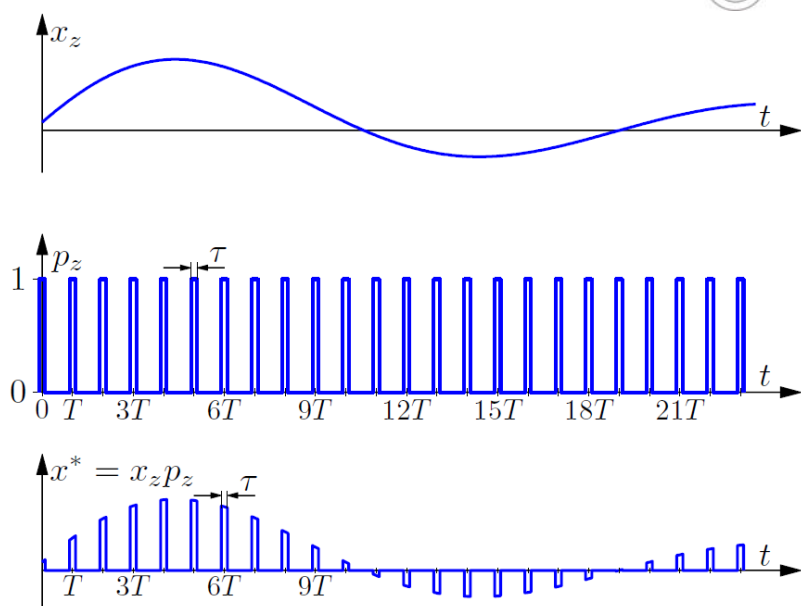
- Vzorčeni signali predstavljajo zvezo med časovno zveznimi signali in časovno diskretnimi oz. digitalnimi signali
- V nadaljevanju bomo ločili pojma:
 - vzorčeni signal:
 - časovno zvezni signal, sestavljen iz vlaka pulzov, informacija o amplitudi originalnega signala je shranjena v amplitudi ali v ploščini teh pulzov
 - ta oblika pomembna pri teoretični analizi in izpeljavi enačb
 - označujemo jih z zvezdico, npr. $x^*(t)$
 - vzorčeni diskretni signal
 - časovno diskretni signal oz. zaporedje vzorcev, dobljen z vzorčenjem časovno zveznega signala, pri čemer sta amplituda zveznega signala v trenutku vzorčenja in amplituda pripadajočega vzorca enaki
 - ta oblika izredno uporabna za obdelavo z digitalnim računalnikom
 - označujemo jih kot funkcije diskretne spremenljivke k , npr. $x(k)$

35

Vzorčenje signalov s pulzi končne širine



- Vzorčeni signal dobimo z vzorčenjem časovno zveznega signala v časovnih intervalih s periodo T
- Frekvenca vzorčenja:
$$f_s = \frac{1}{T}$$
- Pulzi imajo končno širino, ki je običajno veliko manjša kot perioda vzorčenja



36



- Vzorčimo tako, da množimo zvezni signal $x_z(t)$ z vlakom impulzov $p_z(t)$, le-ta pa je periodični signal s periodo T in trajanjem impulzov τ
- Rezultirajoči signal tako sestoji iz serije relativno ozkih pulzov, katerih amplituda je modulirana z originalnim časovno zveznim signalom
- To vrsto vzorčnih signalov imenujemo **pulzno amplitudno modulirani signal**
- Označimo z $x^*(t)$ vzorčeni signal in z $x_z(t)$ originalni časovno zvezni signal; vzorčeni signal lahko smatramo kot produkt $x_z(t)$ in hipotetičnega vlaka pulzov $p_z(t)$:

$$x^*(t) = x_z(t)p_z(t)$$

37

Določanje spektra vzorčenega signala (vzorčenje s pulzi končne širine)



- Zapis $p_z(t)$ v obliki Fourierove vrste

$$p_z(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_s t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm2\pi f_s t}$$

- Koeficienti c_m imajo frekvenčni potek v obliki $\frac{\sin m\pi d}{m\pi d}$, zato:

$$x^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m x_z(t) e^{jm\omega_s t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m x_z(t) e^{jm2\pi f_s t}$$

- Frekvenčni spekter vzorčenega signala dobimo s Fourierovo transformacijo gornje enačbe. Vsak sumand desne strani izraza lahko transformiramo upoštevajoč lastnost modulacije

$$e^{j2\pi f_0 t} x_z(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_z(f - f_0) \Rightarrow X^*(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m X_z(f - mf_s)$$

38

Frekvenčni spekter vzorčnega signala (vzorčenje s pulzi končne širine)



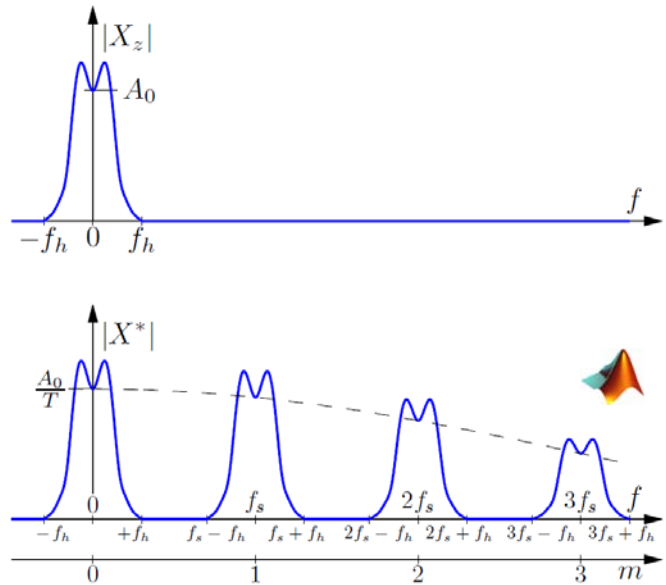
- Glede na prejšnjo enačbo spekter sestoji:
 - iz spektra originalnega signala (pomnoženega s c_0) in
 - iz neskončnega števila za vrednost frekvence vzorčenja in njenih mnogokratnikov premaknjenih kopij originalnega spektra (pomnoženih s $c_m, m \neq 0$)

- Spomnimo se primera vlaka pulzov:

– $c_0 = Ad = \frac{A\tau}{T} \xrightarrow{A\tau=1} \frac{1}{T}$, zato

$$X^*(f) = \frac{1}{T} X_z(f) \quad |f| < \frac{f_s}{2}$$

- z naraščanjem m gre c_m proti 0, zato komponente spektra z višanjem frekvence počasi izginjajo (črtkana ovojnica)



Idealno impulzno vzorčenje



- Prej smo vzorčili signale z vlakom pulzov končne širine
- Vzemimo sedaj limitni primer – širina pulzov gre proti 0, amplituda proti ∞ , ploščino pod impulzi ohranimo enako 1
- Idealno impulzno vzorčenje:

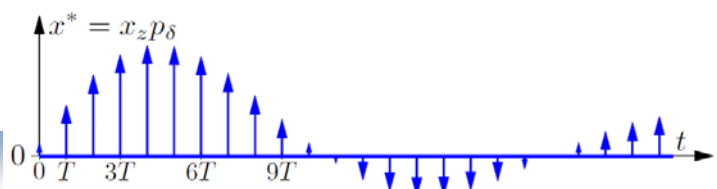
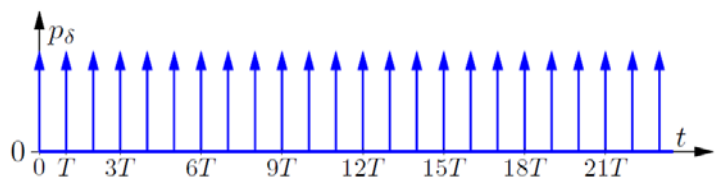
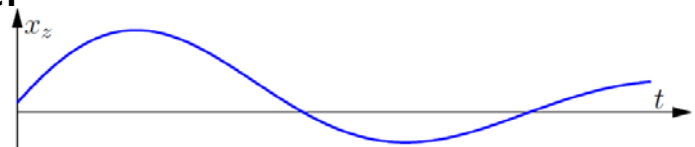
- ploščina pod impulzom \rightarrow dolžina in smer puščice
- vlak impulzov:

$$p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

– Vzorčeni signal:

$$x^*(t) = x_z(t)p_\delta(t) =$$

$$= x_z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Upravičenost uporabe koncepta idealnega impulznega vzorčenja



- Čeprav ne more analogni vzorec katerega koli vzorčenega signala, ki ga dobimo direktno iz časovno zveznega signala, nikoli doseči ekstremne vrednosti širine ($\tau = 0$), ima ta koncept dve bistveni prednosti:
 - Če je širina pulza majhna glede na časovne konstante sistema, predstavlja impulzno vzorčenje dobro aproksimacijo in vodi k enostavnejši analizi.
 - Če analogni signal vzorčimo in pretvorimo v digitalno obliko, ga lahko smatramo kot število, ki se pojavi v določenem časovnem trenutku. Zaporedje števil, ki se pojavi v računalniku, lahko predstavlja z matematičnega stališča uteži vlaka impulzov. Ta koncept je zelo važen in ga bomo uporabljali pri nadaljnji obravnavi digitalnih signalov.

41

Digitalno vodenje

Določanje spektra vzorčenega signala (idealno impulzno vzorčenje)



- Serija c_m za vlak δ -impulzov:

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jm2\pi f_s t} dt = \frac{1}{T} e^{-jm2\pi f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

- Predstavitev vlaka impulzov $p_\delta(t)$ v obliki Fourierove vrste

$$p_\delta(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jm2\pi f_s t}$$

- Vzorčeni signal (ker $x_z(t)$ ni odvisen od m , lahko znotraj Σ):

$$x^*(t) = x_z(t) p_\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{jm2\pi f_s t}$$

- Frekvenčni spekter vzorčenega signala:

$$e^{j2\pi f_0 t} x_z(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_z(f - f_0) \Rightarrow X^*(f) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_z(f - mf_s)$$

42

Digitalno vodenje

Frekvenčni spekter vzorčnega signala (idealno impulzno vzorčenje)



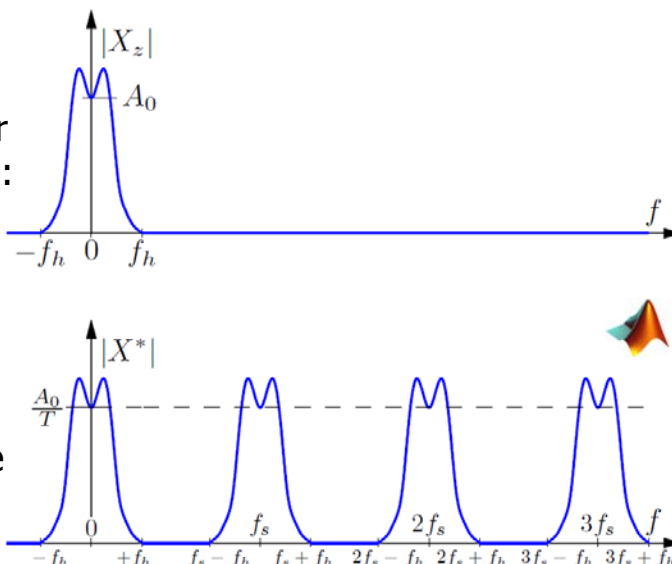
- Glede na prejšnjo enačbo spekter sestoji:
 - iz spektra originalnega signala (pomnoženega s $1/T$) in
 - iz neskončnega števila za vrednost frekvence vzorčenja in njenih mnogokratnikov premaknjenih kopij originalnega spektra (pomnoženih s $1/T$)

- Primerjava $X_z(f)$ in $X^*(f)$:

- pri nizkih frekvencah spet (ker vzorčimo z impulzi ploščine 1):

$$X^*(f) = \frac{1}{T} X_z(f) \quad |f| < \frac{f_s}{2}$$

- za razliko od vzorčenja s končnimi pulzi, spektralne komponente z višanjem frekvence ostajajo konstantne (črtkana ovojnica)



Digitalno vodenje

Idealno impulzno vzorčenje – zaključek



- Frekvenčni spekter vzorčenega signala je preslikava frekvenčnega spektra originalnega signala v neskončno število premeščenih verzij, ki pa so frekvenčnemu spektru originalnega signala proporcionalne preko konstante $\frac{1}{T}$
- **Bistveni zaključek tega poglavja je, da je spekter impulzno vzorčenega signala periodična funkcija frekvence**
- Perioda v frekvenčnem prostoru je enaka frekvenci vzorčenja f_s
- Vzorčenje v časovnem prostoru vodi torej do periodičnosti funkcije v frekvenčnem prostoru

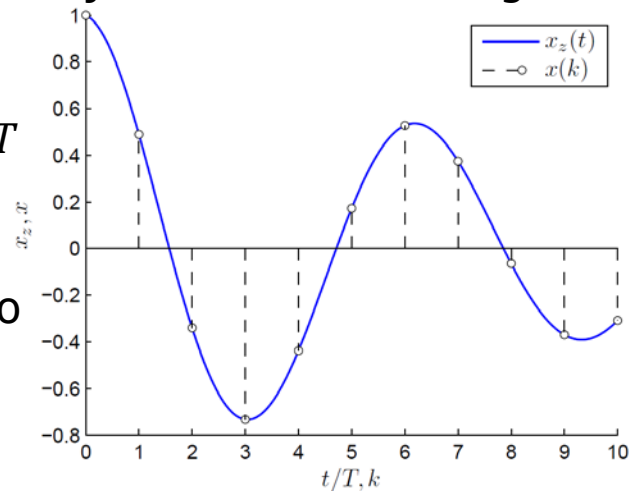
Digitalno vodenje

Vzorčeni diskretni signali



- Diskretni signal ni vedno dobljen z vzorčenjem zveznega, čeprav pri sistemih digitalnega vodenja to običajno drži
- V procesu vzorčenja zveznega signala $x_z(t)$ se v vzorčeni signal $x^*(t)$ prenese zgolj informacijo o vrednosti zveznega signala v trenutkih vzorčenja – takrat je zvezni čas t enak večkratniku periode vzorčenja T
- Vzorčeni diskretni signal $x(k)$ dobimo tako, da v zveznem signalu nadomestimo neodvisno spremenljivko t s kT :

$$x(k) = x_z(t) \Big|_{t=kT} = x_z(kT)$$



45

Teorem o vzorčenju



- Pri vzorčenih signalih ne gre prezreti dejstva, da se večino informacije na prvi pogled izgubi
- Diskretni signal nosi informacijo le o vrednosti zveznega signala v trenutkih vzorčenja, ves interval med trenutki vzorčenja pa je na videz prezrt
- Če je zvezni signal frekvenčno omejen, teorem o vzorčenju zagotavlja rekonstrukcijo signala (pod določenimi pogoji)
- Še enkrat se spomnimo spektrov vzorčenega signala – da bi lahko rekonstruirali originalni signal iz vzorčenega, se posamezne komponente spektrov ne smejo prekrivati, kar vodi do zahteve, da mora biti frekvenca vzorčenja f_s več kot dvakrat višja od najvišje frekvence f_h originalnega signala:

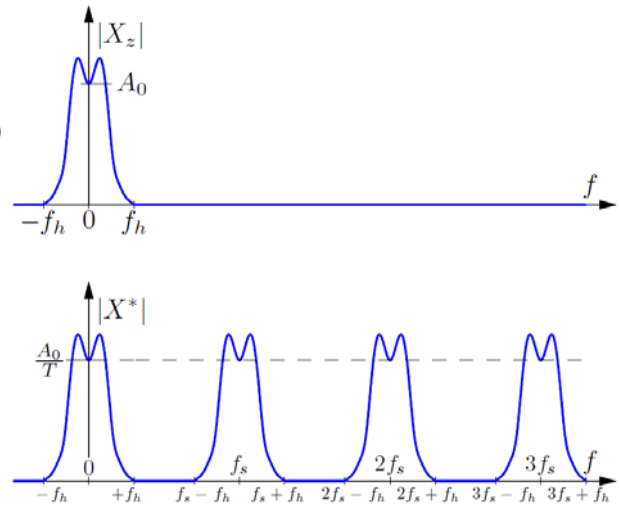
$$f_s > 2f_h$$

46

Teorem o vzorčenju



- Ali smemo dopustiti enakost $f_s = 2f_h$?
 - Potem bi se posamezni deli spektra $X^*(f)$ dotikali in ne bi mogli rekonstruirati frekvenčne vsebine pri frekvenci f_h (in vseh frekvencah, ki se od nje razlikujejo za celi mnogokratnik frekvence vzorčenja)
- Originalni signal dobimo iz vzorčenega z nizkoprepustnim filtrom, ki ima mejno frekvenco nekje med f_h in $f_s - f_h$ ter ojačenje T
- Ker idealnih filtrov ni, je potrebna rezerva med f_h in $f_s - f_h$, kar vodi do zahteve po višjih frekvencah vzorčenja



47

Nekaj osnovnih pojmov vzorčenja



- **Zgibanje** (angl. aliasing) – zaradi prenizke frekvence vzorčenja različnih signalov dobimo enak vzorčeni signal – ni mogoče določiti, iz katerega originala izhaja (več različnih frekvenc zveznega signala se v procesu vzorčenja preslika v isto)
- **Frekvenca zgibanja ali Nyquistova frekvenca:**
 - polovica frekvence vzorčenja
 - Nyquistova frekvenca je **lastnost sistema vzorčenja**
 - signal, vzorčen s sistemom vzorčenja z določeno Nyquistovo frekvenco f_0 , lahko namreč rekonstruiramo, če je originalni signal frekvenčno omejen s frekvenco f_h , ki je nižja od f_0
- **Nyquistova hitrost:**
 - dvakratna vrednost najvišje frekvence v zveznem signalu
 - Nyquistova hitrost je **lastnost frekvenčno omejenega signala**
 - zvezni signal z določeno Nyquistovo hitrostjo lahko rekonstruiramo, če je frekvenca vzorčenja višja od Nyquistove hitrosti signala

48



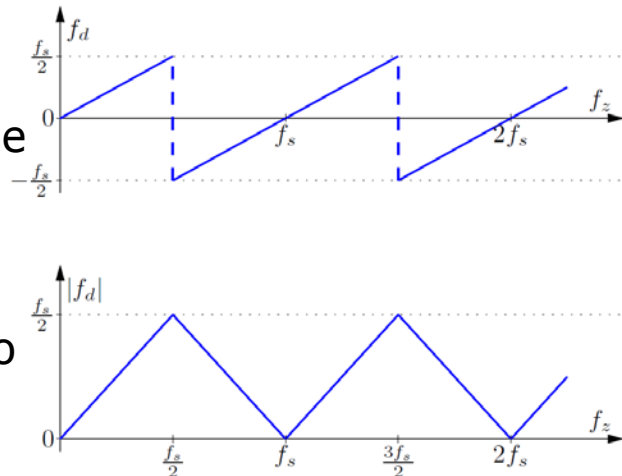
- Dan je časovno zvezni signal

$$y_z(t) = \sin 2 \pi f_z t$$

- Po vzorčenju s periodo T dobimo vzorčeni diskretni signal

$$y_d(k) = \sin 2 \pi f_z kT$$

- Zaradi efekta zgibanja obstaja neskončno frekvenc f_z , pri katerih dobimo enako zaporedje vzorcev $y_d(k)$. Iščemo tisto (označimo jo s f_d), ki je po absolutni vrednosti najmanjša – interpretiramo jo kot osnovno frekvenco diskretnega signala



Teorem o vzorčenju (Nyquist–Shannon)



- Naj bo $x_z(t)$ frekvenčno omejen zvezni signal, katerega spekter se v celoti nahaja na frekvenčnem intervalu $[0, f_h]$. Zvezni signal je popolnoma določen, če poznamo njegove vzorce $x_z(kT)$, ki si sledijo v stalnih časovnih intervalih širine T oz. so pridobljeni s frekvenco vzorčenja $f_s = \frac{1}{T}$, pri čemer mora veljati

$$f_s > 2f_h \quad \text{oz.} \quad T < \frac{1}{2f_h}$$

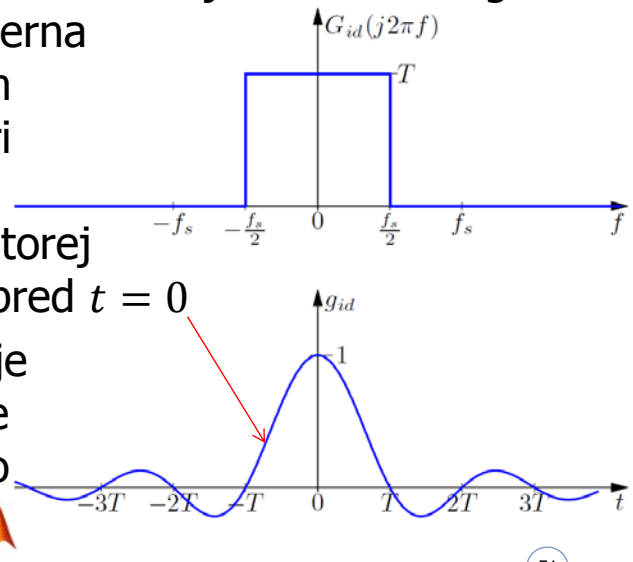
- Rekonstruirani signal $x_z(t)$ je določen z enačbo (Whittaker–Shannonovo interpolacijsko formulo)

$$x_z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT) \frac{\sin \pi f_s (t - kT)}{\pi f_s (t - kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT) \text{sinc}(f_s (t - kT))$$

Whittaker–Shannonova interpolacijska formula



- Služi za rekonstrukcijo zveznega frekvenčno omejenega signala iz njegovih vzorcev
- Formula odlično izhodišče za rekonstrukcijo vzorčenih signalov na mnogih področjih, a ni primerna za uporabo v povratnozančnem vodenju – za določitev $x_z(t)$ pri nekem t potrebujemo tudi vzorce iz prihodnosti – filter je torej nekavzalen, impulzni odziv že pred $t = 0$
- Pri sistemih vodenja se obdeluje signale v realnem času, zato se uporabljajo drugi filtri, običajno zadrževalna vezja



51

Zadrževalno vezje



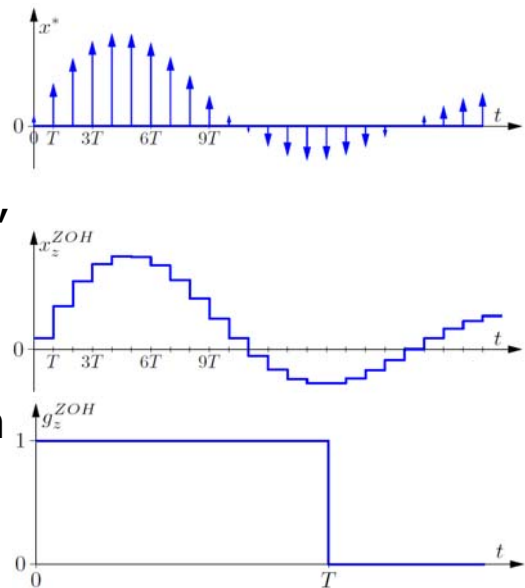
- Do sedaj smo omenili, da lahko rekonstruiramo originalni časovno zvezni signal iz njegovih vzorcev s pomočjo nizkoprepustnega filtra in spoznali teoretične zahteve za rekonstrukcijo zveznega signala iz vzorčenega
- Proces rekonstrukcije lahko izvedemo tudi s pomočjo zadrževalnega vezja, ki predstavlja neke vrste nizkoprepustni filter (razvitih je bilo več vrst zadrževalnih vezij, omejili se bomo na zadrževalno vezje ničtega reda)
- Zadrževalnik ničtega reda (angl. *zero-order hold, ZOH*) sprejme vrednost impulza na začetku intervala vzorčenja in drži njegovo vrednost do začetka naslednjega intervala
- Zadrževalnik ničtega reda je običajno sestavni del D/A pretvornika

52

Prenosna funkcija zadrževalnika 0-tega reda



- Prenosna funkcija zveznega sistema je enaka Laplaceovi transformaciji impulznega odziva sistema (odziv na $\delta(t)$)
- ZOH ima na vходу serijo neskončno ozkih in neskončno visokih impulzov
- Na izhodu ZOH je signal, ki se spremeni ob vzorčenju (na vrednost, enako površini vhodnega impulza), nato drži konstantno vrednost do konca periode vzorčenja
- Ker je impulzni odziv ZOH sestavljen iz dveh skočnih funkcij, je pren. f.



$$G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}\{g_z^{ZOH}(t)\} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

53

Frekvenčni odziv zadrževalnika ničtega reda

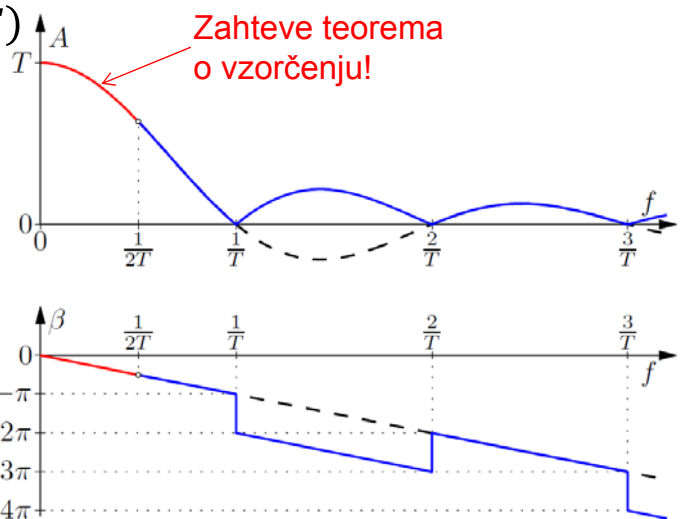


- V prenosni funkciji s nadomestimo z $j\omega$
- Amplitudni odziv $A(f)$ in fazni odziv $\beta(f)$ sta enaka:

$$A(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = T \operatorname{sinc}(fT)$$

$$\beta(f) = -\pi f T$$

- ZOH je torej tip nizkoprep. filtra z enosmernih ojač. T , zato ga lahko uporabimo pri rekonstrukciji vzorčenih sig.
- ZOH vnaša v sistem fazno zakasnitev (nizka pri NF, visoka pri VF) \rightarrow težave pri vodenju, ker znižuje fazni razloček in s tem rel. stabilnost



54



- Pri predmetu DV bomo ostali pri konceptu časa in frekvence
- Prikazali bomo štiri različice Fourierove transformacije (glede na zveznost ali diskretnost signala in/ali transformiranke)
- Pri tem bomo uporabljali naslednje oznake:
 - t – čas kot zvezna spremenljivka,
 - T – prirastek časa med dvema zaporednima vzorcema časovne f ,
 - t_p – efektivna perioda periodične časovne funkcije,
 - f – frekvenca kot zvezna spremenljivka,
 - F – prirastek frek. med zaporednima komponentama vzorčene frek. f ,
 - f_s – frekvenca vzorčenja vzorčene časovne funkcije,
 - N – število vzorcev v eni periodi (časovne ali frekvenčne) funkcije:
 - število vzorcev v območju $0 \leq t < t_p$, če je časovna f . vzorčena ($t_p = NT$)
 - število vzorcev v območju $0 \leq f < f_s$, če je frek. f . vzorčena ($f_s = NF$)

55

Štiri oblike Fourierove transformacije



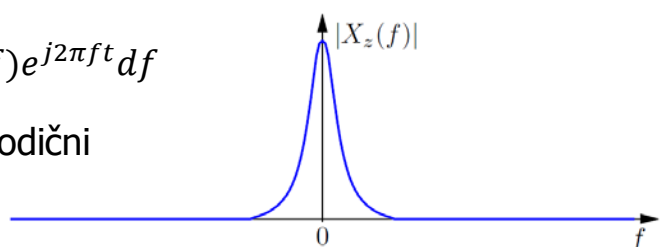
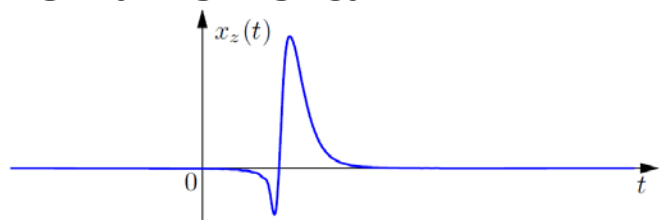
- Štiri oblike predstavitve Fourierove transformacije ustrezajo štirim kombinacijam, glede na vzorčenje časa in frekvence
- Prva oblika – **zvezni čas in zvezna frekvenca:**

- Fourierova transformacija (FT)
- zvezni spekter neperiodičnega časovnega signala
- par transformacijskih enačb:

$$X_z(f) = \mathcal{F}\{x_z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_z(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x_z(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_z(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_z(f) e^{j2\pi ft} df$$

- obe funkciji sta zvezni in neperiodični

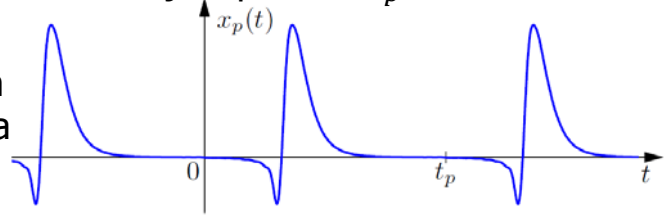


56



- Druga oblika – **zvezni čas in diskretna frekvenca:**

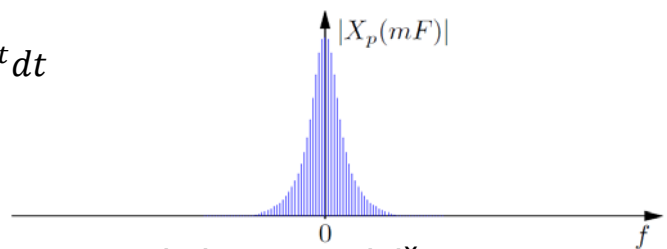
- ta oblika Fourierove transformacije se imenuje Fourierova vrsta
- $x_p(t)$ je periodična časovno zvezna funkcija s periodo t_p
- Fourierov transform je različen od 0 le pri celih mnogokratnikih frekvenčne resolucije F , zato ga lahko obravnavamo kot frek. diskretno funkcijo $X_p(mF)$



- ustrezna transformacijska para:

$$X_p(f) = F \int_{t'}^{t'+t_p} x_p(t) e^{-j2\pi m F t} dt$$

$$x_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_p(mF) e^{j2\pi m F t}$$



- integracijo po času lahko pričnemo pri poljubnem t' , dolžina t_p !

57



- Druga oblika (nad.) – **zvezni čas in diskretna frekvenca:**

- frekvenčni prirastek F med zaporednima spektralnima komponentama je povezan s periodo časovne funkcije:

$$F = \frac{1}{t_p}$$

- ker je časovna funkcija $x_p(t)$ periodična, je ustrezni transform frekvenčno diskretna funkcija
- velja tudi obratno – če vzorčimo frekvenčni spekter $X_z(f)$ in izračunamo inverzno Fourierovo transformacijo takšnega vzorčenega spektra, dobimo periodično časovno funkcijo (pri tem ni bistveno, če je originalna časovna funkcija periodična ali ne)

- **Periodična časovno zvezna funkcija ustreza frekvenčno diskretni neperiodični transformiranki**



58



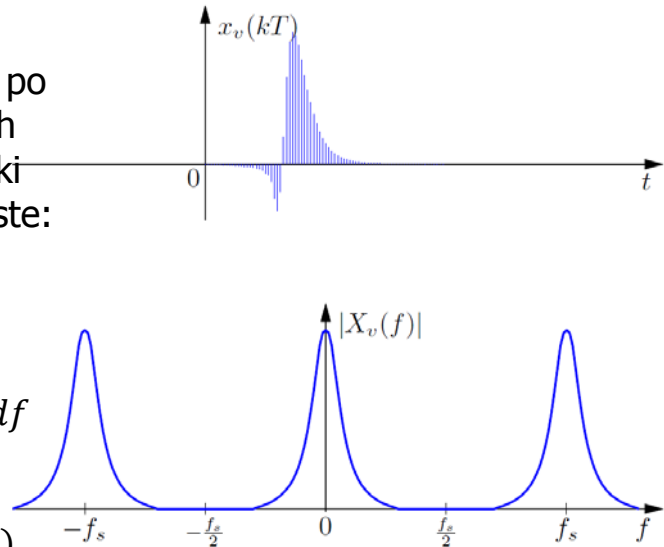
- Tretja oblika – **diskretni čas in zvezna frekvenca:**

- ta oblika zelo sorodna z-transformaciji, ki jo bomo obravnavali kasneje
- $x_v(kT)$ je predstavitev časovno diskretnega (ali vzorčenega) signala
- ustrejni transform je $X_v(f)$
- če v FT zamenjamo integracijo po času s seštevanjem po časovnih vzorcih, dobimo transformacijski par, dualen paru Fourierove vrste:

$$X_v(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_v(kT) e^{-j2\pi f k T}$$

$$x_v(t) = T \int_{f'}^{f'+f_s} X_v(f) e^{j2\pi f k T} df$$

- pomembno: integracija spet poteka preko ene periode $X_v(f)$



59



- Tretja oblika (nad.) – **diskretni čas in zvezna frekvenca:**

- časovni prirastek T med zaporednima časovnima vzorcema je povezan s periodo frekvenčne funkcije (le-ta je enaka f_s):

$$T = \frac{1}{f_s}$$

- vzorčenje časovne funkcije ima za posledico periodičnost frekvenčne funkcije
 - po isti logiki dobimo z inverzno transformacijo frekvenčno periodične funkcije časovno diskretni signal
- **Neperiodična časovno diskretna funkcija ustreza frekvenčno zvezni periodični transformiranki**



60



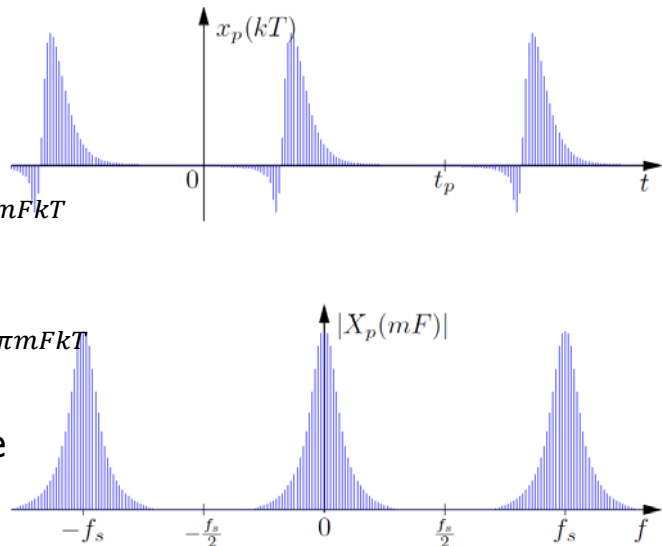
• Četrta oblika – **diskretni čas in diskretna frekvenca:**

- diskretna Fourierova transformacija oz. njena hitra različica (FFT)
- $x_d(kT)$ je predstavitev časovno diskretnega signala
- $X_d(mF)$ je ustrezna frekvenčno diskretna transformiranka
- Fourierov transformacijski par:

$$X_d(mF) = \sum_{k=k'}^{k'+N-1} x_d(kT) e^{-j2\pi mFkT}$$

$$x_d(kT) = \frac{1}{N} \sum_{m=m'}^{m'+N-1} X_d(mF) e^{j2\pi mFkT}$$

- sumacijo izračunamo preko ene periode $x_d(kT)$ oz. ene periode $X_d(mF)$



61



• Četrta oblika (nad.) – **diskretni čas in diskretna frekvenca:**

- namesto faktorjev 1 in $\frac{1}{N}$ v transformacijskih enačbah bi lahko uporabili tudi F in T , s čimer bi bili enačbi bolj konsistentni z ostalimi
- uporabimo lahko namreč poljubni števili, katerih produkt je $\frac{1}{N}$ – predlagana oblika uporabljena zaradi zgodovinskih razlogov
- ker vzorčimo časovno funkcijo, je frekvenčna funkcija periodična s periodo $f_s = NF = \frac{1}{T}$
- ker vzorčimo frekvenčno funkcijo, je časovna funkcija periodična s periodo $t_p = NT = \frac{1}{F}$

• **Periodična časovna diskretna funkcija ustreza frekvenčno diskretni periodični funkciji**

62



- V četrtni obliki Fourierove transformacije spremenimo:
 - čas vzorčenja T vsebovan implicitno, zato $x(k)$ namesto $x_d(kT)$
 - prirastek frekvence F vsebovan implicitno $\rightarrow X(m)$ namesto $X_d(mF)$
 - seštevanje po času se začne pri $k' = 0$
 - seštevanje po frekvenci se začne pri $m' = 0$
 - izraz $e^{-j2\pi mFkT}$ se poenostavi:

$$e^{-j2\pi mFkT} = (e^{-j2\pi FT})^{mk} = (e^{-j\frac{2\pi}{N}})^{mk} = W^{mk}$$

- Definicija diskretne Fourierove transformacije (DFT):

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W^{mk}$$
$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{-mk}$$

- DFT računsko dokaj zahteven algoritem (N^2 množenj), zato v praksi hitra FT (FFT), kjer je število množenj $N \cdot \log_2 N$



63

Štiri oblike Fourierove transformacije



- **Zaključki:**
 - Če je funkcija v enem prostoru (časovnem ali frekvenčnem) periodična, je ustreznim transform v drugem prostoru vzorčen, kar pomeni, da je funkcija diskretne spremenljivke
 - Velja tudi obratno: če je funkcija v enem prostoru vzorčena, postane funkcija v drugem prostoru periodična
 - Perioda v enem prostoru je vedno recipročna vrednosti prirastka med dvema zaporednima vzorcema v drugem prostoru
 - Pri numerični obdelavi je vzorčenje tako časovnih kakor tudi frekvenčnih funkcij nujno
 - Torej je četrta oblika Fourierove transformacije, ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, bistvenega pomena za digitalno obravnavo signala

64



- Z-transformacija je preslikava, ki jo uporabljamo pri diskretnih sistemih na podoben način, kot uporabljamo Laplaceovo transformacijo pri zveznih sistemih
- Matematično gledano je z-transformacija linearni operator, ki operira nad diskretnim signalom $x(k)$ in daje kot rezultat z-transformiranko $X(z)$
- Običajno zahtevamo, da je signal $x(k)$ kavzalen, kar pomeni $x(k) = 0$, če $k < 0$. Kjer ne bo eksplicitno dogovorjeno drugače, bomo predpostavili, da je signal $x(k)$ kavzalen
- Z-transformacija $X(z)$ diskretnega kavzalnega signala $x(k)$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

65



- Signal $x(k)$ mora izpolnjevati nekaj pogojev, da z-transformiranka obstaja in je enolična – ti pogoji so v glavnem povezani s konvergenco neskončne vrste za $X(z)$
- Seveda obstaja tudi inverzna z-transformacija, ki pretvori z-transformiranko nazaj v časovni prostor:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

- Simbolično lahko obe transformaciji zapišemo tudi na naslednji način:

$$x(k) \stackrel{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)$$

- Pri izračunu z-transformacije nastopa diskretni signal $x(k)$, za katerega ni nujno, da je dobljen z vzorčenjem zveznega signala, čeprav pri digitalnem vodenju to običajno drži

66



- Izhajamo iz vzorčenega signala

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)\delta(t - kT)$$

- Izvedemo Laplaceovo transformacijo zgornje enačbe:

$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)e^{-kTs}$$

- S primerjavo izrazov za $X^*(s)$ in $X(z)$ ter z upoštevanjem enačbe vzorčenja $x(k) = x_z(kT)$ lahko za vzorčene sisteme ugotovimo relacijo

$$X^*(s) = X(z) \Big|_{z=e^{sT}}$$

67



- Izračunajmo

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} \Big|_{s=j\omega} \Big|_{\omega=2\pi f} = X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi f kT}$$

- Spomnimo se Fourierove transformacije za neperiodične diskretne funkcije (3. različica FT):

$$X_v(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_v(kT)e^{-j2\pi f kT}$$

- Transformaciji sta enaki, če signal kavzalen in $x(k) = x_v(kT)$
- Zaključek: Fourierovo transformacijo za neperiodične diskretne signale vidimo kot limitni primer izračuna z-transformacije po krožnici enote ($z = e^{j2\pi fT}$)

68



- Z-transformacijo elementarnih funkcij najenostavneje izračunamo z uporabo definicije z-transformacije
- Primer: Izračun z-transformacije geometričnega zaporedja

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- Z-transformacijo izračunamo po definiciji

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

- Ta neskončna vrsta konvergira, če $|az^{-1}| < 1$ oz. $|z| > |a|$
- Konvergenčno področje vrste oz. del ravnine z , kjer $X(z)$ konvergira, v prihodnje ne bo predmet naše obravnave
- Pri iskanju z-transformirank znanih signalov se reševanje bolj ali manj zreducira na reševanje neskončnih vrst



69



	$x(k)$	$X(z)$
Teorem linearnosti	$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Teorem časovnega premika v desno	$x(k - m)$	$z^{-m}X(z)$
Teorem časovnega premika v levo	$x(k + m)$	$z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$
Teorem eksponencialnega dušenja	$a^{-k}x(k)$	$X(az)$
Teorem začetne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow 0} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Teorem končne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$
Teorem množenja s k^r	$k^r x(k)$	$(-z \frac{d}{dz})^r X(z)$
Teorem diferenciranja funkcije po parametru	$\frac{\partial}{\partial a} x(k, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
Teorem konvolucije	$\sum_{m=0}^k x(m)h(k - m)$	$X(z)H(z)$

70

Tabela z-transformacije



- Pri izračunu z-transformacije in inverzne z-transformacije si običajno pomagamo s tabelo z-transformacije
- V tabeli so pogosto uporabljeni signali, katerih z-transformacijo lahko izračunamo analitično

$x_z(t)$	$x(k) = x_z(kT)$	$\mathcal{L}\{x_z(t)\}$	$\mathcal{Z}\{x(k)\}$
	$\delta(k)$		1
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	k^2T^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
t^3	k^3T^3	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
t^n	k^nT^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$

71

Tabela z-transformacije (nadaljevanje)



e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	$kT e^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
t^2e^{-at}	$k^2T^2 e^{-akT}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2ze^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$t^n e^{at}$	$k^n T^n e^{akT}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$
$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(aT-1+e^{-aT})z^2+(1-aT)e^{-aT}-e^{-aT}z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\sin \omega_0 t$	$\sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$\cos \omega_0 t$	$\cos \omega_0 kT$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega_0 T)}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$e^{-akT} \sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$e^{-akT} \cos \omega_0 kT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$

72



- Inverzna z-transformacija preslika kompleksno funkcijo $X(z)$ v zaporedje števil $x(k)$ oziroma v niz impulzov $x^*(t)$ pri vzorčenih sistemih

- Izpeljemo jo s Cauchyjevim integralnim teoremom:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

C je krivulja, ki enkrat obkroži koordinatno izhodišče v nasprotni smeri urnega kazalca

- Definicija inverzne z-transformacije:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

C je krivulja, ki enkrat obkroži vse singularnosti funkcije $X(z)z^{k-1}$ v nasprotni smeri urnega kazalca

73



- V praksi se za izračun inverzne z-transformacije uporablja več možnosti:
 - uporaba tabel z-transformacije
 - izračun s pomočjo residualnega teorema
 - metoda parcialnih ulomkov
 - metoda deljenja
 - uporaba računalniških orodij (npr. Matlab) idr.
- Uporaba tabel z-transformacije
 - z-transformiranko je najbolj enostavno pretvoriti v časovni prostor, če v tabeli z-transformov najdemo natančno takšno transformiranko
 - takrat rešitev enostavno prepisemo iz tabele z-transformov
 - velikokrat se zgodi, da je potrebno funkcijo nekoliko prirediti, šele potem lahko uporabimo tabelo

74



- Za racionalne integrande lahko vrednost integrala izračunamo z residualnim teoremom

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum \text{Res}[X(z)z^{k-1}]$$

kjer upoštevamo vse singularnosti izraza $X(z)z^{k-1}$, ki ležijo znotraj zaključene krivulje C

- Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ l singularnih točk z_1, z_2, \dots, z_l v ravnini \mathbb{Z} oz. znotraj zaključene krivulje C , velja:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \sum_{i=1}^l \text{Res}_{z=z_i}[X(z)z^{k-1}]$$

75



- Iščemo singularnosti funkcije v oglatem oklepaju:
 - v primeru racionalne funkcije $X(z)$ so to poli funkcije $X(z)$
 - lahko pa se pojavi dodaten pol pri $z = 0$ (zaradi z^{k-1}), če funkcija $X(z)$ nima ničle pri $z = 0$
 - za vse pole moramo ugotoviti, katere stopnje so – lahko gre za enostavne (enkratne) ali večkratne pole

- Če ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ enostavni pol v $z = z_i$, je residuum:

$$\text{Res}_{z=z_i}[X(z)z^{k-1}] = \lim_{z \rightarrow z_i} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)]$$

- Če pa ima funkcija $X(z)z^{k-1}$ m -kratni pol v $z = z_i$, velja:

$$\text{Res}_{z=z_i}[X(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)^m]$$

- Ker časovni signal kavzalen ($x(k) = 0$ za $k < 0$), ni potrebno računati residua pri $z = 0$, če ima $X(z)$ vsaj eno ničlo v $z = 0$

76

Metoda parcialnih ulomkov



- Pri tej metodi je postopek podoben kot pri računanju inverzne Laplaceove transformacije z metodo parcialnih ulomkov
- Pomembna razlika je, da je potrebno na parcialne ulomke razcepiti funkcijo $\frac{X(z)}{z}$ (pri Laplaceovi transformaciji $X(s)$)
- Nadaljevanje je zelo podobno:
 - Če imamo realne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 1, npr. $\frac{k_1}{z-0,4}$
 - Če imamo večkratne pole, dobimo več pripadajočih parcialnih ulomkov – od reda 1 do reda večkratnega pola, npr. $\frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{(z-1)^2}$
 - Če imamo konjugirano kompleksne enojne pole, jih ne razcepimo do enojnih polov, pač pa uporabimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 2, red števca pa 1, npr. $\frac{az+b}{z^2+z+1}$

77

Metoda deljenja



- Metoda posebno primerna za primere, ki nimajo enostavnih rešitev v zaključeni obliki
- Z deljenjem števca racionalne funkcije z njenim imenovalcem dobimo potenčno vrsto za z :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots$$

- Na prav tak način definirana z -transformacija diskretnega signala oz. zaporedja, zato vrednosti iskanega zaporedja oz. signala ob času k dobimo iz faktorjev pri z^{-k} :

$$x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1 \quad x(2) = x_2 \quad \dots$$

- Polinom v števcu $X(z)$ torej delimo s polinomom v imenovalcu
- V večini primerov se postopek nikoli ne konča in dobimo neskončno vrsto po negativnih potencah z

78



- Pri optimizaciji se pogosto pojavijo kriterijske funkcije v obliki vsote kvadratov diskretnega signala:

$$S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x^2(k)$$

- Z uporabo definicije inv. z-transformacije lahko izraz zapišemo

$$S^2 = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz$$

- Po zamenjavi integracije in sumacije in upoštevanju definicije z-transformacije dobimo eno od oblik Parsevalovega teorema

$$S^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) X(z^{-1}) z^{-1} dz$$



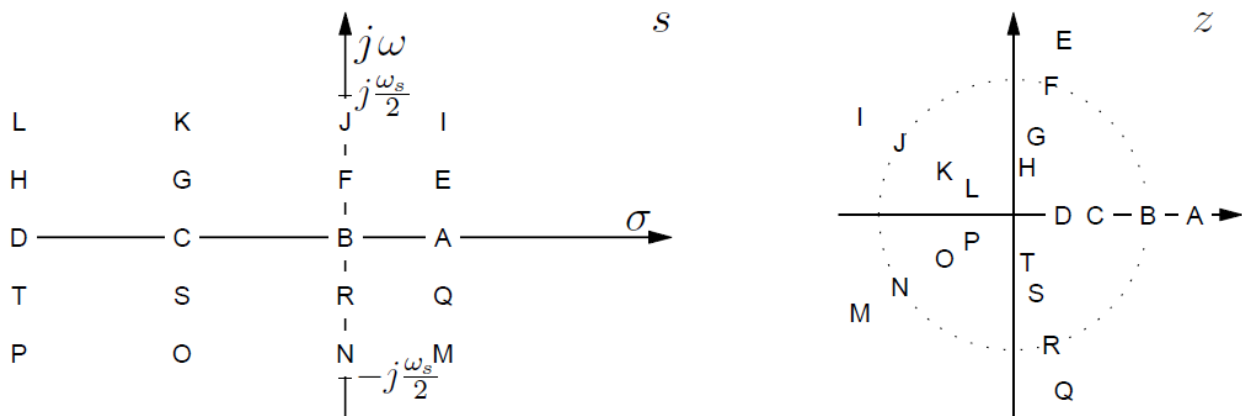
- Časovno obnašanje zveznih regulacijskih sistemov lahko opišemo z lokacijo polov v kompleksni ravnini s :
 - poli na realni osi – eksponencialno padajoči oz. naraščajoči odzivi
 - konjugirano kompleksni poli – oscilatorni odzivi s pozitivnim oz. negativnim dušenjem
- Z-transformacija definira odvisnost med točkami v ravnini s in točkami v ravnini z :

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

- Absolutna vrednost in argument (faza) kompl. števila z sta

$$|z| = e^{\sigma T} \quad \text{in} \quad \arg z = \angle z = \omega T$$

- Vsaki točki v ravnini s odgovarja v ravnini z točka:
 - katere amplituda $|z|$ je določena z realnim delom točke s
 - katere faza $\arg z = \angle z$ je določena z imaginarnim delom točke s



- Sredina določene črke predstavlja izvorno točko v ravnini s oz. njeno preslikavo v ravnini z
- Pikčasta krivulja je krožnica enote



- Koordinatno izhodišče ravnine s se preslika v točko:

$$z = e^{sT} \Big|_{s=0} = e^{0 \cdot T} = 1 + j0$$

- Imaginarna os ravnine s se preslika v krožnico enote:

$$z = e^{sT} \Big|_{s=0+j\omega} = e^{0 \cdot T} e^{j\omega T} = 1 \cdot e^{j\omega T}$$

$$|z| = 1 \quad \text{in} \quad \arg z = \omega T \in (-\infty, \infty)$$

- Daljica na imaginarni osi $[-j\frac{\omega_s}{2}, j\frac{\omega_s}{2}]$ se prav tako preslika v krožnico enote, krajišči daljice se preslikata v isto točko:

$$z = e^{sT} \Big|_{s=j\frac{\omega_s}{2}} = e^{j\frac{\omega_s}{2}T} = e^{j\frac{2\pi f_s T}{2}} = e^{j\frac{2\pi}{2T}T} = e^{j\pi} = -1 + j0$$

$$z = e^{sT} \Big|_{s=-j\frac{\omega_s}{2}} = e^{-j\frac{\omega_s}{2}T} = e^{-j\frac{2\pi f_s T}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{2T}T} = e^{-j\pi} = -1 + j0$$

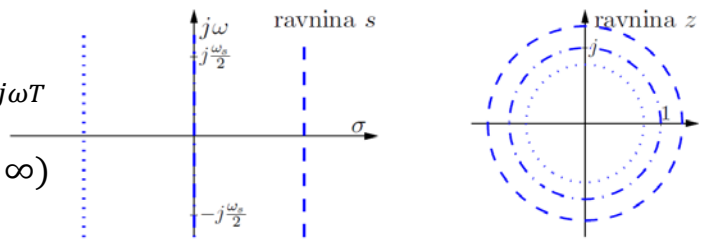
Preslikava nekaterih tipičnih točk in krivulj



- Krivulje konstantnega relativnega časa umiritve $s = \sigma_c + j\omega$ (σ_c konstanten, ω se spreminja od $-\infty$ do ∞) se preslikajo v krožnice s polmerom $e^{\sigma_c T}$:

$$z = e^{sT} \Big|_{s=\sigma_c+j\omega} = e^{(\sigma_c+j\omega)T} = e^{\sigma_c T} e^{j\omega T}$$

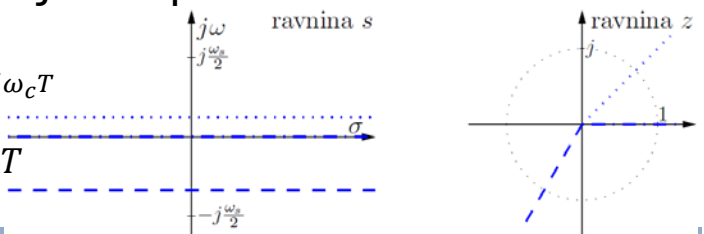
$$|z| = e^{\sigma_c T} \quad \text{in} \quad \arg z = \omega T \in (-\infty, \infty)$$



- Krivulje konstantne frekvence $s = \sigma + j\omega_c$ (ω_c konstanten, σ se spreminja od $-\infty$ do ∞) se preslikajo v poltrake (izhodišče v $z = 0$, kot med njimi in pozitivnim delom realne osi je enak $\omega_c T$):

$$z = e^{sT} \Big|_{s=\sigma+j\omega_c} = e^{(\sigma+j\omega_c)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega_c T}$$

$$|z| = e^{\sigma T} \in (0, \infty) \quad \text{in} \quad \arg z = \omega_c T$$



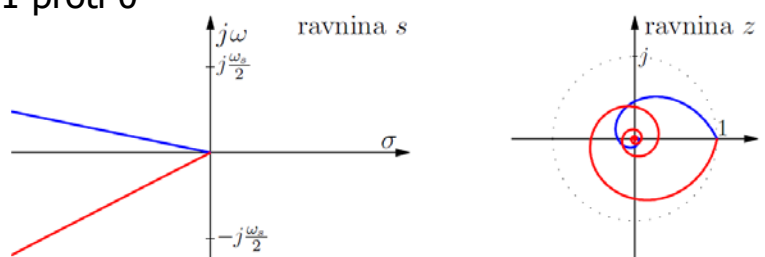
Preslikava nekaterih tipičnih točk in krivulj



- Krivulje konstantnega relativnega koeficienta dušenja $s = \omega_n \left(-\zeta_c + j\sqrt{1 - \zeta_c^2} \right)$, kjer je $0 \leq \zeta_c \leq 1$ konstanten, ω_n pa se spreminja od 0 do ∞ , se preslikajo v spiralo v ravnini z :

$$z = e^{sT} \Big|_{s=\left(-\zeta_c+j\sqrt{1-\zeta_c^2}\right)\omega_n} = e^{\left(-\zeta_c+j\sqrt{1-\zeta_c^2}\right)\omega_n T} = e^{-\zeta_c \omega_n T} e^{j\omega_n T \sqrt{1-\zeta_c^2}}$$

- $\arg z = \omega_n T \sqrt{1 - \zeta_c^2} \rightarrow$ raste od 0 proti ∞
- $|z| = e^{-\zeta_c \omega_n T} \rightarrow$ pada od 1 proti 0
- $\ln|z|$ in $\arg z$ naraščata linearno z ω_n , zato je to logaritmična spirala
- Parameter spirale je ω_n



Preslikava $s \rightarrow z$ ni injektivna!



- V eno točko v ravnini z se namreč preslika več (pravzaprav neskončno) točk iz ravnine s . Če namreč velja, da se točka s_0 preslika v točko z_0 , potem se v to točko preslika tudi množica točk $s_0 + jl\omega_s$ ($l \in \mathbb{Z}$), ki so glede na točko s_0 premaknjene za cel imaginarni mnogokratnik frekvence vzorčenja:

$$e^{sT} \Big|_{s=s_0} = e^{s_0 T} = z_0$$

$$e^{sT} \Big|_{s=s_0 + jl\omega_s} = e^{s_0 T} e^{jl\omega_s T} = z_0 e^{jl \frac{2\pi}{T} T} = z_0 e^{j2\pi l} = z_0$$

- V ravnini s običajno prikazujemo ničle in pole zveznega sistema
- Če podobno analiziramo signale (Laplaceove transformirane), je zgornja ugotovitev nov pogled na zgibanje frekvenc in teorem o vzorčenju – vse frekvence signala, ki se razlikujejo za mnogokratnik frekvence vzorčenja, se preslikajo v isto frekvenco v diskretnem prostoru, zato rekonstrukcija originalnega signala ni mogoča

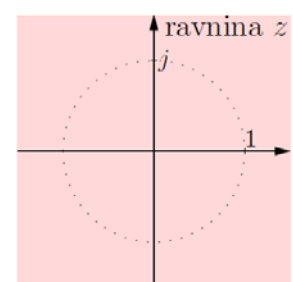
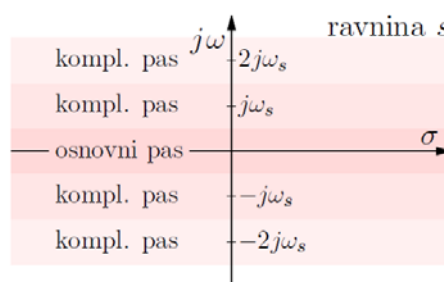
85

Osnovni pas v ravnini s



- **Osnovni pas** je pas v ravnini s , ki ga navzgor in navzdol omejujeta premici $j\omega = j\frac{\omega_s}{2}$ in $j\omega = -j\frac{\omega_s}{2}$ (na levi sliki je prikazan s temno barvo)
- Zaprto področje osnovnega pasu v ravnini s (tisto, ki vključuje tudi njegov rob) se preslika v celotno področje ravnine z
- Kot vemo, se tudi vsaka množica, ki je premaknjena za cel imaginarni mnogokratnik frekvence vzorčenja, preslika v isto področje – torej celotno ravnino z

- Tem premaknjenim pasovom pravimo **komplementarni pasovi**

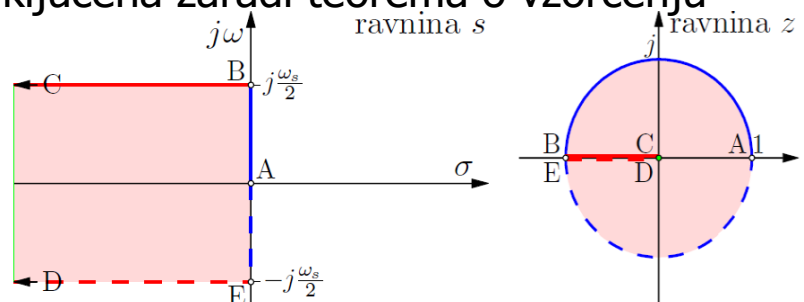


86

Lega polov stabilnega sistema



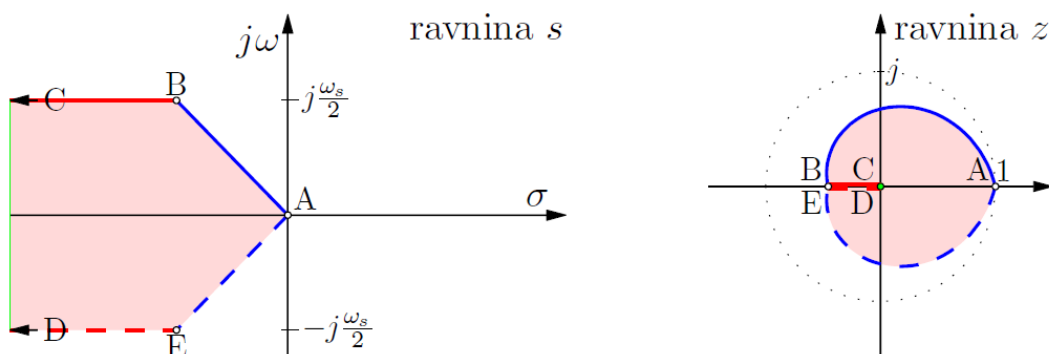
- Da pri vzorčenju ne prihaja do zgibanja frekvenc, morajo vsi poli zveznega sistema ležati v osnovnem pasu ravnine s
- Pri sistemih vodenja nas običajno zanimajo stabilni sistemi
- Obe zahtevi definirata področje ravnine s , ki je omejeno s poltrakoma $s = \sigma \pm j \frac{\omega_s}{2}$ ($\sigma \in (-\infty, 0]$) in daljico $[-j \frac{\omega_s}{2}, j \frac{\omega_s}{2}]$
- Zaprto področje (rob vključen) se preslika v zaprt krog enote
- Rdeča poltraka nista vključena zaradi teorema o vzorčenju
- Odprto področje se preslika v notranjost kroga enote, ki mu manjka rdeča daljica na neg. realni osi



Želena lega polov sistemov vodenja



- Pri načrtovanju vodenja je še posebej zanimivo podpodročje osnovnega pasu, kjer ležijo poli sistema z rel. dušenjem večjim od ζ_c (mejo prikazujeta modri daljici v ravnini s)
- Pripadajočo lego polov diskretnega sistema prikazuje rožnata površina v ravnini z , kjer pa zaradi zahtev teorema o vzorč. spet ni vključena rdeča daljica BC (ki spet sovpada z ED)





- Diferenčna enačba je enačba, ki povezuje različne vzorce iskanega zaporedja $y(k)$ z vzorci danega zaporedja $u(k)$
- Diferenčne enačbe delimo glede na:
 - linearnost – linearne in nelinearne
 - časovno spremenljivost – s konstantnimi in s spremenljivimi koeficienti
- Pri naši obravnavi se bomo omejili na linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti:
$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0u(k+n) + \dots + b_nu(k)$$
- Zgornja diferenčna enačba definira relacijo med vzorci $y(k)$, $y(k+1)$, ... in $y(k+n)$ iskanega zaporedja $y(k)$
- Razliko med največjim in najmanjšim indeksom zaporedja y v enačbi imenujemo red diferenčne enačbe – zgoraj je enak n



- Podobno kot pri reševanju diferencialnih enačb, dobimo tudi pri reševanju diferencnih enačb najprej splošno rešitev, ki predstavlja neskončno družino zaporedij
- Če hočemo dobiti partikularno rešitev diferencne enačbe n -tega reda, je potrebno podati n začetnih pogojev
- Idealno je, če so podane vrednosti zaporedja v prvih n vzorcih:
$$y(0), y(1), \dots, y(n-1)$$
- Obstajajo metode za neposredno reševanje diferencnih enačb
- Pri tem predmetu se bomo omejili le na reševanje s pomočjo z -transformacije



- Na prejšnji diferenčni enačbi izvedemo z-transformacijo in večkrat upoštevamo teorem časovnega premika v levo:

$$\begin{aligned} & z^n Y(z) - y(0)z^n - y(1)z^{n-1} - \dots - y(n-1)z + \\ & + a_1[z^{n-1}Y(z) - y(0)z^{n-1} - y(1)z^{n-2} - \dots - y(n-2)z] + \dots + \\ & \quad + a_n Y(z) = \\ & = b_0[z^n U(z) - u(0)z^n - u(1)z^{n-1} - \dots - u(n-1)z] + \\ & + b_1[z^{n-1}U(z) - u(0)z^{n-1} - u(1)z^{n-2} - \dots - u(n-2)z] + \dots + \\ & \quad + b_n U(z) \end{aligned}$$

- Enačba izgleda precej komplicirano, a edina neznana veličina v njej je z-transformiranka $Y(z)$:
 - iz enačbe izrazimo $Y(z)$
 - izvedemo inverzno z-transformacijo, s čimer pridemo do iskanega zaporedja $y(k)$

91

Diskretna prenosna funkcija



- Izkaže se, da je mogoče linearni časovno nespremenljivi diskretni sistem n -tega reda modelirati z linearno diferenčno enačbo n -tega reda s konstantnimi koeficienti
- Spoznali bomo, da takšno diferenčno enačbo dobimo tudi z diskretizacijo linearnega časovno nespremenljivega zveznega sistema n -tega reda
- Obravnava linearnih časovno nespremenljivih sistemov je pri diskretnih sistemih zelo podobna kot pri zveznih:
 - če namreč izhajamo iz diferenčne enačbe, pri kateri $u(k)$ interpretiramo kot vhodno zaporedje v sistem, $y(k)$ pa kot izhodno zaporedje, lahko definiramo tudi diskretno prenosno funkcijo $G(z)$
 - dobimo jo, če v z-transformaciji diferenčne enačbe, ki opisuje vhodno-izhodno obnašanje sistema, postavimo vse začetne pogoje na 0

92



- Po izvedbi z-transformacije nad diferenčno enačbo upoštevamo, da so začetni pogoji enaki 0:

$$y(0) = 0, y(1) = 0, \dots, y(n-1) = 0, \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(n-1) = 0$$

- Enačba v prostoru spremenljivke z se zelo poenostavi:

$$z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) = \\ = b_0 z^n U(z) + b_1 z^{n-1} U(z) + \dots + b_n U(z)$$

- Iz enačbe izrazimo kvocient $\frac{Y(z)}{U(z)}$, imenujemo ga prenosna f.:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

- Izračun odziva sistema s prenosno funkcijo $G(z)$:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\mathcal{Z}\{u(k)\}\}$$

93

Impulzni odziv diskretnega sistema



- Impulzni odziv diskretnega sistema je odziv sistema na vhodno funkcijo $u(k) = \delta(k)$, ki je definirana kot:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- Splošni odziv diskretnega sistema se izračuna po enačbi:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\mathcal{Z}\{u(k)\}\}$$

- Ker je $\mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$, izračunamo impulzni odziv diskretnega sistema (označimo ga s $h(k)$), ki ga opisuje prenosna funkcija $G(z)$, na naslednji način:

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}$$

94



- Linearni časovno nespremenljivi sistem naj ima impulzni odziv $h(k)$:
 - to pomeni, da povzroči enotin impulz pri $k = 0$ odziv $h(k)$
 - zakasnen impulz $\delta(k - m)$ povzroči zakasnen odziv $h(k - m)$
- Vhodni signal diskretnega sistema si lahko predstavljamo kot vlak impulzov, kjer ima vsak impulz ustrezno vrednost
- Vhod v sistem in odziv sistema lahko zato predstavimo kot:

$$\begin{array}{rcl} u(0)\delta(k) & \rightarrow & u(0)h(k) \\ u(1)\delta(k - 1) & \rightarrow & u(1)h(k - 1) \\ u(2)\delta(k - 2) & \rightarrow & u(2)h(k - 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(m)\delta(k - m) & \rightarrow & u(m)h(k - m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$



- Signal oz. vlak impulzov $u(k)$ lahko dobimo s seštevanjem vseh vrstic (ki predstavljajo posamezne pulze) na levi strani:

$$u(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m)\delta(k - m)$$

- Zaradi linearnosti sistema dobimo odziv sistema $y(k)$ s seštevanjem posameznih odzivov na desni strani puščic:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m)h(k - m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)u(k - m)$$

- Druga enakost velja zaradi komutativnosti konvolucije
- Ker sta tako $h(k)$ kot $u(k)$ kavzalna, velja $h(k - m) = 0$ in $u(k - m) = 0$ za $m > k$, zato lahko nadomestimo zgornjo mejo seštevanja v enačbah konvolucije s k





- Prostor stanj (PS) omogoča alternativni zapis dinamičnega sistema zapisoma z diferencialno enačbo ali s prenosno funkcijo
- Prednost tega zapisa pred zapisom v obliki prenosnih funkcij je, da je možno opisati tudi obnašanje nelinearnih sistemov in časovno spremenljivih sistemov
- Dobra lastnost tega zapisa je tudi, da je veliko konceptov (kot npr. vodljivost, spoznavnost, regulator stanj ipd.) mogoče praktično identično obravnavati pri časovno zveznih in časovno diskretnih sistemih
- Zato si na začetku osvežimo znanje o obravnavi zveznih sistemov v prostoru stanj

97



- V splošnem je zapis *nelinearnega časovno spremenljivega zveznega sistema* v prostoru stanj naslednji:
$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t), t)$$
$$y_z(t) = g_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t), t)$$
 - vektorska nelinearna preslikava $\mathbf{f}_z: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 - skalarna nelinearna preslikava $g_z: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - prva enačba se imenuje *enačba stanj*, druga pa je *izhodna enačba*
- Če eksplisitne odvisnosti obeh funkcij od časa ni, govorimo o *nelinearnem časovno nespremenljivem sistemu*:
$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \mathbf{f}_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t))$$
$$y_z(t) = g_z(\mathbf{x}_z(t), u_z(t))$$
- Obravnava nelinearnih sistemov je zahtevna, zato sistem pogosto lineariziramo v ravnovesni točki sistema ($\dot{\mathbf{x}}_z = \mathbf{0}$)

98



- *Linearni časovno nespremenljivi sistem* opišemo z linearnim sistemom enačb (s konstantnimi koeficienti) v prostoru stanj:

$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z u_z(t)$$

$$y_z(t) = \mathbf{c}_z^T \mathbf{x}_z(t) + d_z u_z(t)$$

- *sistemska matrika* \mathbf{A}_z je kvadratna matrika dimenzije $n \times n$
 - *vhodni vektor* \mathbf{b}_z je stolpni vektor dimenzije n
 - *izhodni vektor* \mathbf{c}_z^T je vrstični vektor dimenzije n
 - vhodno-izhodna konstanta d_z je skalar
- Četrta možnost – sistem *linearen, a časovno spremenljiv* – v prejšnjem zapisu se spremeni le to, da postanejo matrike \mathbf{A}_z , \mathbf{b}_z , \mathbf{c}_z^T in d časovno spremenljive oz. odvisne od časa:

$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \mathbf{A}_z(t) \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z(t) u_z(t)$$

$$y_z(t) = \mathbf{c}_z^T(t) \mathbf{x}_z(t) + d_z(t) u_z(t)$$

99



- Vektor stanj $\mathbf{x}_z(t)$ podaja trenutno stanje sistema – v zgoščeni obliki dobimo informacijo, kaj se s sistemom dogaja
- V vseh zapisih, ki smo jih obravnavali, podaja stanje sistema $\mathbf{x}_z(t_0)$ informacijo, ki skupaj s poznavanjem vhodnega signala $u_z(t)$ za $t \geq t_0$ zadošča za natančno poznavanje odziva sistema v prihodnosti
- Lahko rečemo, da poznavanje stanja sistema v vsakem trenutku nadomešča poznavanje dogajanja v preteklosti, če nas zanima le napoved prihodnjega obnašanja sistema
- Zapis sistema v prostoru stanj na zelo ekspliciten način podaja dinamiko sistema, saj govori enačba stanj neposredno o spreminjanju vektorja stanj v prihodnosti

100



- Na analogen način kot zvezne sisteme lahko v prostoru stanj obravnavamo tudi diskretne sisteme
- V splošnem je zapis *nelinearnega časovno spremenljivega sistema* v prostoru stanj naslednji:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k), k)$$

$$y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k), k)$$

- vektorska nelinearna preslikava $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
- skalarna nelinearna preslikava $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- prva enačba se imenuje *enačba stanj*, druga pa je *izhodna enačba*
- Če eksplisitne odvisnosti obeh funkcij od časa ni, govorimo o *nelinearnem časovno nespremenljivem sistemu*:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k))$$

$$y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k))$$

101



- Obravnava nelinearnih sistemov zahtevna → sistem pogosto lineariziramo v ravnovesni točki sistema ($\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$)
- *Linearni časovno nespremenljivi sistem* opišemo z linearnim sistemom enačb (s konstantnimi koeficienti) v prostoru stanj:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k)$$

- *sistemska matrika* \mathbf{A} je kvadratna matrika dimenzije $n \times n$
- *vhodni vektor* \mathbf{b} je stolpni vektor dimenzije n
- *izhodni vektor* \mathbf{c}^T je vrstični vektor dimenzije n
- Če se dinamika linearne sistema spreminja s časom, pravimo, da je sistem *linearen časovno spremenljiv*:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(k)u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k) + d(k)u(k)$$

102



- Vektor stanj $\mathbf{x}(k)$ podaja trenutno stanje sistema – v zgoščeni obliki dobimo informacijo, kaj se s sistemom dogaja
- V vseh zapisih, ki smo jih obravnavali, podaja stanje sistema $\mathbf{x}(k_0)$ informacijo, ki skupaj s poznavanjem vhodnega signala $u(k)$ za $k \geq k_0$ zadošča za natančno poznavanje odziva sistema v prihodnosti
- Lahko rečemo, da poznavanje stanja sistema v vsakem trenutku nadomešča poznavanje dogajanja v preteklosti, če nas zanima le napoved prihodnjega obnašanja sistema
- Zapis sistema v prostoru stanj na zelo ekspliciten način podaja dinamiko sistema, saj govori enačba stanj neposredno o spreminjanju vektorja stanj v prihodnosti

103



- Zapis diskretnih sistemov v prostoru stanj je zelo primeren za kasnejšo simulacijo tovrstnih sistemov
- Edini dinamični element v tem zapisu je namreč predikcija vektorja stanj za trenutek $k + 1$
- Za bločno oz. simulacijsko shemo tovrstnega sistema torej potrebujemo zakasnilni blok (v elektronskih vezjih je to flip-flop D), ki ima prenosno funkcijo z^{-1}
- Zakasnilni blok z^{-1} tako predstavlja osrednji blok simulacijskih shem diskretnih sistemov (podobno kot je bil pri zveznih sistemih integrator s prenosno funkcijo $1/s$)
- Zapis v prostoru stanj omogoča relativno enostavno simulacijo tako nelinearnih kot časovno spremenljivih sistemov

104

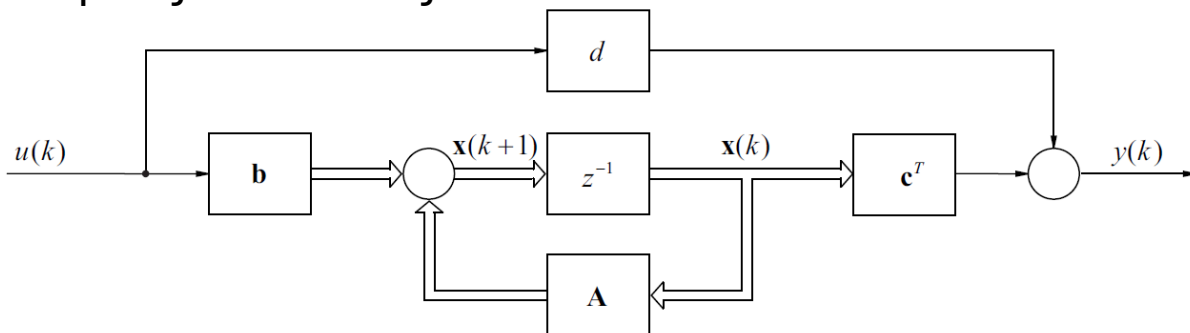


- Vzemimo primer linearnega časovno nespremenljivega sistema, ki je zapisan v prostoru stanj:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k)$$

- Pripadajoča simulacijska shema:



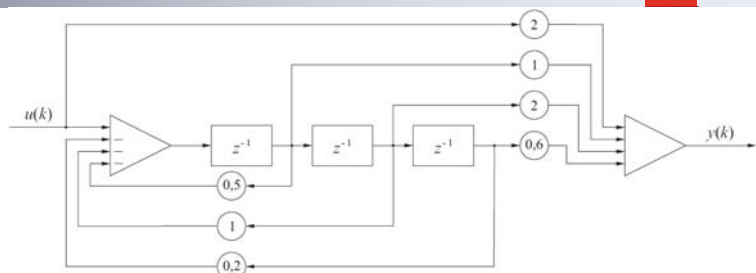
- Iz zgornje slike: Stanja diskretnega sistema lahko interpretiramo kot izhode zakasnilnih oz. pomnilnih blokov!

105

Primer



- V diskretnem sistemu so stanja izhodi zakasnilnih blokov (z^{-1})
- Če nas zanima vhodno-izhodno obnašanje sistema, oštevilčenje stanj ni pomembno – pri nas $x_1(k)$ izhod desnega zakasnilnega bloka, $x_2(k)$ srednjega, $x_3(k)$ pa levega. Signal na vhodu zakasnilnega bloka je seveda enokoračna predikcija signala na izhodu:



$$x_1(k + 1) = x_2(k)$$

$$x_2(k + 1) = x_3(k)$$

$$x_3(k + 1) = -0,2x_1(k) - x_2(k) - 0,5x_3(k) + u(k)$$

$$y(k) = 0,6x_1(k) + 2x_2(k)$$

$$+ x_3(k) + 2u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k + 1) \\ x_2(k + 1) \\ x_3(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,2 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0,6 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 2u(k)$$

106



- Kot smo že omenili, lahko večino diskretnih sistemov opišemo z diferenčnimi enačbami
- Tipični linearni časovno nespremenljivi sistem z enim vhomom in enim izhodom lahko opišemo z linearno diferenčno enačbo s konstantnimi koeficienti:

$$\begin{aligned}y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) &= \\ &= b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \dots + b_nu(k)\end{aligned}$$

- y – izhod sistema, u – vhod v sistem, a_i in b_i – konstantni koeficienti
- Pogosto bolj primerno opisati obnašanje takega sistema z n diferenčnimi enačbami 1. reda namesto z eno diferenčno enačbo reda n – teh n enačb prvega reda lahko potem zapišemo kot eno vektorsko matrično diferenčno enačbo, ki jo imenujemo zapis sistema v prostoru stanj

107



- Če uporabimo kot vhodni signal v zgornji sistem znano zaporedje $u(k)$ ($k \geq 0$) in želimo določiti odziv sistema za $k \geq 0$, to lahko storimo, če poznamo n zaporednih vrednosti izhoda sistema
- Tem n zaporednim vrednostim smo pri reševanju diferenčnih enačb rekli začetni pogoj, pri obravnavi v prostoru stanj pa stanje sistema
- Bolj splošno – **stanje sistema je minimalna količina informacije, potrebna za določitev obnašanja sistema v prihodnosti, če sta podana vhodno zaporedje in diferenčna enačba sistema**
- V sistemu, ki ga opisuje diferenčna enačba n -tega reda, torej za določitev stanja potrebujemo n spremenljivk, npr. n zaporednih vrednosti izhoda sistema y
- Stanje diskretnega sistema lahko predstavimo kot točko v n -dimenzionalnem Evklidskem prostoru (prostor stanj ali fazni prostor):
 - obstaja več množic z n spremenljivkami, ki opisujejo stanje sistema
 - stanje mogoče zapisati tudi z več kot n spremenljivkami (redundantno)
 - stanja ni mogoče opisati z manj kot n spremenljivkami

108



- Diskretni sistem drugega reda zapišimo v prostoru stanj:

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = b_2u(k)$$

- Diferenčno enačbo 2. reda nadomestimo z dvema enačbama 1. reda. Naj bosta stanji $x_1(k) = y(k)$ in $x_2(k) = y(k+1)$:

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = -a_2y(k) - a_1y(k+1) + b_2u(k) = -a_2x_1(k) - a_1x_2(k) + b_2u(k)$$

- Enačbi stanj lahko zapišemo v vektorsko-matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k)$$

- Izhodna spremenljivka sistema $y(k)$:

$$y(k) = x_1(k) \quad \text{oz. matrično} \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Splošen zapis diskretnega sistema brez ničel



- Če sistem nima ničel ($b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$), definiramo:

$$x_1(k) = y(k), x_2(k) = y(k+1), \dots, x_n(k) = y(k+n-1)$$

- Tako dobimo n diferenčnih enačb prvega reda:

$$- x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$\vdots$$

$$- x_{n-1}(k+1) = y(k+n-1) = x_n(k)$$

$$- x_n(k+1) = y(k+n) = -a_nx_1(k) - \dots - a_1x_n(k) + b_nu(k)$$

- Enačba stanj v vektorsko-matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(k)$$

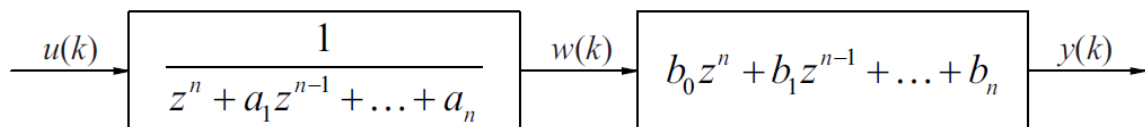
- Izhodna enačba:

$$y(k) = x_1(k) \quad \text{oz.} \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Splošen zapis diskretnega sistema z ničlami



- Če prenosna funkcija sistema vsebuje ničle (vsaj en koeficient $b_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, je različen od 0), ne moremo uporabiti opisane metode, kajti za realizacijo bi potrebovali tudi vhodni signal v trenutkih $k + 1, k + 2$ itd.
- Zato ločimo števec in imenovalc prenosne funkcije in opišemo sistem z naslednjo bločno shemo:



- Diferenčno enačbo, ki opisuje prvi blok, lahko po znanem postopku opišemo s spremenljivkami stanja $x_1(k) = w(k), x_2(k) = w(k + 1)$ itd. (v vektorju \mathbf{x} imamo 1 namesto b_n)

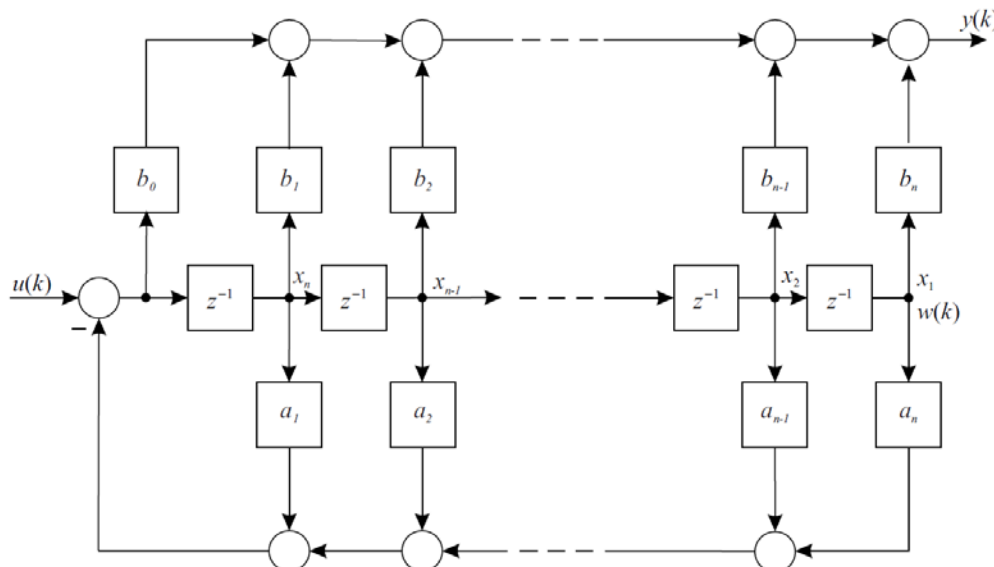
111

Splošen zapis diskretnega sistema z ničlami



- Drugi blok podaja izhod sistema v odvisnosti od stanj:

$$y(k) = b_0 w(k + n) + b_1 w(k + n - 1) + \dots + b_n w(k) = b_0 x_n(k + 1) + b_1 x_n(k) + \dots + b_n x_1(k) = b_0 x_n(k + 1) + [b_n \dots b_1] \mathbf{x}(k)$$



112



- Prejšnji zapis je ustrezen za grafično ponazoritev sistema, ne gre pa za »pravi« zapis sistema v prostoru stanj, ker je $y(k)$ odvisen od $x_n(k + 1)$

- Če vnesemo $x_n(k + 1)$ iz enačbe prvega bloka, dobimo:

$$y(k) = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \dots \quad b_1 - b_0 a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

- Izhodna matrika diskretnega sistema je torej:

$$\mathbf{c}^T = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \dots \quad b_1 - b_0 a_1]$$

- Vhodno-izhodna konstanta diskretnega sistema pa je:

$$d = b_0$$

- Pogosto $b_0 = 0$ in posledično $\mathbf{c}^T = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1]$

113



- Homogeni sistemi so sistemi brez zunanje vzbujačje – odziv je zgolj posledica začetnega stanja sistema

- Vzemimo linearni homogeni diskretni sistem:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

- Če je podano začetno stanje diskretnega sistema $\mathbf{x}(0)$, lahko izračunamo stanje v naslednjih trenutkih:

$$- \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0)$$

$$- \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)$$

- Z metodo popolne indukcije lahko dokažemo, da je splošna rešitev homogene diferenčne enačbe:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$$

114



- Matriko \mathbf{A}^k imenujemo diskretna matrika prehajanja stanj
- To je matrika, ki daje pri homogenih diskretnih sistemih vektor spremenljivk stanja pri poljubnem k , če jo uporabimo kot operator nad vektorjem spremenljivk stanja pri $k = 0$
- Diskretne matrike prehajanja stanj seveda ni potrebno računati z ročnim množenjem matrik \mathbf{A} , kar bi pri velikih k zahtevalo veliko časa in je numerično problematično, pač pa lahko njeno vrednost določimo eksaktno s teoretičnimi postopki
- Obravnavali bomo le metodo inverzne z-transformacije, s katero na enostaven način izračunamo diskretno matriko prehajanja stanj (postopek je kljub svoji enostavnosti še vedno zamuden)

115



- Izhajamo iz enačbe stanj linearnega homogenega sistema:
$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$
- Izvedemo z-transformacijo enačbe stanj in dobimo:
$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z)$$
$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0)$$
$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}(0)$$
- Nato izvedemo inverzno z-transformacijo zadnje enačbe
$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\}\mathbf{x}(0)$$
in rezultat primerjamo z enačbo odziva homogenega sistema
$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$
- S tem dobimo formulo za izračun diskretne matrike prehajanja stanj:
$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\}$$

116



- Določite odziv stanja homogenega diskretnega sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Najprej moramo izračunati matriko $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{4}{25} & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-\frac{1}{5})(z-\frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix}$$

- Inverzna z-transformacija matrike $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$:

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k & \frac{5}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^k - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k \\ -\frac{4}{15}\left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^k & \frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^k - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k \end{bmatrix}$$

- Odziv stanja homogenega diskretnega sistema je torej:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k \\ -\frac{4}{15}\left(\frac{4}{5}\right)^k + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0$$



117

Odziv diskretnega sistema z zunanjim vzbujanjem



- Enačba stanj podaja vektor stanj rekurzivno
- Če enačbo izvajamo koračno, pridemo do eksplicitne rešitve
- Najprej izračunajmo vektor spremenljivk stanja za $k = 1$:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0)$$

- Ob času $k = 2$ dobimo:

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1)$$

- Če prejšnji enačbi združimo, dobimo:

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1)$$

- Z metodo matematične indukcije dobimo splošno rešitev za odziv stanja nehomogenega linearnega diskretnega sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b}u(j)$$

118



- Iz enačbe

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j)$$

vidimo, da je odziv vektorja stanj sestavljen iz odziva na začetno stanje $\mathbf{x}(0)$ in odziva na vzbujanje $u(k)$

- Drugi člen desne strani te enačbe (odziv na vzbujanje) je vektorska oblika konvolucijske vsote
- Izhod sistema dobimo iz stanja s pomočjo izhodne enačbe:

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j) + d u(k)$$

119



- Odziv sistema na vzbujanje $u(k)$, če $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$:

$$y(k) = \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j) + d u(k)$$

- Sedaj predpostavimo, da vzbujamo z $u(k) = \delta(k)$
- Računamo impulzni odziv $h(k)$. Ugotovimo lahko:
 - Če $k < 0$, v prvem členu nič ne seštevamo (zgornja meja $k - 1 < 0$), drugi člen pa je prav tako enak 0 ($u(k) = \delta(k) = 0$), zato $h(k) = 0$
 - Če $k = 0$, v prvem členu nič ne seštevamo (zgornja meja $k - 1 < 0$), drugi člen pa je enak d ($u(k) = \delta(k) = 1$), zato $h(k) = d$
 - Če $k > 0$, v sumaciji ostane le člen z $j = 0$ ($u(j) = \delta(j) = 1$), drugi člen pa je enak 0 ($u(k) = \delta(k) = 0$), zato $h(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}$

- Povzetek:
$$h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ d & k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & k > 0 \end{cases}$$

120



- Če nas zanima le odziv na vzbujanje, ga lahko poiščemo tudi s pomočjo z-transformacije enačbe stanj, s čimer se izognemo računanju konvolucijske vsote:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z)$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}U(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z)$$

- Ker iščemo le vsiljeni odziv sistema, smo upoštevali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$
- Spet torej potrebujemo matriko $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, ki jo množimo z vektorjem \mathbf{b} in z-transformacijo vzbujalnega signala, nakar produkt z inverzno z-transformacijo pretvorimo v časovni prostor, s čimer pridemo do iskanega odziva $\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z)\}$$

121

Določanje odziva diskretnega sistema



- Kadar nas zanima odziv sistema, kjer je prisotno tako zunanje vzbujanje kot tudi od nič različno začetno stanje:
 - Prva možnost – posebej izračunamo oba odziva – zaradi linearnosti sistema velja princip superpozicije in končni odziv je vsota prispevkov obeh posamičnih odzivov

- Druga možnost pa je, da enačbo stanj

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

obravnavamo kot običajno diferenčno enačbo, ki jo rešimo s pomočjo pretvorbe v z-prostor:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z)$$

Iz slednje enačbe izpeljemo $\mathbf{X}(z)$, nad katerim izvršimo inverzno z-transformacijo, s čimer pridemo do odziva vektorja stanj na začetno stanje in zunanje vzbujanje:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{X}(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[z\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}U(z)]\}$$

122



- Izračunajmo prenosno funkcijo diskretnega sistema z enim vhodom in enim izhodom, zapisanega v prostoru stanj
- Izvedemo z-transformacijo enačb zapisa v PS in upoštevamo ničelne začetne pogoje ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$) ter dobimo:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{c}^T\mathbf{X}(z) + dU(z)$$

- $U(z)$ je z-transformacija vhoda v sistem
- $Y(z)$ je z-transformacija izhoda sistema
- vektor $\mathbf{X}(z)$ je z-transformacija vektorja spremenljivk stanja sistema
- Če izrazimo $\mathbf{X}(z)$ iz prve enačbe in ga vstavimo v drugo enačbo ter izračunamo kvocient med z-transformacijama izhoda in vhoda v sistem, dobimo prenosno funkcijo sistema

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H(z) = \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$$



123



- Diskretni sistem je v ravnovesnem stanju, ko je stanje v trenutku $k + 1$ enako stanju v trenutku k :

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{x}(k)$$

- V primeru homogenega sistema to pomeni:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) \quad \text{oz.} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$$

- Glede na zgornjo enačbo, je v primeru nesingularnosti matrike $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ edino ravnovesno stanje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- To ravnovesno stanje je lahko stabilno ali ne (odvisno od \mathbf{A})
- Če diskretni sistem ima konstantno zunanje vzbujanje \bar{u} , lahko določimo ravnovesno stanje diskretnega sistema iz:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\bar{u} = \bar{\mathbf{x}}$$

- Če je $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ nesingularna matrika, je rešitev te enačbe:

$$\bar{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}$$



124



- Za *stabilni linearni časovno nespremenljivi sistem* je značilno, da se na *harmonično vzbujanje po preteku prehodnega pojava* odzove s harmoničnim nihanjem izhodnega signala, pri čemer sta *frekvenci vhodnega in izhodnega nihanja enaki* (ta lastnost velja tako za zvezne kot tudi za diskretne sisteme)
- Da bi obravnavani koncept imel smisel, mora biti diskretni sistem absolutno stabilen, t.j. vsi poli njegove prenosne funkcije morajo ležati znotraj kroga enote
- V tem primeru odziv na začetno stanje s časom izzveni, ustaljeni odziv sistema pa je vzorčeni harmonični signal
- Zato je za poznavanje ustaljenega odziva potrebno določiti le amplitudo in fazo izhodnega signala

125



- V nadaljevanju bomo zaradi lažje obravnave predpostavili kompleksne oblike signalov (običajno predpostavimo, da je realni signal, ki ga dejansko uporabimo, realna komponenta kompleksnega signala)
- Diskretni sistem opisuje prenosna funkcija $H(z)$
- Vzbujalni signal:
$$u(k) = U_0 e^{j(\omega kT + \varphi_u)}$$
 - ω krožna frekvenca, $U_0 \geq 0$ amplituda, φ_u faza vhodne sinusoide
- Izhod sistema v ustaljenem stanju:
$$y(k) = Y_0 e^{j(\omega kT + \varphi_y)}$$
 - ω krožna frekvenca, $Y_0 \geq 0$ amplituda, φ_y faza izhodne sinusoide

126



- $Y(z) = U(z)H(z) = \frac{zU_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z)$
- $y(k)$ dobimo z inverzna z-transformacijo $Y(z)$:
$$y(k) = \sum_{i=1}^l \text{Res}_{z=z_i} [Y(z)z^{k-1}] = \sum_{i=1}^l \text{Res}_{z=z_i} \left[\frac{z^k U_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z) \right]$$
- Izraz v oglatih oklepajih ima residuum pri $z = e^{j\omega T}$ in residue v vseh singularnostih oz. polih prenosne funkcije $H(z)$
- Vsi poli funkcije $H(z)$ ležijo znotraj kroga enote, **zato pripadajoči residui s časom izzvenijo**
- Odziv sistema v ustaljenem stanju odvisen le od residuuma pri $z = e^{j\omega T}$:

$$y(k) = \text{Res}_{z=e^{j\omega T}} \left[\frac{z^k U_0 e^{j\varphi_u}}{z - e^{j\omega T}} H(z) \right] = [H(z)U_0 z^k e^{j\varphi_u}] \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$



- Če $y(k) = H(e^{j\omega T})U_0 e^{j(\omega k T + \varphi_u)}$ primerjam z začetno definicijo, dobim:

$$Y_0 e^{j\varphi_y} = H(e^{j\omega T})U_0 e^{j\varphi_u}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y_0}{U_0} e^{j(\varphi_y - \varphi_u)}$$

- Zadnja enačba je zapis kompleksnega števila $H(e^{j\omega T})$ v polarnih koordinatah:

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{Y_0}{U_0} \text{ in } \angle H(e^{j\omega T}) = \varphi_y - \varphi_u$$

- absolutni del funkcije $H(e^{j\omega T})$ določa razmerje amplitud izhodnega in vhodnega signala pri vzbujalni frekvenci ω
- fazni kot funkcije $H(e^{j\omega T})$ določa fazni zaostanek izhodnega signala za vhodnim pri vzbujalni frekvenci ω



- *Frekvenčni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{H}(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}$
- *Amplitudni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{A}(\omega) = |\mathcal{H}(\omega)|$
- *Fazni odziv diskretnega sistema* $\mathcal{B}(\omega) = \angle \mathcal{H}(\omega)$
- Frekvenčni odziv diskretnega sistema najlaže dobimo z upoštevanjem prenosne funkcije sistema $H(z)$:

$$\mathcal{H}(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|e^{j\angle[H(e^{j\omega T})]}$$

- Koncept frekvenčnega odziva je seveda znan tudi iz obravnave zveznih dinamičnih sistemov:

$$\mathcal{H}_z(\omega) = G_z(s)|_{s=j\omega} = G_z(j\omega)$$

- Formuli za izračun diskretnega in zveznega frekvenčnega odziva sorodni preko znane povezave $z = e^{sT}$

129



- Pomen frekvenčnega odziva za izračun odziva diskretnega sistema na harmonično vzbujanje:

$$u(k) = U_0 \sin \omega k T$$

- Odziv $y(k)$ v **ustaljenem stanju** izračunamo iz frekvenčnega odziva $\mathcal{H}(\omega)$ s pomočjo naslednje formule:

$$y(k) = U_0 |\mathcal{H}(\omega)| \sin\{\omega k T + \angle[\mathcal{H}(\omega)]\}$$

- Spomnimo se na omejitve frekvenčnega območja diskretnega sistema:

$$|\omega| < \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi f_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$
$$|\omega T| < \pi$$

- Primeri – analitično



130



- Včasih imenujemo tudi diskretizacija zveznih sistemov
- Problematičen postopek, saj pri njem zgublamo informacijo
- Iz sistemov, kjer poznamo vhode in izhode v vsakem časovnem trenutku, dobimo sisteme, kjer lahko opišemo obnašanje le v diskretnih časovnih trenutkih
- Diskretni sistem nima informacije o tem, kaj se v sistemu dogaja med trenutki vzorčenja (določene lastnosti zveznega sistema potrebno predpostaviti, zato obstaja precej postopkov za diskretizacijo, ki temeljijo na drugačnih predpostavkah o obnašanju sistema med trenutki vzorčenja)
- Iščemo transformacijo \mathcal{D} , ki zvezni din. sistem \mathcal{S}_z preslika v diskretni sistem \mathcal{S} , kar lahko simbolično prikažemo:

$$\mathcal{S}_z \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{S}$$

131

Delitev metod za diskretizacijo



- **Metode prilagajanja frekvenčnega odziva**, pri katerih iščemo diskretni sistem, ki ima podoben frekvenčni odziv kot zvezni sistem (iščemo racionalni približek funkcije $s = \frac{1}{T} \ln z$)
- **Metode prilagajanja časovnega odziva**, kjer iščemo diskretni sistem, ki ima v točkah vzorčenja enak odziv kot zvezni sistem, če ga vzbujamo z določeno vrsto signalov
- **Metode ekvivalence z zadrževalnikom**, kjer iščemo diskretni sistem, ki se obnaša enako kot zvezni, kateremu med trenutkoma vzorčenja zadržimo vrednost vhodnega signala, izhod pa opazujemo le v trenutkih vzorčenja
- **Metoda preslikave polov in ničel**, pri kateri pretvorimo zvezne pole v diskretne po posebni formuli

132



- Izbor metode je zelo odvisen od namena diskretizacije
- Če diskretiziramo **zvezni proces**, ki ga želimo regulirati z diskretnim regulatorjem, je običajno idealna izbira metoda *stopnične invariance* oz. *metoda ekvivalence z zadrževalnikom ničtega reda*, saj je zadrževalno vezje na vhodu procesa zelo dober model dejanskega digitalno-analognega (D/A) pretvornika (zelo podobne rezultate dobimo ob uporabi metode preslikave polov in ničel)
- Če želimo realizirati **digitalni filter** ali diskretizirati **zvezni regulator**, pa primerjamo frekvenčna odziva in določimo, da se frekvenčna odziva zveznega in diskretnega sistema natančno ujemata pri mejni frekvenci filtra – uporabimo eno od *metod prilagajanja frekvenčnega odziva*

133

Metoda preslikave polov in ničel



- Pri tej metodi pretvorimo zvezne pole p_i in ničle z_i v diskretne pole π_i in ničle ζ_i po naslednji enačbi
$$\pi_i = e^{p_i T} \quad (i = 1, 2, \dots, n_z)$$
$$\zeta_i = e^{z_i T} \quad (i = 1, 2, \dots, m_z), \quad \zeta_i = -1 \quad (i = m_z + 1, \dots, n_z - 1)$$
 - T je čas vzorčenja, n_z število polov zveznega sistema, m_z pa število ničel zveznega sistema
 - Diskretni sistem ima torej $n_d = n_z$ polov in $m_d = n_d - 1$ ničel
- Zgornja formula se uporablja le za pretvorbo končnih ničel; zvezne ničle, ki se nahajajo v neskončnosti, premaknemo (vse razen ene) v točko $z = -1$:
 - Če bi pretvorili neskončne zvezne ničle v neskončne diskretne ničle, bi umetno ustvarili časovno zakasnitev, kar je seveda nesmiselno
 - Ena diskretna ničla ostane v neskončnosti, sicer bi imel diskretni sistem neposredno povezavo z vhoda na izhod

134



- Zvezni sistem $G_z(s)$ diskretiziramo po tej metodi tako, da v prenosni funkciji sistema $G_z(s)$ kompleksno spremenljivko s nadomestimo z neko funkcijo kompleksne spremenljivke z
- Med s in z velja transcendentna povezava $s = \frac{1}{T} \ln z$:
 - Če bi v zvezni sistem vstavili zgornji izraz, bi dobili diskretno prenosno funkcijo, ki ne bi bila racionalna funkcija spremenljivke z
 - Bistveno omejene možnosti analize tovrstnega sistema
 - Funkcija $\ln z$ je mnogolična za kompleksne vrednosti argumenta
- Ideja metod, ki temeljijo na prilagajanju frekvenčnega odziva, je, da poiščemo racionalni približek enačbe $s = \frac{1}{T} \ln z$, čeprav se zavedamo, da je približek lahko zadovoljiv le na določenem frekvenčnem področju

135



- Problem diskretizacije zveznih sistemov smo torej prevedli na problem iskanja racionalnih približkov funkcije
- $$L(z) = \ln z$$
- Obravnavali bomo tri približke te funkcije, zanimala pa nas bo podobnost z originalno funkcijo v okolici $z = 1$ (oziroma $s = 0$). Tri najbolj enostavni racionalni približki so:

$$L_1(z) = z - 1 \quad L_2(z) = \frac{z-1}{z} \quad L_3(z) = 2 \frac{z-1}{z+1}$$

- Pri primerjavi kakovosti približkov funkcije $L(z)$ si bomo pomagali z razvojem funkcije v Taylorjevo vrsto
- Poljubno gladko funkcijo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog poljubne točke (v našem primeru razvijemo funkcijo $\ln z$ okrog $z = 1$):

$$L(z) = \ln z = L(z) \Big|_{z=1} + \frac{dL(z)}{dz} \Big|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2!} \frac{d^2L(z)}{dz^2} \Big|_{z=1} (z-1)^2 + \dots$$

136

Iskanje približka logaritemske funkcije



- Dve funkciji enaki, če imata enak razvoj v Taylorjevo vrsto
- Če nimata enakega razvoja v Taylorjevo vrsto, stopnja podobnosti narašča z večanjem števila enakih prvih členov
- Členi pri razvoju v Taylorjevo vrsto so neposredno odvisni od vrednosti odvodov funkcije v delovni točki

- Tabela prikazuje vrednosti $L(z)$, $L_1(z)$, $L_2(z)$ in $L_3(z)$ ter njihovih prvih treh odvodov:

$F(z)$	$\ln z$	$z - 1$	$\frac{z-1}{z}$	$2 \frac{z-1}{z+1}$
$\lim_{z \rightarrow 1} F(z)$	0	0	0	0
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} F(z)$	1	1	1	1
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} F(z)$	-1	0	-2	-1
$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^3}{dz^3} F(z)$	2	0	6	1,5

- Vse štiri funkcije imajo enako vrednost funkcije in 1. odvoda
- 2. odvoda enaka pri $L(z)$ in $L_3(z)$
- Vrednost 3. odvoda različna
- $L_3(z) = 2 \frac{z-1}{z+1}$ najboljši približek $\ln(z)$

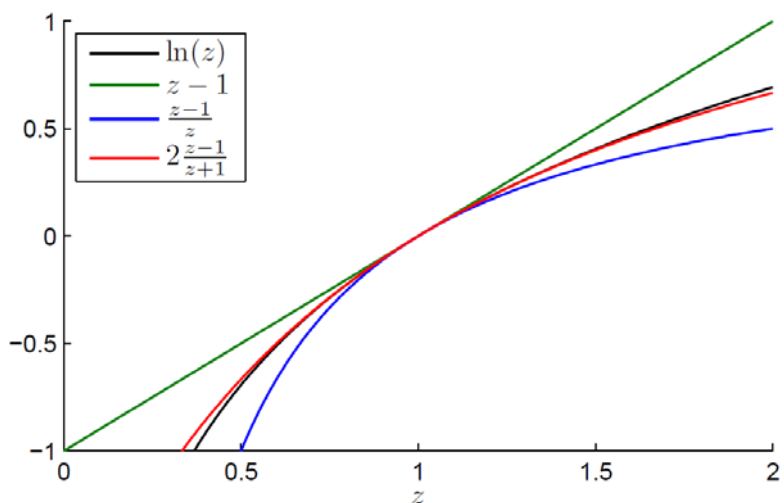
137

Tri približki logaritemske funkcije



Grafična primerjava treh približkov $\ln z$ za realno vrednost kompleksne spremenljivke z v okolici točke $z = 1$:

- Vsi tri približki imajo enako vrednost in enak 1. odvod pri $z = 1$, zato imajo isto tangento v tej točki
- Samo $L_3(z)$ ima pravo vrednost 2. odvoda, zato ima rdeča krivulja pri $z = 0$ enako ukrivljenost kot črna, zelena krivulja ima premajhno, modra pa preveliko ukrivljenost



138

Tri približki za substitucijo s



- Tri približki funkcije $\ln z$ dajo tri približke za funkcijo $s = \frac{1}{T} \ln z$:
 - $s_1 = \frac{z-1}{T}$
 - $s_2 = \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}$
 - $s_3 = \frac{2z-1}{Tz+1}$
- Spremenljivko s lahko interpretiramo kot operator odvajanja, zato prva dva približka predstavimo tudi v tej luči:
 - $\{ \dot{y} \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sY(s) \} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{y(k+1)-y(k)}{T} \stackrel{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{z-1}{T} Y(z) \right\} \rightarrow \text{metoda prvih diferenc}$
 - $\{ \dot{y} \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sY(s) \} \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \frac{y(k)-y(k-1)}{T} \stackrel{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1-z^{-1}}{T} \right\} \rightarrow \text{metoda zadnjih diferenc}$
- Tretjo metodo imenujemo *Tustinovo pravilo*, zaradi matematične oblike pa včasih tudi *bilinearna transformacija*

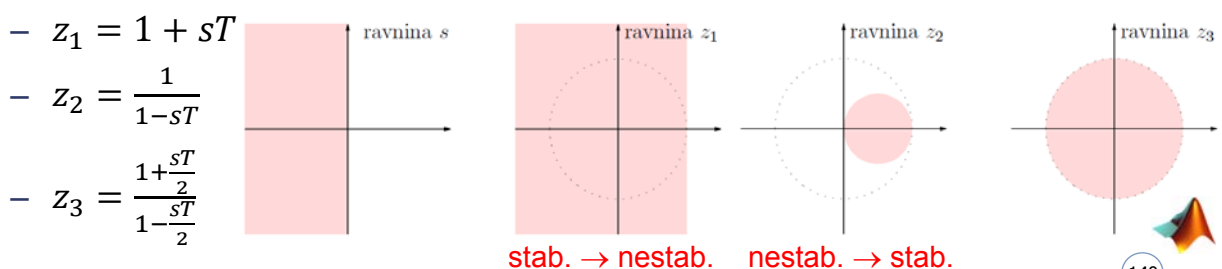
139

Metode za prilagajanje frekvenčnega odziva



- Diskretni ekvivalent $H(z)$ zvezne prenosne funkcije $G_z(s)$ je:

$$H(z) = G_z(s) \Big|_{s=s_i} \quad i = 1,2,3$$
- Preslikava odprte leve polravnine ravnine s (torej področja stabilnih polov) v ravnino z :
 - Transcedentna preslikava $z = e^{sT}$ odprto levo polravnino ravnine s preslika v notranjost kroga enote
 - To pričakujemo tudi od metode za diskretizacijo (zvezni stabilni \rightarrow disk. stabilni, zvezni nestabilni \rightarrow diskretni nestabilni)



140



$$H(z) = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}$$

- V splošnem odziva prvotne zvezne in rezultirajoče diskretne prenosne funkcije na poljubni vhodni signal nista enaka
- Dobra mera za popačenje zaradi diskretizacije je razlika med frekvenčnima odzivoma ene in druge prenosne funkcije:

- Frekvenčni odziv $G_z(s)$ je $H_z(\omega) = G_z(j\omega)$
- Frekvenčni odziv rezultirajoče diskretne prenosne funkcije:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G_z(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G_z \left(\frac{2 e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1} \right)$$

- Upoštevamo še formulo :

$$\operatorname{tg} x = j \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{e^{jx} + e^{-jx}} \Rightarrow H(\omega) = G_z \left(\frac{2 e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{j\frac{\omega T}{2}}} \right) = G_z \left(j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right)$$

141

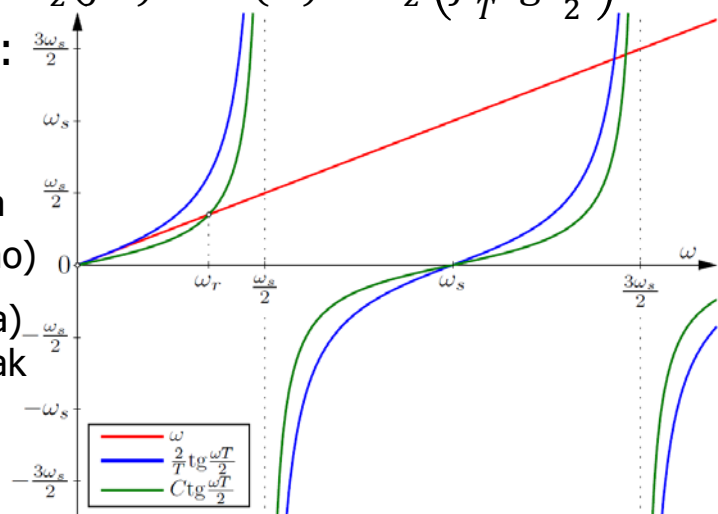
Enakost zveznega in diskretnega frekvenčnega odziva



- Idealno bi bilo, če $H_z(\omega) = G_z(j\omega)$ in $H(\omega) = G_z \left(j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right)$

enaka pri vseh frekvencah:

- Frekvenčna odziva enaka, ko argumenta $G_z(\cdot)$ enaka
- Primerjamo torej argumenta ω in $\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ (j lahko opustimo)
- Obe funkciji (rdeča in modra) imata enako vrednost in enak 1. odvod pri $\omega = 0$, zato se oba frekvenčna odziva ujemata pri nizkih frekvencah
- Žal presečišče modre in rdeče krivulje pri $\omega = 0$ edino presečišče pri frekvencah pod $\frac{\omega_s}{2}$ (višje frekvence pri diskretizaciji nimajo smisla zaradi zahtev teorema o vzorčenju)



142

Pojav izkrivljenja frekvenc



Pojav izkrivljenja frekvenc (angl. frequency warping) izhaja iz:

$$H(\omega) = H_z\left(\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}\right)$$

- Diskretni sistem ima pri ω enak frekvenčni odziv kot zvezni pri $\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$
- V postopku diskretizacije zveznega sistema pride torej do popačenja frekvenčnega odziva, ko se diskretni sistem pri določeni frekvenci ω obnaša enako kot zvezni sistem pri neki višji frekvenci ($\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} > \omega$):
 - Dokler so frekvence veliko nižje od Nyquistove frekvence $\frac{\omega_s}{2}$, so ta popačenja razmeroma majhna
 - Ko se frekvenca približuje $\frac{\omega_s}{2}$, popačenja drastično narastejo
- Celoten frekvenčni odziv zveznega sistema (na frekvenčnem intervalu od 0 do ∞) se v izkrivljeni obliki preslika v frekvenčni odziv diskretnega sistema (na frekvenčnem intervalu od 0 do $\frac{\omega_s}{2}$)
- Nad Nyquistovo frekvenco $\frac{\omega_s}{2}$ seveda pride do zgibanja frekvenc



143

Metoda predkrivljenja frekvenc



- Včasih (običajno pri načrtovanju digitalnih filtrov) želimo ujemanje frekvenčnih odzivov zveznega in diskretnega sistema pri poljubni frekvenci ω_r (običajno pri mejni frekvenci nizkoprepustnega ali visokoprepustnega filtra ali pa pri centralni frekvenci pasovnoprepustnega filtra)
- V tem primeru znižamo modro funkcijo, da se seka z rdečo funkcijo ravno pri želeni frekvenci ($\frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \rightarrow C \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$)
- Določimo C , da se rdeča in zelena krivulja sekata pri ω_r :
$$C \operatorname{tg} \frac{\omega_r T}{2} = \omega_r \Rightarrow C = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T}{2} = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s}$$
- Prišli smo do splošnejše oblike bilinearne transformacije

$$H(z) = G_z(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}}$$

144

Metoda predkrivljenja frekvenc



- Konstanta C namesto konstante $\frac{2}{T}$ pri Tustinovem pravilu
- Preslikavo imenujemo tudi bilinearna transformacija s predkrivljenjem frekvenc (angl. *pre-warping, bilinear transformation with pre-warping*)
- Ime izhaja iz dejstva, da želimo s transformacijo izničiti vpliv pojava izkrivljenja frekvenc, kar seveda lahko storimo le pri eni neničelni frekvenci
- Tudi metoda predkrivljenja frekvenc preslika levo polovico ravnine s v krog enote
- Rdeča in zelena krivulja se sekata pri frekvencah $\omega = 0$ in $\omega = \omega_r \rightarrow$ tudi frekvenčna odziva zveznega sistema in diskretnega sistema se ujemata pri teh dveh frekvencah



145

Metode prilagajanja časovnega odziva



- Metode prilagajanja frekvenčnega odziva temeljijo na podobnosti frekvenčnih odzivov zveznega sistema in njegovega diskretnega ekvivalenta
- Pri metodah prilagajanja časovnega odziva pa diskretizacijo zveznih sistemov temeljimo na primerjavi časovnih odzivov obeh sistemov
- Doseči namreč želimo enakost odzivov na določeno vrsto vzbujanja – obstaja več metod, ki se delijo glede na vrsto vhodnega vzbujanja – v praksi daleč najbolj uporabljana metoda stopnične invariance, ki daje diskretni sistem, katerega odziv na stopničasti vhodni signal se v trenutkih vzorčenja povsem sklada z odzivom zveznega sistema

146



- Diskretiziramo zvezni sistem $G_z(s)$
- Diskretni ekvivalent $H(z)$ dobimo po metodi stopnične invariance z izenačenjem odzivov v trenutkih vzorčenja:

$$y^s(k) = y_z^s(t)|_{t=kT}$$

- $y_z^s(t)$ je odziv zveznega sistema $G_z(s)$ na enotino stopnico:

$$y_z^s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_z(s)\right\}$$

- $y^s(k)$ je odziv diskretnega sistema $H(z)$ na enotino stopnico

$$y^s(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}H(z)\right\}$$

- Enakost v trenutkih vzorčenja:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}H(z)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G_z(s)\right\}\Big|_{t=kT}$$

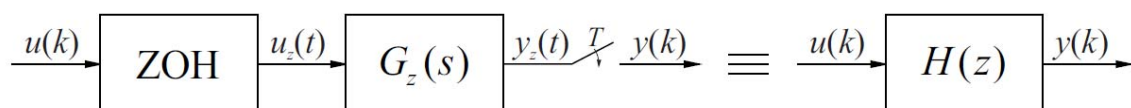
$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G_z(s)}{s}\right]\Big|_{t=kT}\right\}$$

147

Stopnična invarianca (drugi pogled)



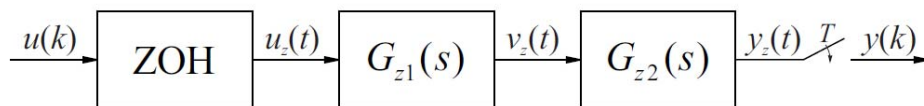
- V praksi se stopnična invarianca uporablja za diskretizacijo zveznega procesa, ki ima na vходу D/A pretvornik oz. zadrževalnik ničtega reda



- Če namreč pred zvezni blok postavimo zadrževalnik ničtega reda (ZOH), za zvezni blok pa vzorčevalno vezje ter sta vzorčevalnik in zadrževalnik časovno sinhronizirana, potem je takšen sistem ekvivalenten diskretnemu sistemu, ki je dobljen z diskretizacijo zveznega sistema po metodi stopnične invariance



148



- Diskretizacija $G_{z1}(s)$, $G_{z2}(s)$ po metodi stopnične invariance:

$$H_i(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{zi}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad i = 1, 2$$

- Diskretizacija celotnega sistema:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\}$$

- Izkaže se, da $\frac{Y(z)}{U(z)}$ NI enak $H_1(z)H_2(z)$:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H_1 H_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_{z1}(s)G_{z2}(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \neq H_1(z)H_2(z)$$

- Najprej produkt v zveznem, nato diskretizacija!

149



- Prej spoznali:
 - Zvezna sistema, ki sta ločena z vzorčevalnikom in zadrževalnikom ničtega reda, diskretizirati vsakega posebej
 - Če med zveznima sistemoma ni diskretne bloka, računamo diskretni ekvivalent iz produkta zveznih prenosnih funkcij
- To spoznanje lahko posplošimo na diskretizacijo bolj kompleksnih struktur, kot so zanke
- Bločna algebra za zvezne sisteme velja tudi za diskretne
- Tako zvezne kot diskretne prenosne funkcije spadajo namreč med linearne operatorje, zato veljajo enaka pravila in formule za poenostavljanje bločnih diagramov
- Pri poenostavljanju potrebno biti pozoren na lego zadrževalnikov in vzorčevalnikov v sistemu

150



- Do sedaj smo se ukvarjali zgolj s pretvorbo zvezne prenosne funkcije v diskretni prostor
- Seveda je možno pretvoriti tudi zapis zveznega sistema v prostoru stanj v zapis diskretnega sistema v prostoru stanj
- Pretvorba tudi tokrat ni enolična, ker pri njej zgubljammo informacijo – zopet je potrebno privzeti določene predpostavke, s čimer pridemo do enačb za transformacijo
- Privzeli bomo, da je na vhodu zveznega sistema zadrževalnik ničtega reda, ki povzroči, da je zvezni signal na vhodu v proces med dvema trenutkoma vzorčenja konstanten
- Kot vedno pri diskretnih sistemih, nas zanima le vrednost izhoda procesa v trenutkih vzorčenja

151



- Izhajamo iz zveznega sistema, zapisanega v prostoru stanj:

$$\dot{\mathbf{x}}_z(t) = \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z u_z(t)$$

$$y_z(t) = \mathbf{c}_z^T \mathbf{x}_z(t) + d_z u_z(t)$$

- Iz teorije zveznih sistemov poznamo odziv stanja za $t \geq t_0$:

$$\mathbf{x}_z(t) = e^{\mathbf{A}_z(t-t_0)} \mathbf{x}_z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_z(t-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(\tau) d\tau$$

- $t_0 \rightarrow kT$, $t \rightarrow kT + T$ ter upoštevamo, da je $u_z(\tau)$ enak $u_z(kT)$ za $kT \leq \tau < kT + T$:

$$\mathbf{x}_z(kT + T) = e^{\mathbf{A}_z T} \mathbf{x}_z(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(kT) d\tau$$

- Zanima nas le vrednost signalov v trenutkih vzorčenja:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_z(kT), \quad u(k) = u_z(kT) \quad \text{in} \quad y(k) = y_z(kT)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = [e^{\mathbf{A}_z T}] \mathbf{x}(k) + \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z d\tau \right] u(k)$$

152



- Če primerjamo prejšnjo enačbo z enačbo stanj diskretnega sistema, ugotovimo, da sta veličini v oglatih oklepajih matriki \mathbf{A} in \mathbf{b} zapisa sistema v prostoru stanj
- Izraz za \mathbf{b} lahko nadalje poenostavimo, če v enačbi zamenjamo integracijsko spremenljivko τ s $t = kT + T - \tau$, s čimer pridemo do končne formule za obe matriki:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} \quad \mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_z t} \mathbf{b}_z dt$$

- V večini realnih primerov je \mathbf{A}_z nesingularna – takrat velja:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1} e^{\mathbf{A}_z t} \Big|_0^T \mathbf{b}_z = \mathbf{A}_z^{-1} (e^{\mathbf{A}_z T} - e^{\mathbf{A}_z 0}) \mathbf{b}_z = \mathbf{A}_z^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{b}_z$$
- Težavo pri zgornjih enačbah predstavlja računanje eksponentne funkcije za matrični argument

153



- Kadar nas zanima eksaktna transformacija zveznega sistema v prostoru stanj v diskretni sistem v prostoru stanj po metodi stopnične invariance, je potrebno izračunati $e^{\mathbf{A}_z T}$ (pomagamo si z zvezno matriko prehajanja stanj):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} = e^{\mathbf{A}_z t} \Big|_{t=T} = [\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1}\}]_{t=T}$$

- Približek rešitve za kratke čase vzorčenja:

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}_z T \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{b}_z \doteq T \mathbf{b}_z$$

- eksponentno funkcijo smo razvili v Taylorjevo vrsto, pri kateri upoštevamo le člena ničtega in prvega reda
- pri izračunu \mathbf{b} zopet predpostavili, da je matrika \mathbf{A}_z nesingularna (približek za \mathbf{b} velja tudi v primeru singularne matrike \mathbf{A}_z)
- Diskretizacija izhodne (enačbo opazujemo le v trenutkih vzorčenja): $\mathbf{c}^T = \mathbf{c}_z^T$ in $d = d_z$

154

Primerjava lastnosti originalnega zveznega sistema in pripadajočega diskretiziranega sistema



- Obravnavane metode diskretizacije ohranjajo lastnost linearnosti in časovne spremenljivosti
- Enosmerno ojačenje:
 - Zvezni sistem: $K_z = \lim_{s \rightarrow 0} G_z(s)$
 - Diskretni sistem – iz teorema končne vrednosti sledi:
$$K_d = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$
 - Metode prilagajanja frekvenčnega odziva:
$$G(z) = G_z(s)|_{s=h(z)}$$
 - Sistema imata enako ojačenje, če za funkcijo $h(z)$ velja $h(1) = 0$
 - Ta pogoj izpolnjen pri vseh obravnavanih metodah iz te skupine (metodi prvih in zadnjih diferenc, obe različici bilinearne transformacije)
 - Metoda stopnične invariance
 - Definirana z enačenjem odzivov zveznega in diskretiziranega sistema na stopnico
 - **Pri vseh obravnavanih metodah se ojačenje ohranja**

155

Primerjava lastnosti originalnega zveznega sistema in pripadajočega diskretiziranega sistema



- Poli sistema:
 - Diskretizirati želimo zvezno prenosno funkcijo (več oblik zapisa):
$$G_z(s) = \frac{K_z^* (s - z_1) \dots (s - z_{m_z})}{(s - p_1) \dots (s - p_{n_z})} = \frac{R_1}{s - p_1} + \dots + \frac{R_{n_z}}{s - p_{n_z}}$$
 - predpostavili, da ima sistem le enostavne oz. enkratne pole
 - Pri diskretizaciji iščemo diskretno prenosno funkcijo:
$$G(z) = \frac{K_d^* (z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_{m_d})}{(z - \pi_1) \dots (z - \pi_{n_d})} = \frac{P_1}{z - \pi_1} + \dots + \frac{P_{n_d}}{z - \pi_{n_d}}$$
 - Metode prilagajanja frekvenčnega odziva $G(z) = G_z(s)|_{s=h(z)}$:
 - Poli so rešitve $h(z) = p_i \Rightarrow \pi_i = h^{-1}(p_i) \quad i = 1, 2, \dots, n_z$
 - Število polov ohranja ($n_z = n_d$)
 - Poli pri metodah te skupine se preslikajo v skladu z obrnjeno enačbo h^{-1} :
 - Tustinovo pravilo: $\pi_i = (1 + \frac{p_i T}{2}) / (1 - \frac{p_i T}{2}) \rightarrow$ zvezni poli iz leve (desne) polravnine v notranjost (zunanost) kroga enote (stabilnost in nestabilnost sistema se ohranjata)

156

Primerjava lastnosti originalnega zveznega sistema in pripadajočega diskretiziranega sistema



- Polni sistema:

- Metoda stopnične invariance:

- Zvezna prenosna funkcija se preslika v

$$G_z(s) = \frac{R_1(1 - e^{p_1 T})}{z - e^{p_1 T}} + \dots + \frac{R_{n_z}(1 - e^{p_{n_z} T})}{z - e^{p_{n_z} T}}$$

- kar pomeni, da se spet ohranja število polov, položaj pa se preslika kot:

$$\pi_i = e^{p_i T} \quad i = 1, 2, \dots, n_z$$

- Tudi tu se preslikajo zvezni poli iz leve (desne) polravnine v notranjost (zunanost) kroga enote (stabilnost in nestabilnost sistema se pri transformaciji ohranjata)

- Vse ugotovitve veljajo tudi za sisteme z večkratnimi in/ali konjugirano kompleksnimi poli

- Ugotovitve veljajo tudi za zapis v prostoru stanj, saj gre le za različna zapisa enakega sistema

- **Pri vseh obravnavanih metodah diskretizacije zveznih sistemov se ohranja število polov sistema, pri stopnični invarianci in bilinearni transformaciji pa tudi stabilnost**

157

Primerjava lastnosti originalnega zveznega sistema in pripadajočega diskretiziranega sistema



- Ničle sistema:

- Metode prilagajanja frekvenčnega odziva $G(z) = G_z(s)|_{s=h(z)}$:

- m_z ničel sistema pri tistih z , za katere velja:

$$h(z) = z_i \Rightarrow \zeta_i = h^{-1}(z_i) \quad i = 1, 2, \dots, m_z$$

- Ker ima zvezna prenosna funkcija $(n_z - m_z)$ ničel v neskončnosti, se $(n_z - m_z)$ ničel pojavi tam, kjer postane funkcija $h(z)$, ki jo vstavimo namesto s , neskončna:

- Funkcija $h(z)$ pri metodi prvih diferenc nima pola, zato sistem nima dodatnih ničel
- Pri metodi zadnjih diferenc in pri bilinearni transformaciji vedno dobimo sistem, ki ima enako število polov in ničel (ne glede na število ničel zveznega sistema)
- $h(z)$ ima pri metodi zadnjih diferenc pol pri $z = 0 \rightarrow$ sistem ima $(n_z - m_z)$ ničel pri $z = 0$
- $h(z)$ ima pri metodi bilinearne transformacije pol $z = -1 \rightarrow (n_z - m_z)$ ničel pri $z = -1$

- Metoda preslikave polov in ničel – število ničel diskretnega sistema za ena manjše od števila polov in ni odvisno od števila zveznih ničel

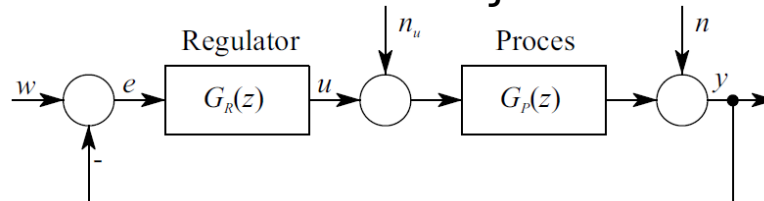
- Metoda stopnične invariance – med ničlami zveznega in diskretnega sistema nobene povezave (ne ohranja se njihovo število niti lastnost fazne minimalnosti – možne vse kombinacije)



158



- Najprej bomo obravnavali sisteme digitalnega vodenja, ki temeljijo na zapisu procesa z diskretno prenosno funkcijo:
- Regulator bo vedno v direktni veji:



- $G_P(z)$ prenosna funkcija procesa:

$$G_P = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} z^{-d}$$

- običajno vhodni signal v trenutku k ne vpliva na izhodni signal v istem trenutku (niso zmožni trenutnih sprememb izhoda) $\rightarrow b_0 = 0$
- $G_R(z)$ prenosna funkcija regulatorja, $w(k)$ referenčna veličina, $u(k)$ regulirna veličina, $y(k)$ regulirana veličina, $e(k)$ signal pogreška, $n(k)$ oz. $n_u(k)$ deterministični motnji na izhodu oz. na vhodu procesa

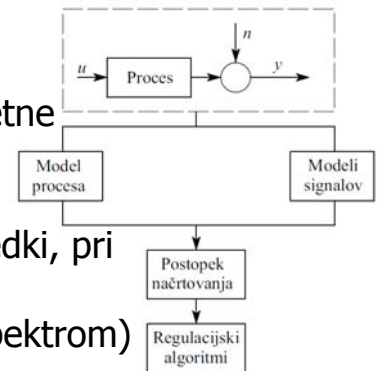


- Največkrat reguliramo proces tako, da regulirana veličina y čim bolj sledi referenčni veličini w , tako da je pogrešek $e(k) = w(k) - y(k)$ čim manjši
- Če se referenčna veličina spreminja, govorimo o sledilni regulaciji ali problemu sledenja (*servo, tracking problem*)
- Če pa je referenčna veličina konstantna govorimo o regulaciji konstantne vrednosti ali regulatorskemu problemu (angl. *regulator problem*)
- Regulator mora s svojim delovanjem kompenzirati vpliv začetnih pogojev (četudi zapis s prenosno funkcijo le-teh ne obravnava), motenj $n(k)$ in $n_u(k)$ ter vpliv spremembe referenčne veličine $w(k)$, nestabilne procese pa mora s pomočjo povratne zanke stabilizirati

Princip načrtovanja regulatorjev



- Osnovo načrtovanja predstavljata:
 - matematični model procesa
 - nastopajoči signali (motnje, krmilne veličine, začetne vrednosti) – modele signalov običajno ocenimo le zelo približno (kot motilne signale privzamemo največkrat skočne signale, čeprav v praksi zelo redki, pri načrtovanju regulatorjev za stohastične motnje privzamemo motnje z racionalnim frekvenčnim spektrom)
- Postopki načrtovanja vodenja zelo različni:
 - Včasih analitična povezava med modelom procesa in regulatorjem
 - Pri drugih ta povezava ni eksplicitna
 - Osrednjo vlogo pri načrtovanju regulatorjev ima faktor kakovosti vodenja, ki omogoča ovrednotenje obnašanja regulacijske zanke
 - Pri tem pristopu ključna izbira kriterijske fun. – pri zveznih regulatorjih predvsem integralni kriteriji (prevedemo jih v diskretno obliko)



161

Kriterijske funkcije za diskretne sisteme



- Priredba integralnih kriterijev:
 - $J_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e(k)$
 - $J_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e^2(k)$
 - $J_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |e(k)|$
 - $J_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N k|e(k)|$
- Kriterij J_1 ni uporaben, če $e(k)$ menja predznak
- Običajno uporabljamo kriterij J_2 , ki pa vodi do oscilatornih potekov regulirane veličine
- Bolj dušene poteke dobimo z uporabo kriterijev J_3 in J_4



162



- Za analitično načrtovanje regulatorjev so primerni predvsem kvadratični kriteriji (pri iskanju ekstremov pridemo ob enkratnem odvajanju do linearnih funkcij pogreška $e(k)$)
- Dodaten vpliv na dušenje regulacijske zanke lahko dosežemo s kriteriji, ki aditivno vsebujejo še kvadrat odklona regulirne veličine – tako dobimo splošni kvadratični kriterij

$$J_5 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + ru^2(k)]$$

- utežni faktor r podaja vpliv regulirne veličine na kriterijsko funkcijo
- ta oblika smiselna le, če stacionarna vred. regulirnega signala enaka 0
- sicer namesto $u(k)$ upoštevamo odstopanje od stacionarne vrednosti

$$J_6 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + r\tilde{u}^2(k)], \text{ kjer } \tilde{u}(k) = u(k) - \lim_{k \rightarrow \infty} u(k)$$

- če ne poznamo stacionarne vrednosti, upoštevamo spremembo $u(k)$:

$$J_7 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N [e^2(k) + r[\Delta u(k)]^2], \text{ kjer } \Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

163

Zahteve za obnašanje sistema vodenja v ustaljenem stanju



- Neodvisno od izbire kriterijske funkcije lahko postavimo zahteve za obnašanje sistema vodenja v ustaljenem stanju – še dodatno vplivamo na strukturo in parametre regulatorja
- Pri konstantnih referenčnih in motilnih veličinah mora signal pogreška limitirati k nič: $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$

- Z upoštevanjem teorema končne vrednosti lahko zapišemo

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = 0$$

- Za klasični povratnoznančni sistem velja:

$$E(z) = \frac{1}{1+G_R(z)G_P(z)} (W(z) - N(z)) - \frac{G_P(z)}{1+G_R(z)G_P(z)} N_u(z)$$

- V primeru stopnice reference $W(z) = \frac{z}{z-1}$ in/ali motnje na izhodu $N(z) = \frac{z}{z-1}$: $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1+G_R(z)G_P(z)} = 0$ oz. $\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z)G_P(z) = \infty$

164

Zahteve za obnašanje sistema vodenja v ustaljenem stanju



- V primeru skočne spremembe motnje na vhodu v proces $N_u(z) = \frac{z}{z-1}$ pa mora za konvergenco pogreška proti 0 veljati
$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{zG_P(z)}{1+G_R(z)G_P(z)} = 0 \quad \text{oz.} \quad \lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty$$
- Zahtevi, pobarvani rdeče, izpolnjeni, če velja $\lim_{z \rightarrow 1} G_R(z) = \infty$
 - Regulacijski pogrešek v ustaljenem stanju izgine, če vsebuje regulator pol pri $z = 1$, torej, če velja $G_R(z) = \frac{Q(z)}{P'(z)(z-1)}$ in $Q(1) \neq 0$
 - Tak regulator ima integrirno obnašanje
 - Regulacijski sistem s proporcionalnim regulatorjem nima pogreška v ustaljenem stanju, če ima proces pol pri $z = 1$ (integrirni proces), a le v primeru stopnice na referenci ali izhodni motnji (ne pa tudi vhodni)
 - Podobne zahteve lahko postavimo tudi za linearno in kvadratično naraščajoče referenčne signale in/ali motilne signale (regulatorji morajo v tem primeru vsebovati dvojni oz. trojni pol pri $z = 1$)

165

Diskretni proporcionalno-integrirno-diferencirni regulatorji (PID)



- V praksi se izmed vseh regulatorjev še vedno največ uporablja proporcionalni (P), proporcionalno-integrirni (PI) in proporcionalno-integrirno-diferencirni (PID) regulator
- Proporcionalni regulator običajno ne zadošča, saj ima regulirani signal pri procesih ničte vrste stacionarni pogrešek
- Z dodatkom integrirnega člena odpravimo pogrešek v stacionarnem stanju, z diferencirnim členom pa povečamo hitrost regulacijskega sistema
- Zato bomo obravnavali najbolj splošni primer, t.j. proporcionalno-integrirno-diferencirni diskretni regulacijski algoritem

166



- Diskretni algoritem PID lahko smiselno izpeljemo iz ustreznega zveznega regulacijskega algoritma:
 - s tem za manjše čase vzorčenja uporabimo vse izkušnje, razna pravila in tabele za nastavljanje parametrov zveznega algoritma PID

- Diferencialna enačba idealnega zveznega algoritma PID:

$$u(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

- $u(t)$ regulirni signal procesa in $e(t)$ pogrešek izhodnega signala procesa glede na predpisan referenčni signal
- K_P – ojačenje proporcionalnega dela, T_I – časovna konstanta integrirnega dela, T_D – časovna konstanta diferencirnega dela
- idealnega regulatorja PID v praksi nikoli ne uporabljamo, saj se ga ne da realizirati – diferencirni člen pri zelo hitrih spremembah signala pogreška povzroči zelo velike (teoretično neskončne) vrednosti regulirnega signala, dobimo pa tudi ojačenje visokofrekvenčnih motilnih signalov – razne metode za približno diferenciranje



- Za majhne čase vzorčenja T diferencialno enačbo pretvorimo v diferenčno obliko, tako da nadomestimo odvod z diferenco prvega reda (zadnje difference), integral pa z vsoto:

- Za integracijo navadno uporabljamo kar Eulerjevo metodo:

$$u(k) = K_P \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T} [e(k) - e(k-1)] \right]$$

- Enačba predstavlja nerekurzivno obliko regulacijskega algoritma, saj je regulacijski izhod odvisen od sedanje in vseh preteklih vrednosti signala pogreška
- Za programiranje na digitalnih računalnikih je ugodnejša rekurzivna oblika algoritma (trenutno vrednost regulirnega signala izračunamo iz pretekle vrednosti ter iz sedanje in nekaj preteklih vrednosti signala pogreška)



- Rekurzivni zapis diskretnega algoritma PID dobimo tako, da zapišemo enačbo za diskretni časovni trenutek $(k - 1)$:

$$u(k - 1) = K_P \left[e(k - 1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-2} e(i) + \frac{T_D}{T} (e(k - 1) - e(k - 2)) \right]$$

- Dobljeno enačbo nato odštejemo od prejšnje enačbe:

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2)$$

- Pri tem pa so posamezni parametri

$$\begin{aligned} q_0 &= K_P \left(1 + \frac{T_D}{T} \right) \\ q_1 &= -K_P \left(1 + 2 \frac{T_D}{T} - \frac{T}{T_I} \right) \\ q_2 &= K_P \frac{T_D}{T} \end{aligned}$$

- Pri krajših časih vzorčenja dobimo parametre q_0 , q_1 in q_2 iz parametrov zveznega regulatorja pri določenem T

169



- Pri postopku diskretizacije bi lahko za izračun integrala uporabili tudi metodo zadnjih diferenc – spremenita se le meji pri sumaciji ($0 \rightarrow 1$, $k - 1 \rightarrow k$) – spremenita se koeficienta $q_0 = K_P \left(1 + \frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I} \right)$ in $q_1 = -K_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} \right)$

- Če pa uporabimo trapezno metodo integracije, dobimo naslednjo nerekurzivno obliko regulacijskega algoritma

$$u(k) = K_P \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \left(\frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} e(i) \right) + \frac{T_D}{T} (e(k) - e(k - 1)) \right]$$

- Na enak način kot prej lahko izvedemo rekurzivni algoritem

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2)$$

$$- q_0 = K_P \left(1 + \frac{T}{2T_I} + \frac{T_D}{T} \right), \quad q_1 = -K_P \left(1 + 2 \frac{T_D}{T} - \frac{T}{2T_I} \right)$$

$$- q_2 = K_P \frac{T_D}{T}$$

170

Sinteza diskretnega algoritma PID iz zveznega



- Pri krajših časih vzorčenja lahko torej parametre diskretnega regulatorja PID q_0 , q_1 in q_2 izračunamo iz parametrov zveznega regulatorja (K_P , T_I , T_D) pri določenem času vz. T
- Kot smo spoznali že pri obravnavi diskretizacije zveznih sistemov, pri kratkih časih vzorčenja ni pričakovati bistvenega vpliva metode na končni rezultat
- Z naraščanjem časa vzorčenja pa razlike bolj izrazite
- Prej obravnavane metode diskretizacije problematične, saj pri diskretizaciji odvoda in integrala uporabljen drugačen algoritem – odvod z metodo zadnjih diferenc, integral pa na tri načine – najprej prve diference, nato zadnje diference, nazadnje Tustinovo pravilo – operaciji integriranja in odvajanja več nista nasprotni (v prvem in tretjem primeru)

171

Sinteza diskretnega algoritma PID iz zveznega



- Diskretizacija regulatorja je bolj teoretično osnovana, če uporabimo eno od metod za diskretizacijo zveznih sistemov:
 - Metode prvih diferenc ne moremo uporabiti, saj po diskretizaciji nekavzalnega idealnega regulatorja PID dobimo nekavzalni diskretni regulator, ki ga ne moremo implementirati, saj za izračun trenutne vrednosti regulirne veličine $u(k)$ potrebujemo prihodnjo vrednost signala pogreška $e(k+1)$, ki seveda ni na voljo
 - Diskretizacijo po metodi zadnjih diferenc smo že obravnavali
 - Tretja možnost je uporaba Tustinovega pravila. Enostavno lahko pokažemo, da v tem primeru dobimo regulacijski algoritem:
$$u(k) = u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$
$$q_0 = K_P \left(1 + \frac{2T_D}{T} + \frac{T}{2T_I} \right), q_1 = -K_P \left(\frac{4T_D}{T} - \frac{T}{T_I} \right), q_2 = K_P \left(\frac{2T_D}{T} + \frac{T}{2T_I} - 1 \right)$$
 - gre za kavzalni sistem, čeprav je originalni zvezni sistem nekavzalen
 - $u(k)$ ni odvisen od $u(k-1)$, je pa od $u(k-2)$ → pol pri $z = -1$ (oscil.!)

172



- Zaradi oscilacij (pol regulatorja pri $z = -1$) na regulirnem signalu Tustinovo pravilo ni najbolj ustrezno za diskretizacijo nekavzalnega sistema, kakršen je idealni regulator PID
- Diskretiziramo t.i. »realni« regulator PID, pri katerem je izhod »idealnega« D-člena filtriran skozi nizkoprepustni filter s časovno konstanto T_f , ki je nekajkrat (trikrat do desetkrat) nižja od diferencirne časovne konstante T_D :

$$G_z(s) = K_P \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_f s} \right]$$

- Če namesto s vstavimo Tustinovo formulo $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$, dobimo

$$u(k) = p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

173



- Parametri diskretnega realnega PID (Tustinovo pravilo):

$$- p_1 = \frac{4C_f}{1+2C_f}$$

$$- p_2 = \frac{1-2C_f}{1+2C_f}$$

$$- q_0 = K_P \frac{1+2C_D + \frac{C_I}{2} + 2C_f + C_I C_f}{1+2C_f} = K_P \left(1 + \frac{C_I}{2} + \frac{2C_D}{1+2C_f} \right)$$

$$- q_1 = -K_P \frac{4C_D - C_I + 4C_f}{1+2C_f}$$

$$- q_2 = K_P \frac{2C_D + \frac{C_I}{2} - C_f C_I + 2C_f - 1}{1+2C_f} = \frac{2C_D - (1 - \frac{C_I}{2})(1 - 2C_f)}{1+2C_f}$$

- Normirane časovne konstante: $C_D = \frac{T_D}{T}$, $C_f = \frac{T_f}{T}$, $C_I = \frac{T}{T_I}$
- Ta algoritem predstavlja najbolj natančno (frekvenčno gledano) preslikavo zveznega realnega regulatorja PID v diskretno obliko



174



- Čeprav je bilo podanih veliko formul za izračun parametrov diskretnega regulatorja PID, so pomembni zaključki, glede njihove uporabe:
 - Pri kratkih časih vzorčenja (glede na integrirno in diferencirno časovno konstanto) dajo različne metode za diskretizacijo diskretne regulatorje s podobnimi lastnostmi, vendar pa je potrebno biti pazljiv pri uporabi Tustinovega pravila za diskretizacijo idealnega zveznega regulatorja PID, saj dobimo praktično neuporaben regulator.
 - Diskretizacija realnega PID s Tustinovim pravilom predstavlja najbolj natančno preslikavo zveznega realnega regulatorja PID v diskretno obliko. Dobra lastnost tega regulatorja je tudi ta, da lahko eksplicitno izberemo časovno konstanto filtra na D-členu.
 - V vsakem primeru moramo dobljene vrednosti parametrov regulatorja smatrati le kot zelo okvirne in jih je potrebno pri implementaciji še dodatno uglasiti.

175

Relacije med parametri tipičnega diskretnega regulatorja PID



- Kot smo pokazali pri pretvorbi zveznih regulatorjev PID, obstaja glede na različne pretvorbe več različnih struktur regulatorja PID
- Tu bomo analizirali najbolj enostavno strukturo, ki temelji na metodi zadnjih diferenc ali *ad hoc* pretvorb
- Prenosna funkcija regulatorja PID je $G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$
- Algoritem v časovnem prostoru ima obliko:
$$u(k) = u(k - 1) + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2)$$
- Relacije med parametri q_0 , q_1 in q_2 določimo tako, da ima diskretni regulacijski sistem pri krajših časih vzorčenja podoben odziv na stopničasti signal pogreška, kot ga ima tipični zvezni regulator PID

176

Relacije med parametri tipičnega diskretnega regulatorja PID



- Vrednosti regulirnega signala ob časih vzorčenja:
 - $u(0) = q_0$
 - $u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1$
 - $u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2$
 - ⋮
 - $u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2$

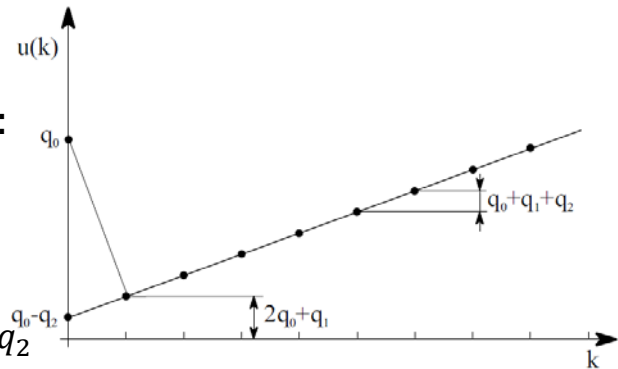
- Analogija z zveznim PID:

- P-člen: $K_P = q_0 - q_2$
- Vpliv D-člena traja prvo periodo T :

$$K_P T_D \frac{de_z(t)}{dt} \approx K_P T_D \frac{1}{T} = q_2$$

- Prispevek I-člena čez eno periodo vzorčenja T enak $(q_0 + q_1 + q_2)$:

$$K_P \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \approx K_P \frac{T}{T_I} = q_0 + q_1 + q_2$$



177

Relacije med parametri tipičnega diskretnega regulatorja PID



- Predpostavimo, da je proporcionalno ojačenje zveznega regulatorja PID pozitivno (podobni zaključki za negativno):

$$q_0 - q_2 > 0 \quad \text{oz.} \quad q_0 > q_2$$

- Zaradi pozitivne diferencirne konstante:

$$q_2 > 0$$

- Zaradi pozitivne integrirne konstante:

$$q_0 + q_1 + q_2 > 0 \quad \text{oz.} \quad q_2 > -(q_0 + q_1)$$

- V praktičnih primerih prispevek D-člena pri $k = 0$ izrazito večji od prispevka I-člena pri $k = 1$, zato $u(1) < u(0)$:

$$u(1) - u(0) = q_0 + q_1 < 0 \quad \text{oz.} \quad -(q_0 + q_1) > 0$$

- Če združimo zaključke neenačb:

$$q_0 > q_2 > -(q_0 + q_1) > 0$$

178



- Pri manjših časih vzorčenja lahko torej parametre diskretnega PID regulatorja q_0 , q_1 in q_2 izračunamo iz parametrov zveznega regulatorja K_P , T_I in T_D
- Za določitev parametrov q_0 , q_1 in q_2 lahko uporabimo zlasti pri računalniškem načrtovanju parametrsko optimizacijo, lahko pa tudi razna pravila ali metode preizkušanja:
 - Za približno optimalno nastavitve parametrov zveznih regulatorjev PID pogosto uporabljamo t.i. nastavitvena pravila
 - Omenjena pravila so poizkušali prirediti za časovno diskretne PID-regulacijske algoritme – izhajali iz procesov:

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} e^{-T_d s}$$

- V diskretnem nadomestimo mrtvi čas T_d z mrtvim časom $(T_d + \frac{T}{2})$, kjer drugi člen aproksimira zakasnitev zaradi vzorčenja signalov

179



- Če želimo zadušiti relativno velike regulirne signale $u(k)$ pri hitrih spremembah reference $w(k)$, le-te ne upoštevamo pri diferenciranju. Ustrezna nerekurzivna diferenčna enačba:

$$u(k) = K_P \left[e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + y(k-1)] \right]$$

- Ustrezna rekurzivna enačba ima obliko:

$$u(k) = u(k-1) +$$

$$+ K_P \left[e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \right]$$

- Še večje dušenje regulirnega signala dobimo, če upoštevamo signal pogrška le še v integrirnem členu:

$$u(k) = u(k-1) +$$

$$+ K_P \left[-y(k) + y(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T} [-y(k) + 2y(k-1) - y(k-2)] \right]$$

180



- Obravnavana modificirana algoritma ovrednotita visokofrekvenčne signale reference slabše od izhodnih
- Druge modifikacije dobimo z različnimi realizacijami diferencirnega člena:
 - Če vsebuje izhodni signal relativno visokofrekvenčne motilne signale, ki jih ni mogoče kompenzirati ali pa to ni potrebno, lahko nastanejo pri izračunu diferenčnega kvocienta $\frac{T_D}{T} [e(k) - e(k - 1)]$ v nerekurzivni obliki, oziroma $\frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k - 1) + e(k - 2)]$ v rekurzivni obliki, nezaželeno velike spremembe regulirne veličine
 - Diferencirni člen je potreben za kompenzacijo srednjefrekvenčnih motilnih signalov in za izboljšanje kakovosti regulacije, saj lahko v primeru, če ni prevelik, kompenzira pol prenosne funkcije procesa, razširi stabilnostno območje in dopušča večje faktorje ojačenja → kompromisi → filtri, ki odstranijo del spektra



- PID-regulatorji imajo fiksno strukturo, parametre pa jim določimo z optimizacijo izbrane kriterijske funkcije - zato jih imenujemo tudi parametrsko optimalni regulatorji
- Sedaj si bomo ogledali strukturno optimalne kompenzacijske regulatorje, ki jih običajno uporabljamo pri raznih sledilnih regulacijah. Ti regulatorji imajo procesu prilagojeno tudi strukturo (red prenosne funkcije)
- Splošni linearni regulator lahko podamo s prenosno funkcijo
$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_\nu z^{-\nu}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}}$$
- Stopnjo števca ν in imenovalca μ ter parametre p_i , q_i izberemo tako, da zadovoljimo regulacijskim zahtevam



- Linearni proces, ki ga želimo regulirati, naj ima obliko

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} z^{-d}, b_1 \neq 0$$
- Splošni linearni regulator lahko načrtamo z metodo optimizacije parametrov ali z metodo premikanja polov
- Metoda optimizacije parametrov je primerna le za regulatorje z nizkim redom prenosne funkcije, saj se z večanjem števila parametrov zelo hitro povečuje število potrebnih računskih operacij, predvsem pa je problematična pogojenost problema, kar pomeni, da je zelo vprašljiva konvergenca parametrov k želenim vrednostim
- Sedaj bomo predstavili postopek načrtovanja linearnih regulatorjev z metodo premikanja polov

183



- Bistvo metode je v izbiri polov zaprtozančne prenosne funkcije regulacijskega sistema. Želimo lego polov predpišemo z izbiro koeficientov karakterističnega polinoma, ki bo v naši obravnavi vedno monični polinom (vodilni koeficient oz. koeficient pri najvišji potenci z je enak 1):

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_\ell z^{-\ell} = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}$$
- Stopnja karakterističnega polinoma $\deg(A) = \ell$ je določena:

$$\ell = \max\{m + \mu, m + d + v\}$$
 - $m + \mu = \deg(PA)$ stopnja produkta polinomov $P(z^{-1})A(z^{-1})$
 - $(m + d + v)$ stopnja produkta polinomov $Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}$
 - Operator $\deg(\cdot)$ podaja stopnjo polinoma v argumentu
- Določiti moramo koeficiente polinomov $Q(z^{-1})$ in $P(z^{-1})$
- Stopnji polinomov $Q(z^{-1})$ in $P(z^{-1})$ – diofantske enačbe

184



- Rešimo diofantsko enačbo $3x + 2y = 5$:
 - x in y celi števili
 - Ena rešitev: $x = 1$ in $y = 1$
 - Ostale rešitve: $x = x_0 + 2n, y = y_0 - 3n$ (n celo število)

x :	-5	-3	-1	1	3	5	7
y :	10	7	4	1	-2	-5	-8
 - Prvo rešitev najdemo tako, da izberemo x v intervalu
$$0 \leq x < 2$$
 - ali y v intervalu
$$0 \leq y < 3$$
- Drugi primer: $4x + 6y = 1$
 - x in y celi števili – leva stran enačbe vedno soda, desna vedno liha
 - Povsem jasno je, da rešitev ne obstaja
 - Problem nima rešitve, ko največji skupni delitelj koeficientov na levi strani enačbe ni delitelj desne strani enačbe. Ko sta si koeficienta na levi strani enačbe tuja, oziroma ko je njun največji skupni delitelj tudi delitelj desne strani enačbe, pa rešitev obstaja.

185



- Za polinome z realnimi koeficienti in cela števila veljajo podobna računarska pravila:
 - Operaciji množenja in seštevanja imata enake lastnosti
 - Vsota oziroma produkt dveh celih števil je spet celo število
 - Isto velja za polinome
 - Količnik, ki ga dobimo pri deljenju dveh celih števil (polinomov), ni nujno celo število (polinom)
- Reševali bomo enačbo za premikanje polov:
$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_\ell z^{-\ell} == P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B_d(z^{-1})$$
- Če polinoma $P_0(z^{-1})$ in $Q_0(z^{-1})$ rešita zgornjo enačbo, potem predstavljata rešitev enačbe tudi polinoma
 - $P(z^{-1}) = P_0(z^{-1}) + X(z^{-1})B_d(z^{-1})$
 - $Q(z^{-1}) = Q_0(z^{-1}) - X(z^{-1})A(z^{-1})$
 - $X(z^{-1})$ je poljuben polinom z realnimi koeficienti

186



- Rešitev tega problema vedno obstaja, če je proces vodljiv, torej če sta si polinoma $A(z^{-1})$ in $B(z^{-1})$ v prenosni funkciji procesa tuja (nimata skupnih korenov)
- Prvo rešitev poiščemo tako, da velja en od pogojev:
 - $\deg(P) = \mu < \deg(B_d) = m + d$
 - $\deg(Q) = \nu < \deg(A) = m$
- Diofantsko enačbo rešimo na $P(z^{-1})$ in $Q(z^{-1})$ z izbiro:
$$\mu = m + d - 1$$
$$\nu = m - 1$$
 - število vseh neznank (koeficientov q_i in p_i):
$$\nu + 1 + \mu = (m - 1) + 1 + (m + d - 1) = 2m + d - 1$$
 - število podanih enačb (stopnja karakterističnega polinoma):
$$\ell = \max[\mu + m, \nu + m + d] =$$
$$= \max[(m + d - 1) + m, (m - 1) + m + d] = 2m + d - 1$$
 - pri zgoraj navedeni izbiri vrednosti je problem enolično rešljiv

187



- V prisotnosti stopničastih motenj odpravimo pogršek v ustaljenem stanju, če zahtevamo integrirno obnašanje regulatorja (regulator ima pol pri $z = 1$):
 - $P(1) = 0$ oz. $\sum_{i=1}^{\mu} p_i = -1$
 - Omenjena zahteva poveča število enačb na $\ell + 1$, s katerimi moramo poiskati $\mu + \nu + 1$ neznanih parametrov q_i in p_i regulatorja
 - Minimalno sistemsko prenosno funkcijo dobimo, če povečamo stopnjo polinomov Q in P glede na prejšnji primer za 1:
$$\nu = m \quad \text{in} \quad \mu = m + d$$
 - Število neznank je
$$\mu + \nu + 1 = m + (m + d) + 1 = 2m + d + 1$$
 - Število enačb pa
$$\ell + 1 = \max[(m + d) + m, m + m + d] + 1 = 2m + d + 1$$
 - Problem je enolično rešljiv

188

Primer – splošni linearni regulator



- $G_P(z) = \frac{0,05z^{-1}}{(1-0,9z^{-1})(1-0,95z^{-1})} = \frac{0,05z^{-1}}{1-1,85z^{-1}+0,855z^{-2}}$
- Vse pole povratnozančnega sistema v točko $z = 0,8$
- Stopnja $A(z^{-1})$ je 2, stopnja $B(z^{-1})$ je 1 ($b_2 = 0$) $\rightarrow m = 2$
- Stopnji $P(z^{-1})$ in $Q(z^{-1})$: $\mu = m + d - 1 = 1$, $\nu = m - 1 = 1$
- Posledično lahko predpostavimo naslednjo strukturo:
 $P(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1}$ in $Q(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1}$
- Karakteristični polinom izenačimo z želenim, katerega stopnja ℓ znaša 3 (vsi tri pole v točki $z = 0,8$):

$$P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}$$

$$= (1 + p_1z^{-1})(1 - 1,85z^{-1} + 0,855z^{-2}) + (q_0 + q_1z^{-1})(0,05z^{-1})$$

$$= 1 + [p_1 + 0,05q_0 - 1,85]z^{-1} + [-1,85p_1 + 0,05q_1 + 0,855]z^{-2} + [0,855p_1]z^{-3}$$

$$= \mathcal{A}(z^{-1}) = (1 - 0,8z^{-1})^3 = 1 + [-2,4]z^{-1} + [1,92]z^{-2} + [-0,512]z^{-3}$$
 - Izenačiti je potrebno izraze v oglatih oklepajih pri enakih potencah z^{-1} , s čimer pridemo do sistema treh enačb s tremi neznankami

189

Primer – splošni linearni regulator (I-vrste)



- Iščemo integrirni regulator \rightarrow stopnji polinomov Q in P višji za 1 in znašata 2 – karakteristični polinom zaprtozančnega sistema je tokrat četrte stopnje ($\ell = 4$), zato z izenačevanjem koeficientov polinomov dobimo štiri enačbe
- Peto enačbo definira integrirni značaj regulatorja ($1 + p_1 + p_2 = 0$), s čimer imamo pet enačb in pet neznank:

$$\left. \begin{array}{r} 0,855p_2 - 0,4096 = 0 \\ 0,855p_1 - 1,85p_2 + 2,048 = 0 \\ -1,85p_1 + p_2 + 0,05q_2 - 2,985 = 0 \\ p_1 + 0,05q_0 + 1,35 = 0 \\ p_1 + p_2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = -1,4791 \\ p_2 = 0,4791 \\ q_0 = 2,5813 \\ q_1 = -4,6067 \\ q_2 = 2,0574 \end{array} \right.$$
- Integrirni regulator ima višji red, a v popolnosti odpravi pogrešek v ustaljenem stanju, česar osnovni regulator pri stopničastem referenčnem signalu ni zmožen



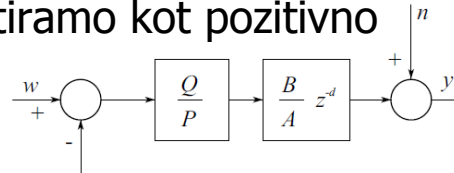
190

Lastnosti splošnega linearne regulatorja



- Prenosno funkcijo v direktni veji lahko razbijemo na QBz^{-d} in $\frac{1}{PA}$, slednjo pa zapišemo: $\frac{1}{PA} = \frac{1}{\mathcal{A} - QBz^{-d}} = \frac{\frac{1}{\mathcal{A}}}{1 - \frac{1}{\mathcal{A}}QBz^{-d}}$

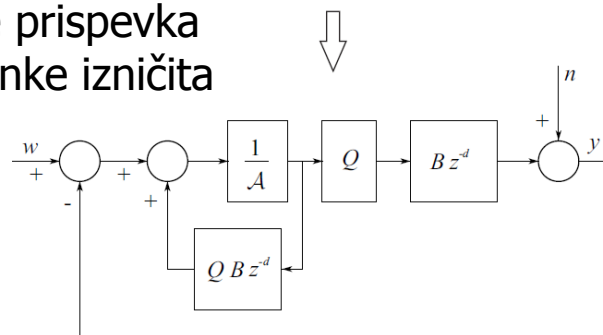
- To prenosno funkcijo lahko interpretiramo kot pozitivno povratno zanko z $\frac{1}{\mathcal{A}}$ v direktni veji in QBz^{-d} v povratni veji



- Če na izhodu ni motnje $n(k)$, se prispevka notranje in zunanje povratne zanke izničita

- Če pa motnja $n(k)$ je, je njen vpliv na izhod procesa:

$$G_n = \frac{Y}{N} = \frac{1}{1 + \frac{QBz^{-d}}{PA}} = \frac{PA}{PA + QBz^{-d}} = \frac{PA}{\mathcal{A}}$$



Lastnosti splošnega linearne regulatorja



- Ojačenje prenosne funkcije G_n je 0, če $P(1) = 0$ (integrirni regulator) ali $A(1) = 0$ (integrirni proces) \rightarrow takrat ni pogreška v ustaljenem stanju, če stopničasta motnja $n(k)$
- Dinamika regulacije motnje je določena z izbiro karakt. polinoma $\mathcal{A}(z^{-1})$ zaprtozančne prenosne funkcije
- S tako regulacijo ne krajšamo niti polov niti ničel procesa
- Še nekaj lastnosti splošnega linearne regulatorja:
 - Diofantska enačba ima rešitev le, če sta si $A(z^{-1})$ in $B(z^{-1})$ tuja (koreni ne sovpadajo oz. poli in ničle pren. funkcije se ne krajšajo)
 - Povratnozančna prenosna funkcija $G_w(z) = Y(z)/W(z)$ in prenosna funkcija od motnje na izhod $G_n(z) = Y(z)/N(z)$ imata enake pole
 - Na ničle prenosne funkcije $G_n(z)$ ne moremo vplivati
 - Na ničle systemske prenosne funkcije $G_w(z)$ pa lahko vplivamo z ustreznim predfiltrom, kar pride v poštev pri sledilni regulaciji



- Diskretni dinamični sistem je vodljiv, če ga lahko pripeljemo s pomočjo končnega zaporedja vhodnega signala $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, iz poljubnega začetnega stanja $\mathbf{x}(0)$ v poljubno končno stanje $\mathbf{x}(N)$
- Zaporedje $u(k)$, s katerim dosežemo omenjeni cilj, lahko določimo s pomočjo enačbe za odziv stanja

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j)$$

- zapišemo jo za končni trenutek $k = N$ v naslednji obliki

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) + \mathbf{Q}_{vN} \mathbf{u}_N$$

- uvedli matriko \mathbf{Q}_{vN} z n vrsticami in N stolpci

$$\mathbf{Q}_{vN} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]$$

193



- Sistem je torej vodljiv, če lahko določimo vektor \mathbf{u}_N za poljuben par $\mathbf{x}(0)$ in $\mathbf{x}(N)$:

$$\mathbf{x}(N) - \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_{vN} \mathbf{u}_N$$

- To enačbo lahko interpretiramo kot sistem n enačb (za vsako vrstico v matriki po ena) z N neznankami:

- Očitno iz te enačbe ni možno izračunati \mathbf{u}_N , če $N < n$ (sistema reda n ni možno prevesti iz poljubnega začetnega stanja v poljubno končno stanje v manj kot n korakih)

- Če je $N = n$, lahko določimo zaporedje vhodnega signala z enačbo

$$\mathbf{u}_N = \mathbf{Q}_{vN}^{-1} [\mathbf{x}(N) - \mathbf{A}^N \mathbf{x}(0)]$$

- Pogoji: matrika \mathbf{Q}_{vN} nesingularna (determinanta različna od 0 oz. vsi stolpci matrike so linearno neodvisni)
- Če je matrika \mathbf{Q}_{vN} singularna za $N = n$ (torej je vsaj eden izmed stolpcev linearno odvisen od preostalih), lahko upamo, da vodljivost dosežemo pri nekem N , večjem od n

194



- V primeru $N > n$ lahko določimo \mathbf{u}_N le v primeru, če najdemo v matriki \mathbf{Q}_{vN} n linearno neodvisnih stolpcev:
 - Stolpci matrike \mathbf{Q}_{vN} imajo zanimivo lastnost: takoj ko je en stolpec $\mathbf{A}^i \mathbf{b}$ linearno odvisen od prejšnjih stolpcev $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$, so od teh linearno odvisni tudi vsi nadaljnji stolpci $\mathbf{A}^{i+k}\mathbf{b}$ ($k > 0$)
 - Zato velja: *Če sistema ni možno prevesti iz poljubnega začetnega stanja v poljubno končno stanje (torej če ni vodljiv) v $N = n$ korakih, ga ni možno prevesti niti kadarkoli kasneje (torej sploh ni vodljiv)*
- Sistem je torej vodljiv tedaj in le tedaj, če je njegova matrika vodljivosti $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_{vn} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ nesingularna – le-to preverimo z izračunom ranga matrike (le-ta mora biti enak n) ali z izračunom determinante (le-ta mora biti različna od 0).
- Kriterij vodljivosti identičen kriteriju za zvezne sisteme

195



- Diskretni dinamični sistem z izhodom $y(k)$ je spoznaven, če lahko določimo poljubno stanje sistema $\mathbf{x}(k)$ v trenutku $k = 0$, torej $\mathbf{x}(0)$, iz končnega zaporedja izhodnega signala $y(0), y(1), \dots, y(N - 1)$
- Obravnavamo diskretni sistem:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k + 1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned}$$

- Zapišimo izhode:

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(0) + du(0) \\ y(1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(1) + du(1) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b}u(0) + du(1) \\ y(2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{c}^T \mathbf{b}u(1) + du(2) \\ &\quad \vdots \\ y(N - 1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-1} \mathbf{x}(0) + [d \quad \mathbf{c}^T \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{b}] \mathbf{u}_N \end{aligned}$$

196



- Definiramo še:

– Vektor $\mathbf{y}_N^T = [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y(N-1)]$

– Matriki $\mathbf{Q}_{SN} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-1} \end{bmatrix}$ in $\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ 0 & 0 & & d & \mathbf{c}^T \mathbf{b} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & d & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-4} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-3} \mathbf{b} \\ d & \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-3} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{N-2} \mathbf{b} \end{bmatrix}$

– Zapišemo sistem enačb v naslednji obliki

$$\mathbf{y}_N - \mathbf{F}_N \mathbf{u}_N = \mathbf{Q}_{SN} \mathbf{x}(0)$$

- Imamo torej sistem N enačb z n neznankami (iščemo seveda začetno stanje $\mathbf{x}(0)$)
- Podobno kot pri analizi vodljivosti, sistem v splošnem ni rešljiv za $N < n$ (stanja sistema n -tega reda ni možno določiti v manj kot n trenutkih)

197



- Če je $N = n$, lahko določimo stanje $\mathbf{x}(0)$ z enačbo

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}_{SN}^{-1} [\mathbf{y}_N - \mathbf{F}_N \mathbf{u}_N]$$

- Pogoji: matrika \mathbf{Q}_{SN} nesingularna (determinanta matrice je različna od 0 oz. vsi stolpci matrice so linearno neodvisni)
- Če je matrika \mathbf{Q}_{SN} singularna za $N = n$, lahko podobno kot pri izpeljavi vodljivosti dokažemo, da dodatna opazovanja (za $N > n$) ne prinesejo nobene dodatne informacije v smislu spoznavnosti $\mathbf{x}(0)$ → *Če ne moremo določiti stanja sistema iz n opazovanj, ga ne moremo določiti tudi iz $N > n$ opazovanj, torej ga sploh ne moremo določiti*
- Sistem je torej spoznaven tedaj in le tedaj, če je njegova matrika spoznavnosti nesingularna

$$\det \mathbf{Q}_S = \det \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

- Tudi spoznavnost se pri diskretnih sistemih ugotavlja na popolnoma enak način kot pri zveznih

198



- Za dva sistema pravimo, da sta ekvivalentna, če se po vhodno-izhodnem obnašanju ne ločita med seboj
- Izkaže se, da je mogoče najti neskončno ekvivalentnih sistemov določenega dinamičnega diskretnega sistema
- Četudi je prenosna funkcija vseh sistemov enaka, je možno takšen sistem v prostoru stanj predstaviti z neskončno zapisi
- Tudi če se omejimo le na zapise z minimalnim številom stanj, še vedno obstaja neskončno mnogo zapisov v PS
- Ker smo se v naši obravnavi omejili na analizo linearnih časovno nespremenljivih sistemov, nas bodo zanimale le linearne preslikave med vektorji stanj teh sistemov

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_t$$

- \mathbf{x} vektor stanj izhodiščnega sistema, \mathbf{x}_t vektor stanj transformiranega sistema, \mathbf{T} pa je nesingularna kvadratna matrika

199



- Transformacija zapisa v prostoru stanj:

$$\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + du(k)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{T}\mathbf{x}_t(0)$$

- Prvo in tretjo enačbe delimo s \mathbf{T} z leve strani:

$$\mathbf{x}_t(k+1) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}\mathbf{x}_t(k) + du(k)$$

$$\mathbf{x}_t(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

- Enačba predstavlja zapis transformiranega sistema v prostoru stanj, matrike transformiranega sistema pa podajajo enačbe:

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{c}_t^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T} \quad d_t = d$$

200



- Ekvivalentni sistemi imajo enako dinamiko, torej enake pole, kar pomeni, da so lastne vrednosti matrik \mathbf{A} in \mathbf{A}_t enake
- Z izborom različnih transformacijskih matrik \mathbf{T} , ki pa morajo seveda biti nesingularne, dobimo različne zapise transformiranega sistema
- Določene vrste zapisov so v obliki, ki omogoča lažjo analizo oz. načrtovanje sistemov
- Takšnim oblikam zapisa rečemo kanonične oblike:
 - Diagonalna kanonična oblika
 - (Jordanova kanonična oblika)
 - Vodljivostna regulatorska kanonična oblika
 - Spoznavnostna observatorska kanonična oblika

201



- Diagonalna kanonična oblika je oblika zapisa, pri kateri je sistemska matrika diagonalna, kar pomeni, da med stanji ni nobene interakcije – predikcija določenega stanja je odvisna le od trenutne vrednosti tega stanja in trenutne vrednosti vhoda
- Lastne vrednosti λ_i in pripadajoči lastni vektorji θ_i matrike \mathbf{A} so tisti, ki rešijo naslednjo enačbo:

$$\mathbf{A}\theta_i = \lambda_i\theta_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Ista enačba v matrični obliki

$$\mathbf{A}\Theta = \Theta\Lambda$$

- Enačbo premultipliciramo z Θ^{-1} in dobimo diagonalno matriko lastnih vrednosti – sistemska matriko tega zapisa:

$$\Lambda = \Theta^{-1}\mathbf{A}\Theta$$

202

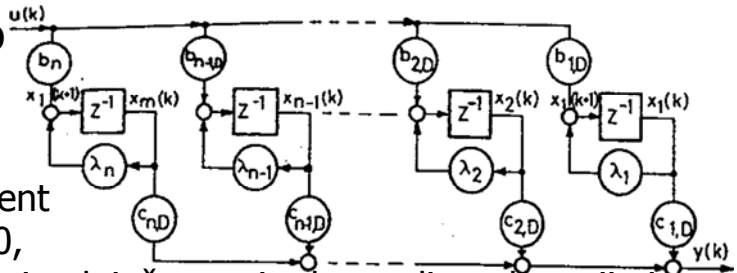
Diagonalna kanonična oblika



- Transformacija \mathbf{T} za pretvorbo v ekvivalentni sistem je (glede na prejšnjo enačbo) kar enaka $\mathbf{\Theta}$, torej matrika lastnih vektorjev sistemske matrike
- Matrike diagonalne kanonične oblike zapisa sistema v PS:
$$\mathbf{A}_t = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{b} \quad \mathbf{c}_t^T = \mathbf{c}^T \mathbf{\Theta} \quad d_t = d$$

- Zapis omogoča enostavno analizo vodljivosti in spoznavnosti sistema:

- Če je namreč določen element vhodnega vektorja \mathbf{b} enak 0, vhodni signal ne vpliva na pripadajoče stanje; ker tudi med stanji ni interakcije, na dotično stanje ni mogoče vplivati in je zato nevodljivo
- Število vodljivih stanj (rang matrike vodljivosti) določimo kot število neničelnih elementov v vektorju \mathbf{b} sistema (diagonalno kan. oblika)



203

Diagonalna kanonična oblika



- Na podoben način – sistem je nespoznaven, če je v izhodnem vektorju \mathbf{c}^T katerikoli element enak 0:
 - Potem pripadajoče stanje nima direktnega vpliva na izhod
 - Sistemska matrika diagonalna → ni možen posredni vpliv preko ostalih stanj → z merjenjem izhoda ne dobimo nobene informacije o obravnavanem stanju → sistem po definiciji nespoznaven
 - Število ničelnih elementov v izhodnem vektorju \mathbf{c}^T je število nespoznavnih stanj sistema
- Diskretni sistem mogoče pretvoriti v diagonalno kanonično obliko, če so vse lastne vrednosti sistemske matrike različne:
 - Sicer sistem pretvorimo v sorodno Jordanovo kanonično obliko (celotna analiza in s tem ideja neodvisnosti stanj se nekoliko zaplete)
 - Zaradi numeričnih problemov se diag. kanonična oblika v praksi ne uporablja zelo pogosto, je pa zelo pomembna s pedagoškega vidika

204

Vodljivostna regulatorna kanonična oblika (VRKO)



- Nekateri avtorji to kanonično obliko poimenujejo le vodljivostna kanonična oblika, vendar pa obstajata dve vrsti vodljivostne kanonične oblike, tako da bomo v naši obravnavi eksplicitno poudarili, da gre za regulatorsko
- To obliko zapisa že obravnavali, ko smo želeli sistem, zapisan s prenosno funkcijo, pretvoriti v prostor stanj:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- Izhodna enačba

$$y(k) = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \cdots \quad b_1 - b_0 a_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

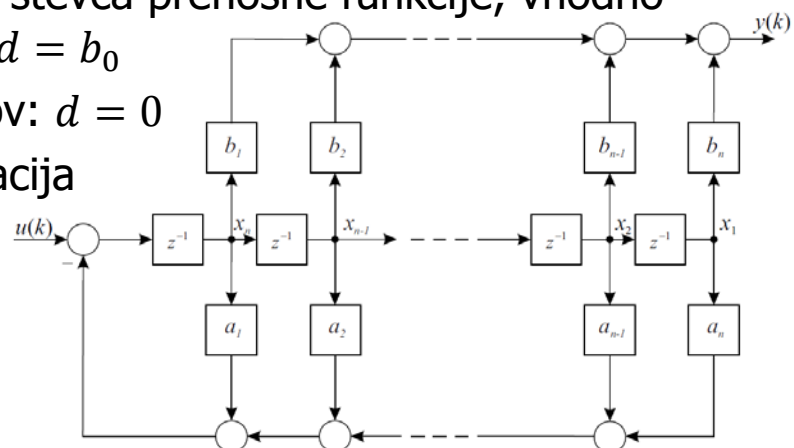
VRKO



- Sistemska matrika **A** ima Frobeniusovo obliko (v zadnji vrstici vidni koeficienti karakterističnega polinoma sistema):

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

- Vhodni vektor **b** ima zelo enostavno obliko, izhodni vektor \mathbf{c}^T določajo koeficienti števec prenosne funkcije, vhodno-izhodna konstanta pa $d = b_0$
- Večina realnih procesov: $d = 0$
- Pri VRKO enaka realizacija sistema kot simulacija z delitveno metodo





- Iščemo transformacijsko matriko \mathbf{T} , ki izhodiščni sistem pretvori v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v \mathbf{W}$$

- \mathbf{Q}_v matrika vodljivosti

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a_i koeficienti karakterističnega polinoma sistema:

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

- Produkt $\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v \mathbf{W}$ nesingularen, če oba faktorja nesingularna (\mathbf{W} ima determinanto +1 ali -1, odločilna je nesingularnost \mathbf{Q}_v – vodljivost)

- Potreben in zadostni pogoj za pretvorbo vodljivost sistema

207



- Spoznavnostna observatorska kanonična oblika (SOKO) je primerna za načrtovanje observatorjev ali opazovalnikov

- Zapis sistema v SOKO:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ b_{n-2} - b_0 a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} u(k)$$

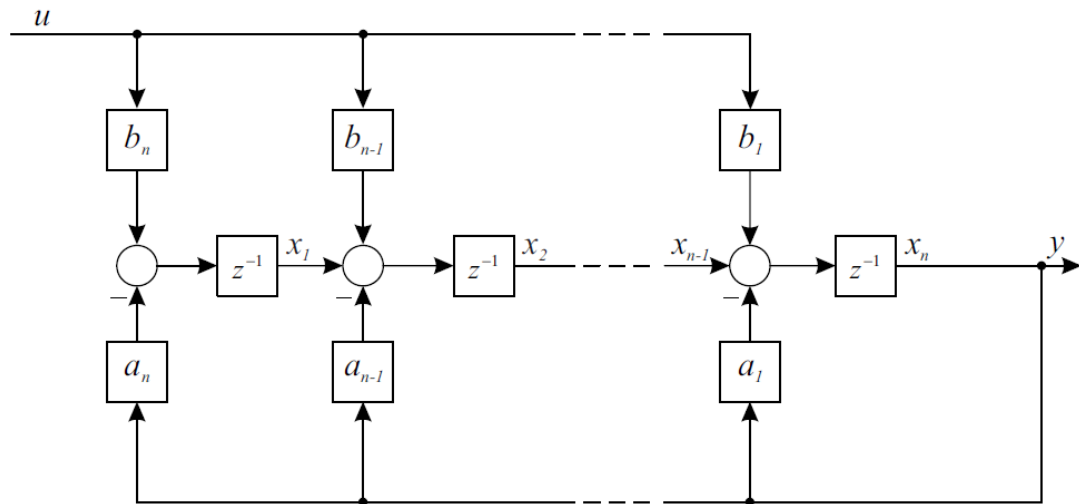
$$y(k) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

- sistemska matrika \mathbf{A} ima transponirano Frobeniusovo obliko, izhodni vektor \mathbf{c}^T enostavno obliko, vhodni vektor \mathbf{b} pa je določen s koeficienti števca prenosne funkcije sistema
- SOKO je torej dualna VRKO – sistemski matriki obeh oblik sta med seboj transponirani, izhodnemu vektorju ene oblike ustreza transponirani vhodni vektor druge oblike

208



- Zelo pogosto vhodno izhodna konstanta ($d = b_0$) enaka 0
- Realizacija sistema s SOKO enaka kot realizacija prenosne funkcije sistema z vgnezdno metodo



209

Transformacija sistema v SOKO



- Iščemo transformacijsko matriko \mathbf{T} , ki izhodiščni sistem pretvori v vodljivostno regulatorsko kanonično obliko:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}\mathbf{Q}_s)^{-1}$$

- \mathbf{Q}_s matrika spoznavnosti

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a_i koeficienti karakterističnega polinoma sistema:

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

- Produkt $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{Q}_s \mathbf{W}$ nesingularen, če je \mathbf{W} nesingularna (ima determinanto +1 ali -1) in \mathbf{Q}_s nesingularna (če sistem spoznaven)

- Potreben in zadostni pogoj za pretvorbo spoznavnost

210

Regulator stanj



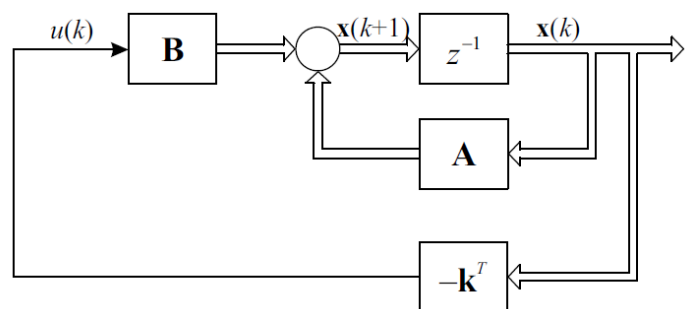
- Pri predmetu *Digitalno vodenje* bomo obravnavali zgolj načrtovanje vodenja za linearne časovno nespremenljive sisteme $\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$
- V takšnem primeru so praviloma tudi regulatorji oz. sistemi vodenja linearni in časovno nespremenljivi
- Ideja linearnega regulatorja stanj je zelo preprosta:
 - Regulirno veličino računamo kot linearno kombinacijo vseh stanj
 - Izkaže se, da lahko s primernim izborom uteži posameznih stanj v regulirni veličini pole povratnozančnega vodljivega sistema postavimo na poljubna mesta
 - Predpostavimo, da so vse spremenljivke stanja, ki jih vsebuje vodljivi proces dostopne in jih lahko točno izmerimo
 - Regulator stanj $u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k)$
 - Zaprtozančni sistem $\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}(k)$

211

Regulator stanj



- Zaprtozančni sistem $\mathbf{x}(k + 1) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}(k)$ interpretiramo kot homogeni sistem s sistemsko matriko $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$
- S primernim izborom \mathbf{k}^T dosežemo ustrezno dinamiko povratnozančnega sistema. Gotovo je eden prvih ciljev pri načrtovanju vodenja stabilnost povratnozančnega sistema
- Če je povratnozančni sistem asimptotično stabilen (vsi poli sistema ležijo znotraj kroga enote), vsa stanja sistema konvergirajo proti 0 → tovrsten način vodenja primeren za regulacijske namene (za sledilne potrebno ustrezno razširiti)



212



- Lego polov povratnozančnega sistema določimo z rešitvijo karakteristične enačbe povratnozančnega sistema pri znanem ojačenju regulatorja stanj \mathbf{k}^T :

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = 0$$

- Vidimo, da lahko s spreminjanjem povratnozančne matrike \mathbf{k}^T spreminjamo pole sistema
- Pri načrtovanju regulatorja želimo izbrati ojačenje regulatorja \mathbf{k}^T tako, da bodo povratnozančni poli ležali na želenih lokacijah
- Če je sistem podan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, postane problem določanja polov zelo enostaven



- Enačba stanj:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- Regulator stanj je določen z enačbo

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \mathbf{x}(k)$$

- Zaradi Frobeniusove oblike \mathbf{A} in enostavne oblike vektorja \mathbf{b} se enačba povratnozančnega sistema zelo poenostavi:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & -a_{n-2} - k_3 & \cdots & -a_1 - k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$



- Sistemska matrika povratnozančnega sistema ima spet Frobeniusovo obliko → karakteristična enačba sistema:
 $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = z^n + (a_1 + k_n)z^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})z^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$
- Izredno lepa lastnost sistema je, da vsak koeficient regulatorja stanj vpliva na en koeficient karakterističnega polinoma, pri čemer je ta zveza celo linearna
- Predpišimo torej želeni karakteristični polinom povratnozančnega sistema $z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n$
- Takšno delovanje dosežemo z naslednjim izborom:
 $k_1 = \alpha_n - a_n \quad k_2 = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad k_n = \alpha_1 - a_1$
- Regulator stanj v vektorski obliki:
 $\mathbf{k}^T = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1 - a_1]$

215

Regulator stanj - deadbeat



- Poseben primer nastopi, če postavimo vse pole povratnozančnega sistema v koordinatno izhodišče ravnine z (karakteristični polinom sistema je enak z^n)
- Regulacijski sistem ima končni nastavitveni čas – prehodni pojav se zaključi po končnem času
- Matrika regulatorja stanj ($\alpha_i=0$):
 $\mathbf{k}^T = [-a_n \quad -a_{n-1} \quad \dots \quad -a_1]$
- Takšen regulator stanj pripelje proces v n korakih iz poljubnega začetnega stanja $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ v končno stanje $\mathbf{x}(n) = \mathbf{0}$, kjer ostane za vedno
- Zgovorno je poimenovanje takšnega načina vodenja v angleški literaturi – *deadbeat control by state feedback*
 - Regulirni signal nesprejemljiv – ekstremne amplitude

216

Načrtovanje regulatorja stanj z metodo premikanja polov – proces ni v VRKO



- Če vodljiv sistem ni zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, ga vanjo vedno lahko pretvorimo
- Stanja diskretnega sistema \mathbf{x} pretvorimo v transformirana stanja sistema, ki je zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki, z upoštevanjem enačbe

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

- Transformacijska matrika \mathbf{T} določena z enačbo

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_v \mathbf{W}$$

- Regulator stanj za VRKO izračuna regulirno veličino iz transformiranih stanj:

$$u(k) = -[\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]\mathbf{x}_t(k)$$

217

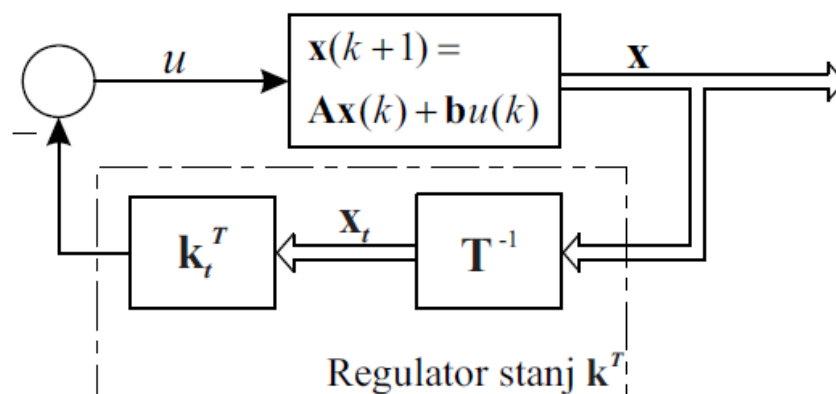
Načrtovanje regulatorja stanj z metodo premikanja polov – proces ni v VRKO



- Transformirana stanja lahko izračunamo iz originalnih stanj, zato se regulacijski zakon glasi:

$$u(k) = -[\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1](\mathbf{Q}_v \mathbf{W})^{-1}\mathbf{x}(k)$$

- Shematski prikaz regulatorja stanj za premikanje polov, če sistem ni zapisan v vodljivostni regulatorski kanonični obliki:



218



- Optimalni regulator stanj načrtamo z minimizacijo kriterijske funkcije
- Iščemo regulator stanj, ki generira iz vektorja stanj $\mathbf{x}(k)$ tak regulirni vektor $u(k)$, ki privede proces iz stanja $\mathbf{x}(0)$ v končno stanje $\mathbf{x}(N) \approx 0$ in pri tem minimizira naslednji kriterij

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k)]$$

- \mathbf{Q} pozitivno semidefinitna in simetrična matrika: $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$
- \mathbf{R} pozitivno definitna in simetrična matrika oz. pozitiven skalar R v primeru univariabilnih sistemov
- Teoretično zelo zahtevno

219



- Rešitev problema optimalnega regulatorja stanj:
$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(k+1) [\mathbf{I} - \mathbf{B} [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1)] \mathbf{A} + \mathbf{Q}$$
 - Nazaj obrnjena diferenčna enačba za \mathbf{P} , ki se imenuje *Riccatijeva diferenčna enačba* → rešujemo $\mathbf{P}(N-1), \mathbf{P}(N-2), \dots, \mathbf{P}(1), \mathbf{P}(0)$
 - Končni pogoj za $k = N$: $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}$
 - Enačba je nelinearna

- Regulatorska enačba:

$$u(k) = -\mathbf{K}_u(k) \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{K}_u(k) = [\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}$$

- Regulator stanj s časovno spremenljivim ojačenjem
- Če $N \rightarrow \infty$, dobimo stacionarno rešitev sistema oz. časovno nespremenljiv regulator → *linearni kvadratični regulator*

$$u(k) = -\bar{\mathbf{K}}_u \mathbf{x}(k) = (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} \mathbf{x}(k)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} [\mathbf{I} - \mathbf{B} (\mathbf{R} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}}] \mathbf{A}$$

220



- Regulator stanj predstavlja zelo enostaven način za doseganje zelene dinamike povratnozančnega sistema:
 - Njegova pomanjkljivost – za realizacijo morajo biti merljiva vsa stanja procesa, kar je še posebej pri procesih višjega reda dokaj omejujoča zahteva
 - Dostopnost vseh stanj namreč omejujejo razni dejavniki:
 - zelo pogosto gre za tehnološke omejitve, ko meritve določenih stanj niso mogoče, ker bi sama meritev predstavljala preveliko motnjo v procesu
 - ekonomski razlogi, ko bi izvedba meritev bila predraga
- Tudi če meritev stanj iz kakršnega koli razloga nimamo na voljo, jih lahko ocenimo z merjenjem ostalih spremenljivk
- Merjene spremenljivke so po definiciji izhodi procesa
- Če je proces spoznaven, je možno rekonstruirati stanja sistema

221



- Ker so običajno nekateri izhodi hkrati tudi stanja, le-teh ni potrebno ocenjevati
- V takih primerih pravimo, da gre za opazovalnik minimalnega reda za razliko od opazovalnika polnega reda, kjer ocenjujemo vsa stanja (torej tudi tista, ki jih merimo kot izhode)
- Smisel ocenjevanja stanj, ki jih hkrati merimo, je v dejstvu, da so meritve pošumljene in lahko opazovalnik stanj deluje tudi kot filter, ki skuša šum odstraniti – v nadaljevanju bomo spoznali najbolj znan tovrstni filter – Kalmanov filter

222



- Enačba stanj procesa pravi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

- V zgornji enačbi poznamo $u(k)$, ki ga vodimo v proces
- Če predpostavimo, da natančno poznamo model procesa (torej matriki \mathbf{A} in \mathbf{b}), lahko torej stanja procesa ocenimo z enačbo, ki je zelo podobna kot enačba stanj procesa

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k)$$

- oceno stanj označili z $\mathbf{x}^*(k)$
- če je začetna ocena vektorja stanj $\mathbf{x}^*(0)$ enaka vektorju stanj procesa $\mathbf{x}(0)$, ostane ocena stanj vedno enaka dejanskim stanjem
- Ker pa stanj ni mogoče meriti, tudi začetno stanje ni znano

223



- V takšnih primerih je potrebno zapisati dinamiko spreminjanja pogreška ocene stanj $\tilde{\mathbf{x}}(k)$, ki je definiran kot razlika med vektorjem stanj in njegovo oceno:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)$$

- Če enačbo ocen stanj odštejemo od enačbe stanj, dobimo

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k)$$

- Če je sistem asimptotično stabilen (vse lastne vrednosti matrike \mathbf{A} ležijo znotraj kroga enote), začetni pogrešek ocene stanj konvergira proti 0, pri čemer je dinamika konvergence določena z lastnimi vrednostmi matrike \mathbf{A}
- Če pa je sistem nestabilen, pogrešek ocene stanj divergira in takšen opazovalnik je neuporaben (neuporaben je tudi, če je konvergenca zelo počasna)

224



- Luenbergerjev opazovalnik stanj odpravlja pomanjkljivost odprtozančnega opazovalnika, pri katerem nimamo vpliva na dinamiko spreminjanja pogreška ocene stanj
- Ideja temelji na dejstvu, da je za oceno parametrov poleg vhodnega signala $u(k)$ smiselno upoštevati še merjeni izhod $y(k)$, ki ga definira izhodna enačba sistema (predpostavimo, da je vhodno-izhodna konstanta d enaka 0):

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k)$$

- Na podoben način lahko definiramo tudi oceno izhoda:

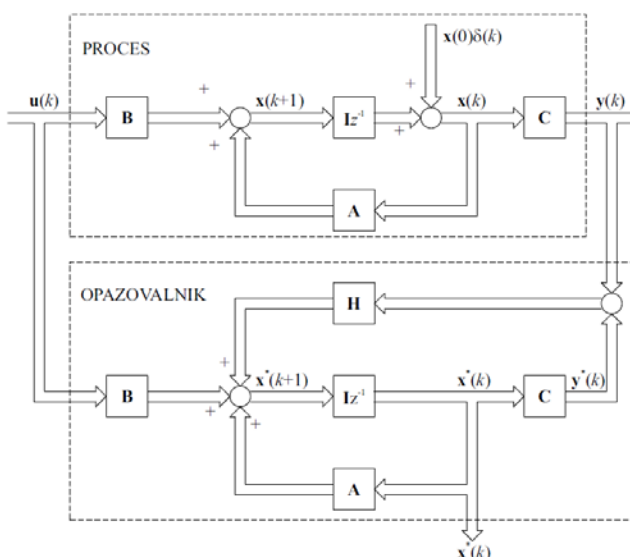
$$y^*(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)$$
- Izhodni pogrešek $y(k) - y^*(k)$ vsebuje dodatno informacijo o pogrešku ocene stanj, zato ga je smiselno upoštevati pri popravku ocene stanj

225



- Enačbi odprtozančnega ocenjevalnika dodamo še popravek zaradi izhodnega pogreška :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}[y(k) - y^*(k)] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}[\mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}\mathbf{c}^T [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{h}\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$



- Enačba pogreška

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$
- Sistemska matrika opazovalnika je $(\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)$
- Karakteristična enačba:

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T = 0$$

226



- Vektor \mathbf{h} vpliva na dinamiko pogreška ocene stanj $\tilde{\mathbf{x}}(k)$; velja tudi obratno – če želimo doseči določeno dinamiko pogreška ocene stanj, je potrebno ustrezno izbrati vektor \mathbf{h}
- Problem določitve vektorja \mathbf{h} je dualen problemu določitve vektorja \mathbf{k} pri določanju regulatorja stanj:
 - Dinamiko stanj pri uporabi regulatorja stanj določa matrika $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$, dinamiko pogreška ocene stanj pa matrika $(\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)$
 - Če matriko $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$ transponiram (s čimer se njene lastne vrednosti ne spremenijo), dobim matriko $(\mathbf{A}^T - \mathbf{k}\mathbf{b}^T)$
 - Za določitev \mathbf{h} lahko uporabim enake metode kot za določitev \mathbf{k} , če namesto \mathbf{A} upoštevam \mathbf{A}^T , namesto \mathbf{b} pa \mathbf{c} (prav takšna povezava velja med vodljivostno regulatorsko kanonično obliko in spoznavnostno observatorsko kanonično obliko)

227



- Glede na prejšnjo prosojnico lahko pričakujem identičen način načrtovanja opazovalnika na osnovi spoznavnostne observatorske kanonične oblike, kot smo ga predstavili za načrtovanje regulatorja na osnovi vodljivostne regulatorске kanonične oblike
- Če je proces zapisan v spoznavnostni observatorski kanonični obliki, ojačenje observatorja določimo s formulo:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \beta_n - a_n \\ \beta_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

- a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) so koeficienti karakterističnega polinoma procesa
- β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) so koeficienti zelenega kar. polinoma opazovalnika

228



- Pogrešek ocene stanj ni vodljiv glede na vhod $u(k)$, ker slednji v enačbi $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(k)$ ne nastopa eksplicitno – z vhomom na noben način ne moremo vplivati na spreminjanje pogreška ocene stanj
- Luenbergerjev opazovalnik stanj ima povsem ekvivalentno različico v teoriji zveznih dinamičnih sistemov (v predhodnih enačbah je potrebno zamenjati le predikcijo vektorja stanj z odvodom vektorja stanj, medtem ko so algoritmi za izračun koeficientov opazovalnika povsem enaki)

Trenutni opazovalnik stanj



- *Luenbergerjev opazovalnik stanj* imenujemo tudi *napovedni opazovalnik* (angl. *prediction estimator*), oceno $\mathbf{x}^*(k)$ pa *napovedana ocena* – za oceno trenutnega stanja $\mathbf{x}^*(k)$ uporabimo le pretekle meritve izhoda (vključno do $k-1$):
 - Napovedni opazovalnik oceno trenutnega stanja napove glede na pretekle meritve izhoda
- Ker imamo v trenutku k na voljo tudi meritev $y(k)$, je gotovo smiselno to meritev upoštevati pri oceni trenutnega stanja:
 - To naredimo enostavno tako, da pogrešek zaradi netočno napovedane ocene ($y(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k)$) upoštevamo pri izračunu trenutne ocene:
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{I}(y(k) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*(k))$$
 - \mathbf{I} je ojačenje trenutnega opazovalnika, vektor $\hat{\mathbf{x}}(k)$ pa imenujemo *trenutna ocena stanj*



- Napovedano oceno v naslednjem trenutku vzorčenja $\mathbf{x}^*(k + 1)$ izračunamo iz trenutne ocene v tekočem trenutku:

$$\mathbf{x}^*(k + 1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

- Enačbo lahko interpretiramo kot enačbo stanj, pri čemer imamo na levi strani napovedano oceno stanj, na desni pa trenutno oceno stanj
- V tej enačbi za razliko od Luenbergerjevega opazovalnika več ni eksplicitno prisoten korekcijski člen (člen, ki popravlja stanje glede na izhodni pogrešek opazovalnika)
- Korekcija je sedaj prisotna pri izračunu trenutne ocene
- Dinamika ocene stanj:

$$\mathbf{x}^*(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{A}\mathbf{l}(y(k) - \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*(k))$$

- Dobimo tako, da enačbo za $\hat{\mathbf{x}}(k)$ vnesemo v zgornjo enačbo
- Če zgornjo enačbo odštejemo od enačbe stanj procesa ($\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$), namesto $y(k)$ vnesemo $\mathbf{c}^T\mathbf{x}(k)$ ter upoštevamo $\tilde{\mathbf{x}}(k)$:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{l}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(k)$$



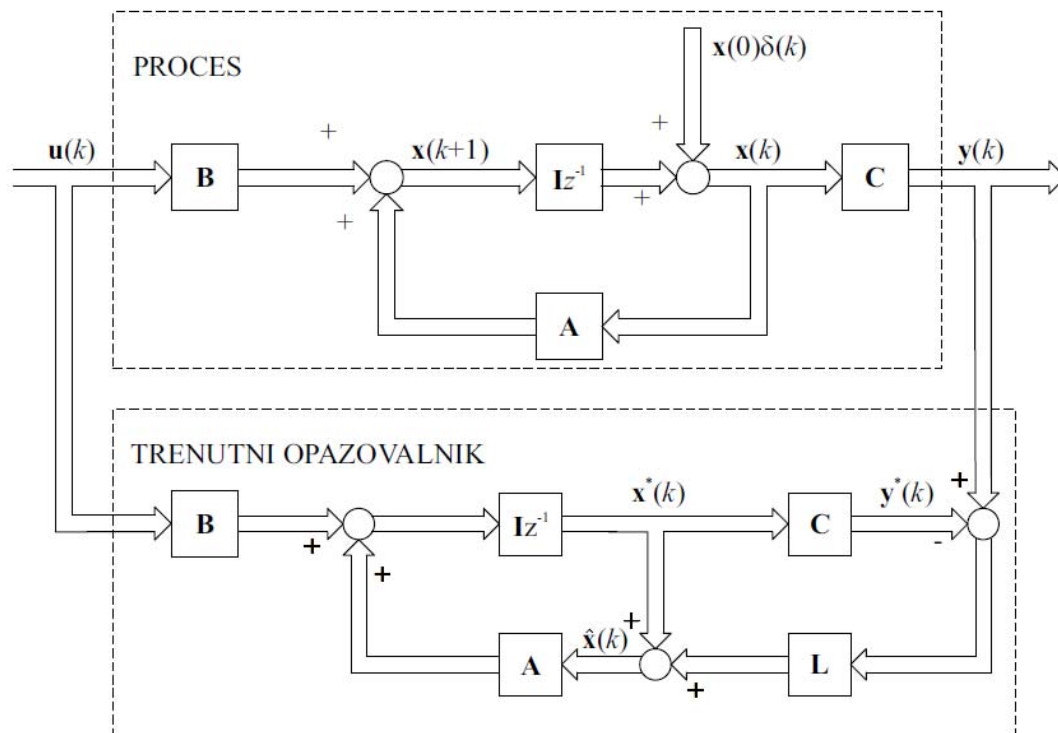
- Če primerjamo enačbi stanj za pogreška ocene Luenbergerjevega in trenutnega opazovalnika ugotovimo, da sta pogreška $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ ekvivalentna, če med ojačenjema velja relacija

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{l}$$

- Ker je pri obeh opazovalnikih pogrešek $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ definiran kot razlika med $\mathbf{x}(k)$ in $\mathbf{x}^*(k)$, smo ugotovili, da je napovedana ocena stanj $\mathbf{x}^*(k)$ trenutnega opazovalnika ekvivalentna oceni stanj $\mathbf{x}^*(k)$ Luenbergerjevega opazovalnika, če sta seveda ojačenji obeh opazovalnikov povezani, kot kaže enačba:

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{l}$$

Trenutni opazovalnik stanj



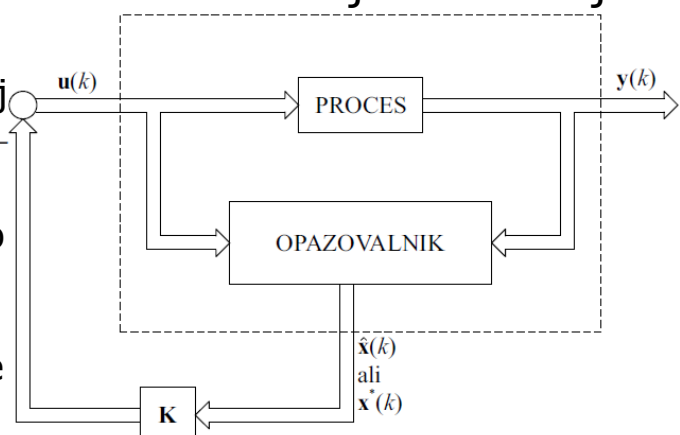
233

Regulator stanj na osnovi opazovalnika stanj



- Kot smo že povedali, je regulator stanj zelo privlačen način vodenja, saj na zelo pregleden način vplivamo na položaj polov zaprtozančnega sistema
- Vendar pa ima pristop pomembno pomanjkljivost – za njegovo realizacijo moramo imeti namreč merljiva vsa stanja v procesu:

- Sedaj bomo v regulatorju stanj uporabili oceno stanj iz opazovalnika
- Preden to storimo, je potrebno ta pristop teoretično upravičiti oz. pokazati, kakšne so posledice uporabe kombinacije opazovalnika in regulatorja



234



- Če za oceno stanj uporabimo Luenbergerjev opazovalnik, se regulacijski zakon glasi:

$$u(k) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}^*(k)$$

- Blok PROCES je dinamični sistem n -tega reda z vektorjem stanj \mathbf{x} , blok OPAZOVALNIK je prav tako dinamični sistem n -tega reda, katerega vektor stanj je \mathbf{x}^* , vektor \mathbf{K} pa je statični sistem (množenje s konstanto)
- Celotni povratnozančni sistem je reda $2n$
- Vektor stanj je dolžine $2n$ in je sestavljen iz vektorja stanj procesa \mathbf{x} in pogreška ocene vektorja stanj $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow$ slednjega bomo uporabili namesto \mathbf{x}^* zaradi bolj ugodne oblike enačb, je pa ta korak upravičen, saj zaradi linearnosti sistema nekaterim stanjem lahko prištejemo ali odštejemo linearno kombinacijo ostalih stanj

235



- Ko regulirno veličino vnesemo v enačbo stanj procesa in upoštevamo še enačbo pogreška ocene stanj, dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \mathbf{x}^*(k) = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}\mathbf{k}^T (\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}(k) + \\ &\mathbf{b}\mathbf{k}^T \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

- Enačba določa predikcijo stanj procesa glede na vektorja $\mathbf{x}(k)$ in $\tilde{\mathbf{x}}(k)$
- Enačba $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T) \tilde{\mathbf{x}}(k)$ določa predikcijo pogreška ocene stanj, ki je seveda neodvisna od stanj procesa
- Obe enačbi lahko združimo v naslednjo matrično enačbo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

- Enačba stanj celotnega povratnozančnega sistema
- Pole povratnozančnega sistema dobimo, če določimo lastne vrednosti sistemske matrike $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix}$

236



- Poiskali bomo karakteristični polinom celotnega sistema:

$$\det \left\{ z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix}$$

- Prva matrika \mathbf{I} dimenzije $2n \times 2n$, ostali dve pa sta dimenzije $n \times n$
- Karakteristični polinom sistema dobimo tako, da poiščemo determinanto matrike dimenzije $2n \times 2n$, ki je sestavljena iz štirih matrik dimenzije $n \times n$
- Matrična algebra pravi:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{D})\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

- \mathbf{A} in \mathbf{D} kvadratni matriki, dimenziji matrik \mathbf{B} in \mathbf{C} pa sta takšni, da ju lahko skupaj s preostalima matrikama zložimo v kvadratno matriko (to pomeni, da matriki \mathbf{B} in \mathbf{C} nista nujno kvadratni)
- Poseben primer dobimo, če je katera od matrik \mathbf{B} ali \mathbf{C} ničelna:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$$

237



- Karakteristični polinom povratnozančnega sistema je torej:

$$\det \left\{ z\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{h}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \right\} = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{h}\mathbf{c}^T)$$

- Karakteristični polinom celotnega sistema določen kot produkt kar. polinoma regulatorja stanj in kar. polinoma opazovalnika
- Kar. polinom regulatorskega dela je odvisen od \mathbf{k} , ni pa odvisen od \mathbf{h} ; kar. polinom opazovalnika je odvisen od \mathbf{h} , ni pa odvisen od \mathbf{k}
- Poli sistema so unija polov regulatorja stanj in polov opazovalnika stanj, pri čemer z regulatorjem ne pokvarimo opazovalnika, z opazovalnikom pa ne pokvarimo regulatorja
- Ta lastnost je poseben primer principa ločitve (angl. *separation principle*) – ta princip zagotavlja upravičenost predlagane regulacijske sheme – opazovalnik in regulator načrtujemo neodvisno, ob združitvi se poli ne spremenijo

238



- Tudi če uporabimo trenutni opazovalnik, velja princip ločitve
- Regulator in opazovalnik načrtujemo ločeno:
 - Kam postaviti pole regulatorja in kam pole opazovalnika?
 - Običajno načrtamo pole opazovalnika tako, da so pripadajoče časovne konstante dvakrat do šestkrat krajše kot časovne konstante regulatorskega dela
 - Zavedati se je potrebno določenih omejitev pri izboru želenih polov:
 - Če izberemo prehitre pole regulatorja, je to potrebno plačati s (pre)velikimi regulirnimi akcijami, ki so bodisi predrage (cena regulirne akcije narašča z amplitudo regulirnega signala) ali nesprejemljive s tehnološkega vidika (regulirna veličina je zaradi praktične izvedbe izvršnega člana vedno omejena)
 - Hitri poli opazovalnika ne povzročijo visokih amplitud regulirnega signala, pač pa velike korekcije ocenjenih stanj – problematične, če je na merjenih signalih prisoten šum velike amplitude – nepotrebni popravki ocenjenih stanj, ki sledijo motnjam in šumom v meritvi

239



- Optimalni opazovalnik stanj na osnovi zaporedja pošumljenih meritev proizvede zaporedje optimalnih ocenjenih vektorjev stanja
- Ocene so optimalne v smislu minimizacije pričakovane srednje kvadratne napake med oceno stanja in dejanskim stanjem
- Podobno kot je veljalo, da je Luenbergerjev opazovalnik dualen regulatorju stanj, se bo izkazalo, da je Kalmanov filter dualen optimalnemu regulatorju stanj
- Zato se ojačenje opazovalnika sproti spreminja, s čimer dosežemo omenjeno optimalnost
- Posvetili se bomo splošnemu primeru optimalnega ocenjevanja sistemov z več vhodi in več izhodi

240



- Predpostavili bomo, da sta vektor stanj in izhodni vektor motena z Gaussovimi šumi
- Enačba stanj procesa se torej glasi:
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}\mathbf{v}(k)$$
 - Prvi del enačbe stanj takšen kot običajno, zadnji člen pa modelira prispevek šuma na stanjih
- Šumov seveda ne moremo meriti, poznamo pa nekatere njihove statistične lastnosti, zato bomo v nadaljevanju pogosto uporabljali operator matematičnega upanja naključne spremenljivke
- Matematično upanje naključne spremenljivke X bomo označili z $\mathbb{E}[X]$

241



- Procesni šum (dimenzije $p \times 1$) $\mathbf{v}(k)$:
 - ima ničelno srednjo vrednost ($\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)] = \mathbf{0}$)
 - vrednosti so med različnimi časovnimi trenutki časovno neodvisne
$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(i)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{0} \quad i \neq j$$
 - njegova kovariančna matrika je enaka
$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = \mathbf{V}$$
 - to pomeni, da je procesni šum t.i. beli šum
 - matrika \mathbf{F} se imenuje vhodna matrika procesnega šuma (dim. $n \times p$)
- Izhodna enačba sistema se z dodatkom šuma glasi:
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k)$$
 - $\mathbf{n}(k)$ je merilni šum dimenzije $l \times 1$ z ničelno srednjo vrednostjo, vrednosti šuma so med različnimi časovnimi trenutki časovno neodvisne, njegova kovariančna matrika pa je enaka $\mathbf{N} \rightarrow$ tudi ta šum je bel

242



- Predpostavimo, da so izpolnjeni naslednji pogoji:
 - Matrike A , B in C zapisa procesa v prostoru stanj so natančno poznane
 - V vsakem trenutku poznamo tudi vhodno veličino procesa $u(k)$
 - Procesni šum $v(k)$ in merilni šum $n(k)$ sta med seboj nekorelirana bela šuma z ničelno srednjo vrednostjo, katerih kovariančni matriki V in N sta znani
 - Poznana je tudi vhodna matrika procesnega šuma F
 - Podani sta tudi ocena začetnega vektorja stanj $\hat{x}(0)$ in kovariančna matrika te ocene $\hat{P}(0)$
- Potrebno je poudariti, da je problem mogoče rešiti tudi, če so nekatere od zgornjih zahtev kršene, vendar te zahteve predstavljajo klasične predpostavke pri izpeljavi Kalmanovega filtra

243



- Kalmanov filter bi lahko opredelili kot trenutni opazovalnik, vendar se za razliko od obravnavanega trenutnega opazovalnika njegovo ojačenje s časom spreminja
- Tudi pri Kalmanovem filtru bomo uporabljali dve oceni vektorja stanj:
 - Napovedana ocena (s tujko *a priori*) $x^*(k)$ je ocena vektorja stanj, ki temelji na meritvah do vključno trenutka $(k - 1)$
 - Trenutna ocena (s tujko *a posteriori*) $\hat{x}(k)$ je ocena vektorja stanj, ki temelji na meritvah do vključno trenutka k
- Dve oceni vektorja stanj, zato tudi dve kovariančni matriki pogreška ocene (matematični upanji kvadrata pogreška):

$$P^*(k) = \mathbb{E} [(x^*(k) - x(k))(x^*(k) - x(k))^T]$$

$$\hat{P}(k) = \mathbb{E} [(\hat{x}(k) - x(k))(\hat{x}(k) - x(k))^T] \rightarrow \text{Kalman minimizira}$$

244

Algoritem Kalmanovega filtra



- Na osnovi $\hat{\mathbf{x}}^*(k-1)$ določimo $\mathbf{x}^*(k)$:
$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^*(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$
 - Ta korak si lahko pripravimo vnaprej (ko čakamo na meritve ob k)
- Na osnovi $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$ tvorimo kovariančno matriko $\mathbf{P}^*(k)$:
$$\mathbf{P}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}(k-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T$$
 - Tudi ta korak si lahko pripravimo vnaprej
- Na osnovi $\mathbf{P}^*(k)$ določimo Kalmanovo ojačenje $\mathbf{L}(k)$:
$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k)\mathbf{C}^T + \mathbf{N}]^{-1}$$
 - Tudi ta korak si lahko pripravimo vnaprej
- Ko dobimo meritev izhoda $\mathbf{y}(k)$, določimo $\hat{\mathbf{x}}(k)$:
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{L}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}^*(k)]$$
- Izračunamo $\hat{\mathbf{P}}(k)$ na osnovi $\mathbf{P}^*(k)$:
$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{P}^*(k) - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}\mathbf{P}^*(k)$$

245

Stacionarni Kalmanov filter



- V praksi je zanimiva rešitev Kalmanovega filtra v ustaljenem stanju ($k \rightarrow \infty$)
- Matrika \mathbf{L} postane konstantna in ima naslednjo obliko:

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T + \mathbf{N})^{-1}$$

- $\bar{\mathbf{P}}^*$ je rešitev stacionarne matrične Riccatijeve enačbe (ali algebrajske Riccatijeve enačbe):
$$\bar{\mathbf{P}}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}^*(N) = \mathbf{F}\mathbf{V}\mathbf{F}^T + \mathbf{A}\bar{\mathbf{P}}^* [\mathbf{I} - \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}^* \mathbf{C}^T + \mathbf{N})^{-1} \mathbf{C}\bar{\mathbf{P}}^*] \mathbf{A}$$
- Pri stacionarnem Kalmanovem filtru je Kalmanovo ojačenje konstantno (se ne spreminja s časom), algoritem pa:
 - (Ko čakamo na vzorec k), na osnovi $\hat{\mathbf{x}}(k-1)$ določimo $\mathbf{x}^*(k)$:
$$\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)$$
 - Ko dobimo meritev izhoda $\mathbf{y}(k)$, določimo $\hat{\mathbf{x}}(k)$:
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}^*(k)]$$

246

Stacionarni Kalmanov filter



- Algoritem stacionarnega Kalmanovega filtra je torej povsem enak kot algoritem trenutnega opazovalnika
- Ta dva algoritma za oceno stanj se ločita le v načinu določitve ojačenja **L**:
 - Pri obeh algoritmih za izračun potrebujemo matriki **A** in **C**
 - Pri trenutnem opazovalniku smo morali podati še zelene pole opazovalnika, pri Kalmanovem filtru pa lastnosti motilnih signalov (matrike **F**, **V** in **N**)

247

Princip dualnosti



- Matematični izrazi, ki opisujejo optimalni regulator stanj in Kalmanov filter, so si zelo podobni
- Ustrezna povezava je podana v spodnji tabeli 2:
- Pri optimalnem regulatorju stanj ustreza utežnostna matrika **R** vektorja **u** kovariančni matriki šuma na izhodu (merilnega šuma) Kalmanovega filtra **N**
- Podobno ustreza matrika **Q** kovariančni matriki procesnega šuma **FVF^T**

Optimalni regulator stanj	Kalmanov filter
$-k$	k
A	A^T
B	C^T
b	c
K	H^T
R	N
Q	FVF^T

248