

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za elektrotehniko

**DISKRETNİ REGULACIJSKI  
SISTEMI**  
Zbirka rešenih problemov

Sašo Blažič

Ljubljana 2008



# Predgovor

Delo je namenjeno študentom četrtega letnika smeri Avtomatika na univerzitetnem študiju programa Elektrotehnika. Vsebuje rešene primere problemov s področja diskretnih sistemov. Za lažje razumevanje so v gradivu najprej podane osnove teoretičnega ozadja obravnavane problematike. Tudi pri rešitvah nalog so na praktičnih primerih obravnavane nekatere teoretične vsebine. Vsebina skripte se dopolnjuje z učbenikom Diskretni regulacijski sistemi (Drago Matko, Založba ZAFER, Ljubljana, 1991).

Gradivo je razdeljeno na osem poglavij in dodatek. Prvo poglavje podaja osnove zapisa in prikazovanja diskretnih signalov. Drugo in tretje poglavje obravnavata z-transformacijo in inverzno z-transformacijo. Reševanje diferenčnih enačb in pomen diskretne prenosne funkcije za računanje odzivov diskretnih sistemov sta temi četrtega poglavja. V petem poglavju je podan frekvenčni odziv diskretnih sistemov. Šesto poglavje obravnava pretvorbo zveznih dinamičnih sistemov v diskretni prostor. Zapis sistema v prostoru stanj je podan v sedmem poglavju. Obravnavani so ekvivalentni sistemi, ki jih dobimo s pomočjo transformacije sistema, odzivi sistema na začetno stanje in na vzbujanje, povezava zapisa v prostoru stanj in s prenosno funkcijo, diskretizacija sistema ter vodljivost in spoznavnost. Osmo poglavje obravnava stabilnost diskretnih sistemov in kriterije za njegovo ugotavljanje (Modificirani Routhov kriterij, Juryjev stabilnostni kriterij, direktno metodo Ljapunova in Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme). Dodatek vsebuje tabelo z z-transformacijami.

Za nastanek dela so zaslužni mnogi sedanji in bivši sodelavci Laboratorija za modeliranje, simulacijo in vodenje ter Laboratorija za avtomatizacijo in informatizacijo procesov. V prvi vrsti se zahvaljujem prof. dr. Dragu Matku za pomoč in številne koristne nasvete. Zahvala gre tudi vsem asistentom, ki so v preteklosti vodili vaje pri omenjenem predmetu in prispevali svoj delež k sedanjemu izgledu gradiva.

Ljubljana, april 2007

Sašo Blažič



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Diskretni signali</b>	<b>1</b>
1.1	Zapis in prikazovanje diskretnih signalov . . . . .	1
1.2	Vzorčeni signali . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Z-transformacija</b>	<b>7</b>
2.1	Definicija z-transformacije . . . . .	7
2.2	Teoremi z-transformacije . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Inverzna z-transformacija</b>	<b>17</b>
3.1	Izračun inverzne z-transformacije s pomočjo uporabe tabel z-transformacije . . . . .	18
3.2	Izračun inverzne z-transformacije s pomočjo izreka o residuih . . .	20
3.3	Izračun inverzne z-transformacije z uporabo metode parcialnih ulomkov	22
3.4	Izračun inverzne z-transformacije z uporabo metode deljenja . . .	25
<b>4</b>	<b>Diferenčne enačbe in diskretna prenosna funkcija</b>	<b>29</b>
4.1	Diferenčne enačbe . . . . .	29

4.2	Diskretna prenosna funkcija . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Frekvenčni odziv diskretnih sistemov</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Pretvorba zveznih dinamičnih sistemov v diskretni prostor</b>	<b>41</b>
6.1	Metoda bilinearne transformacije . . . . .	42
6.2	Metoda stopničaste invariance . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Zapis sistema v prostoru stanj</b>	<b>55</b>
7.1	Ekvivalentni sistemi . . . . .	58
7.2	Odziv sistema na začetno stanje in odziv sistema na vzbujanje . .	60
7.3	Povezava zapisa v prostoru stanj z zapisom s prenosno funkcijo . .	63
7.4	Diskretizacija sistema . . . . .	64
7.5	Vodljivost, spoznavnost . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Stabilnost diskretnega sistema</b>	<b>69</b>
8.1	Modificirani Routhov kriterij . . . . .	70
8.2	Juryjev stabilnostni kriterij . . . . .	72
8.3	Direktna metoda Ljapunova . . . . .	76
8.4	Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme . . . .	81
<b>A</b>	<b>Tabela z-transformacije</b>	<b>85</b>

# Poglavje 1

## Diskretni signali

Signali predstavljajo pomemben koncept sistemske teorije. Z njimi predstavimo časovni potek neke veličine. V naravi so praktično vsi signali zvezni – tako po amplitudi kot tudi po času. Pojem *diskretni signal* je povezan s časovno diskretizacijo signala. Gre torej za odvisno spremenljivko, ki je definirana le v diskretnih točkah pripadajoče neodvisne spremenljivke. Pri uporabi v vodenju diskretne signale običajno dobimo z vzorčenjem zveznih signalov. Zaradi izvedbe vzorčevalnika in načina shranjevanja signalov na digitalnem računalniku so vzorčeni signali v vodenju diskretizirani tudi po amplitudi (postopek vzorčenja po amplitudi imenujemo kvantizacija). Takim signalom pravimo *digitalni signali*.

### 1.1 Zapis in prikazovanje diskretnih signalov

Diskretni signal si lahko predstavljamo kot neskončno zaporedje števil. Signal ima poljubno ime, ki ga običajno pišemo z malo začetnico. Neodvisna spremenljivka, ki jo običajno označujemo s  $k$ , lahko zavzame poljubno celo število. Primer diskretnega signala je  $x(k)$ :

$$x(k) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\} \quad (1.1)$$

Pri zapisu v enačbi (1.1) je potrebno opozoriti na dve pomanjkljivosti:

- Iz zapisa ni lepo razvidno, kateri vrednosti neodvisne spremenljivke  $k$  pripada kateri element. Običajno se signali sicer začnejo pri  $k = 0$ , ni pa

nujno. Nekateri avtorji to rešujejo tako, da pod elementom pri  $k = 0$  narišejo puščico:

$$x(k) = \{ \underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \} \quad (1.2)$$

- Ker je zaporedje v enačbi (1.1) predstavljeno kot neskončno zaporedje, je nemogoče enolično določiti nadaljevanje. Četudi se nam zdi, da lahko kakšno enostavno zaporedje predstavimo le z nekaj členi, je mogoče določiti neskončno bolj kompleksnih zaporedij, ki imajo enak začetni del.

Zgornji težavi odpravimo, če člen zaporedja zapišemo analitično. Za primer iz enačbe (1.1) bi torej zapisali:

$$x(k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} & k = 2l, l \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & k = 2l + 1, l \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

kjer  $\mathbb{N}_0$  označuje množico pozitivnih celih števil, ki vključuje tudi element 0:  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  ( $\mathbb{Z}^+$  je množica pozitivnih celih števil). Obravnavani signal je mogoče zapisati na še bolj kompakten način:

$$x(k) = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (1.4)$$

V programskem paketu MATLAB je risanju diskretnih signalov namenjena funkcija `stem`. Tako bi lahko obravnavani signal narisali z naslednjim zaporedjem ukazov:

```
k = 0:10; % signal izrisujemo na intervalu [0,10]
x = cos(k * pi/2);
stem(k,x,'--')
axis([-0.5 10.5 -1.1 1.1]) %spremenimo mejne vrednosti koordinatnih osi
```

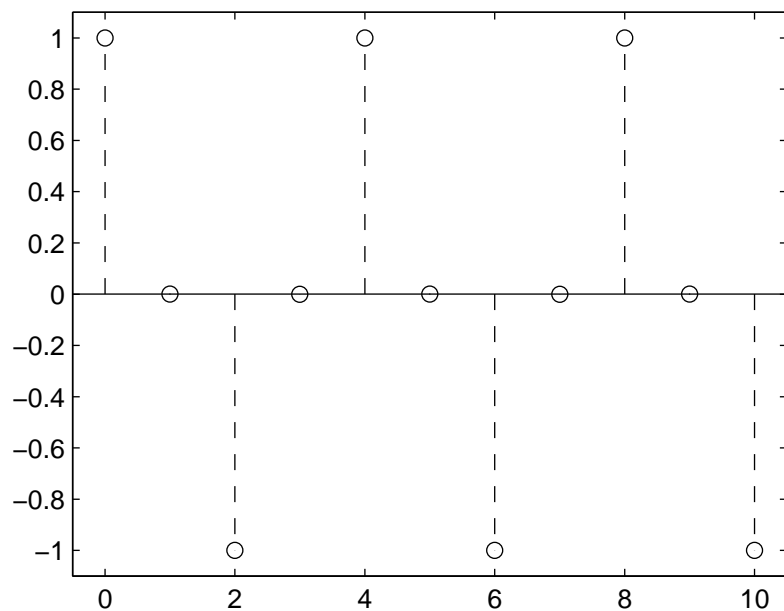
Rezultat zgornje kode je prikazan na sliki 1.1. Funkcija `stem` ima podobne parametre kot funkcija `plot` za risanje zveznih signalov.

## 1.2 Vzorčeni signali

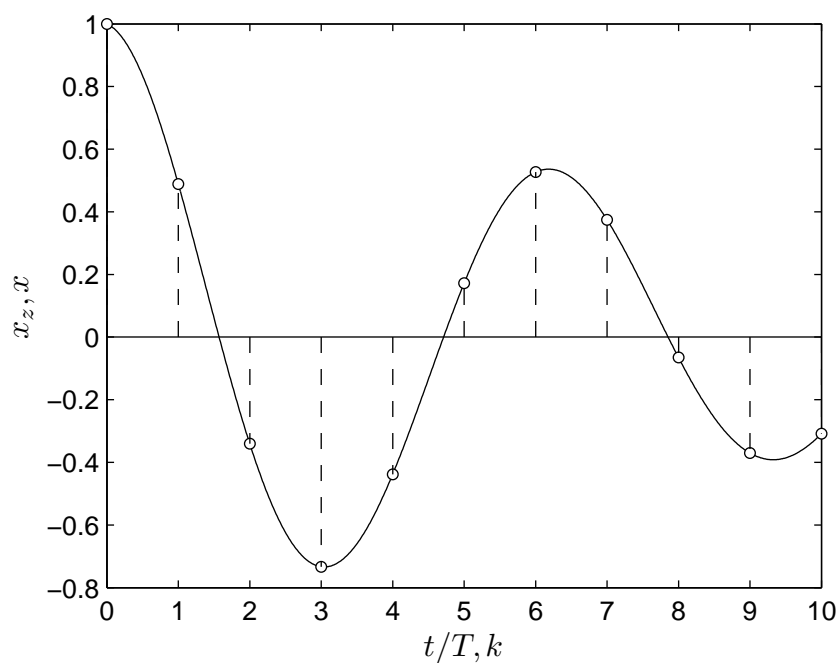
V splošnem ni nujno, da je diskretni signal dobljen z vzorčenjem zveznega signala, čeprav pri diskretnih regulacijskih sistemih to pogosto drži. Če vzorčimo zvezni signal  $x_z(t)$  s periodo vzorčenja  $T$ , dobimo diskretni signal  $x(k)$ :

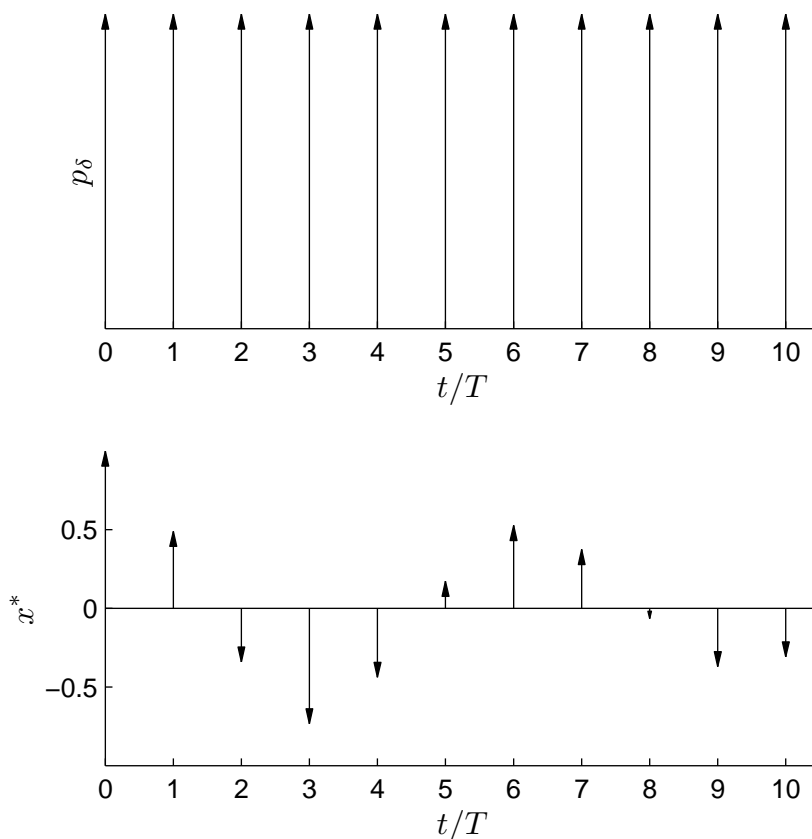
$$x(k) = x_z(t)\Big|_{t=kT} = x_z(kT) \quad (1.5)$$





Slika 1.1: Izris diskretnega signala iz enačbe 1.4 z MATLABovo funkcijo stem

Slika 1.2: Zvezni signal  $x_z(t)$  in vzorčeni signal  $x(k) = x_z(kT)$



Slika 1.3: Vlak enotinih impulzov (zgoraj) in vzorčeni signal  $x^*(t)$  (spodaj)

Slika 1.2 prikazuje primer zveznega signala  $x_z(t)$ . Na sliki je prikazan tudi vzorčeni signal  $x(k) = x_z(kT)$ .

Pri teoretični obravnavi signalov igra zelo pomembno vlogo *idealno impulzno vzorčenje*. Ključno vlogo pri idealnem impulznem vzorčenju igra vlak enotinih impulzov

$$p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.6)$$

ki je prikazan na sliki 1.3 (zgoraj). Enotini impulzi so prikazani simbolno, saj gre za neskončno visoke in neskončno ozke impulze s ploščino 1. Če zvezni signal  $x_z(t)$  pomnožimo z vlakom enotinih impulzov  $p_\delta(t)$ , dobimo *vzorčeni signal*  $x^*(t)$ :

$$x^*(t) = x_z(t)p_\delta(t) = x_z(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_z(kT)\delta(t - kT) \quad (1.7)$$

Enačba (1.7) govori o tem, da je tudi vzorčeni signal  $x^*(t)$  vlak impulzov, pri čemer je ploščina pod impulzom ob času  $t = kT$  enaka amplitudi zveznega signala

ob tem istem času, torej  $x_z(kT)$  oz.  $x(k)$ . Vzorčeni signal  $x^*(t)$ , ki je pridobljen z vzorčenjem signala  $x(t)$  na sliki 1.2, je simbolno prikazan na sliki 1.3 (spodaj).

**Primer 1.1** *Obravnavamo zvezni signal:*

$$x_z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t + 1 & 0 \leq t < 8 \\ 0 & t \geq 8 \end{cases} \quad (1.8)$$

*Določite vzorčeni signal  $x^*(t)$ , če je perioda vzorčenja enaka 2.*

Z upoštevanjem enačbe (1.7) dobimo:

$$x^*(t) = \delta(t) + 3\delta(t - 2) + 5\delta(t - 4) + 7\delta(t - 6) \quad (1.9)$$

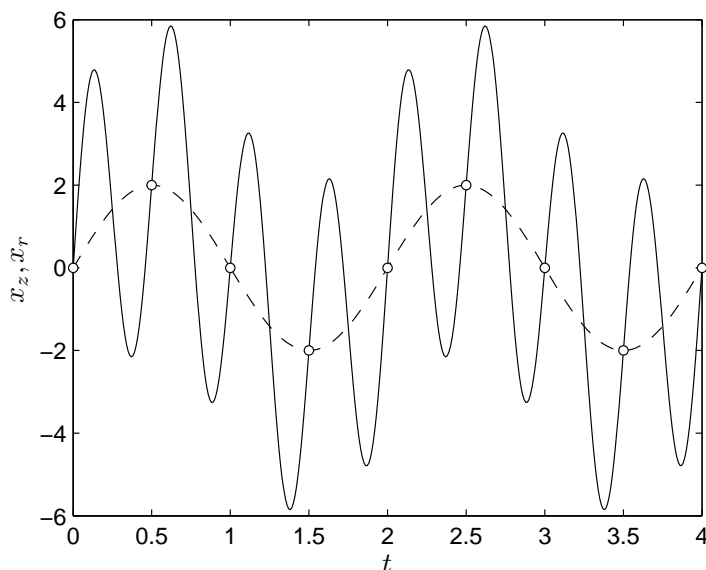
■

Primer 1.1 je odprl še eno vprašanje: Kako je z vzorčenjem nezveznih signalov? Problem seveda predstavljajo vzorci, ki nastopijo v trenutku nezveznosti signala. V enačbi (1.8) je navedeno, kakšni sta vrednosti  $x_z(0)$  in  $x_z(8)$ . Če vrednost signala v trenutku nezveznosti ni eksplicitno podana ali pa je signal podan v grafični obliki, načeloma pri diskretizaciji upoštevamo pravilo desne limite, kar pomeni:

$$x(k) = \lim_{t \rightarrow (kT)^+} x_z(t) \quad (1.10)$$

kjer znak + nakazuje, da izračunamo limito, ko se  $t$  približuje  $kT$  z desne.

Pri vzorčenih signalih ne gre prezreti dejstva, da se večino informacije na prvi pogled izgubi. Diskretni signal nosi informacijo le o vrednosti zveznega signala v trenutkih vzorčenja, ves interval med trenutki vzorčenja pa je prezrt. Na srečo pa zadeva ni tako resna, saj *teorem o vzorčenju* pravi, da lahko frekvenčno omejeni signal teoretično rekonstruiramo iz diskretnih vzorcev, če je frekvenca vzorčenja vsaj dvakrat višja od najvišje frekvence signala. Če ta pogoj ni izpolnjen, pride do t. i. zgibanja frekvenc. Vse frekvence v signalu, ki presegajo polovico frekvence vzorčenja, se pri rekonstrukciji predstavijo kot nižje frekvence, s čimer smo v vzorčeni signal vnesli nepopravljivo napako. Pojav zgibanja frekvenc je razlog, da polovico frekvence vzorčenja imenujemo tudi *frekvenca zgibanja*. Zanimivo je, kaj se zgodi s frekvenco signala, ki je ravno pol manjša od frekvence vzorčenja. Takrat rekonstrukcija signala iz diskretnih vzorcev ravno tako ni mogoče, saj ni mogoče enolično definirati niti faze niti amplitude signala. Strogo gledano torej teorem o vzorčenju zahteva, da moramo signal vzorčiti s frekvenco, ki je več kot dvakrat višja od najvišje frekvence v signalu.



Slika 1.4: Zvezni signal  $x_z(t)$  (neprekinjena črta), rekonstruirani signal  $x_r(t)$  (črtkana črta), vzorčni signal (krožci)

**Primer 1.2** *Obravnavamo zvezni signal:*

$$x_z(t) = 2 \sin(\pi t) + 4 \sin(4\pi t) \quad (1.11)$$

*Kolikšna je najmanjša frekvenca, s katero je potrebno vzorčiti signal, da pri rekonstrukciji ne pride do napake zaradi zgibanja frekvenc. Kako izgleda rekonstruirani zvezni signal, če signal  $x_z$  vzorčimo s frekvenco, ki je pol nižja od prej določene najmanjše dopustne frekvence vzorčenja.*

V signalu sta zastopani frekvenci 0,5 Hz in 2 Hz. Najvišja frekvenca v signalu (imenujemo jo tudi *Nyquistova frekvenca*) je 2 Hz, torej je potrebno signal vzorčiti s frekvenco, višjo od 4 Hz. Drugi del od nas zahteva rekonstrukcijo signala pri vzorčenju s frekvenco 2 Hz. Prvi člen signala  $x_z(t)$  izpolnjuje zahteve teorema o vzorčenju, za drugi člen pa velja:

$$4 \sin(4\pi t) \Big|_{t=kT=k/2} = 4 \sin(2\pi k) = 0 \quad (1.12)$$

Zgornji izraz je enak 0, ker je  $k$  celo število. Rekonstruirani zvezni signal  $x_r(t)$  je torej enak:

$$x_r(t) = 2 \sin(\pi t) \quad (1.13)$$

Na sliki 1.4 so prikazani  $x_z(t)$  z neprekinjeno črto,  $x_r(t)$  s črtkano črto in vzorci diskretnega signala s krožci.

## Poglavje 2

# Z-transformacija

Z-transformacija je linearni operator, ki operira nad diskretnim signalom in daje kot rezultat z-transformiranko.

### 2.1 Definicija z-transformacije

Z-transformacija  $X(z)$  diskretnega signala  $x(k)$  je definirana kot:

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (2.1)$$

Potrebno je povedati, da mora signal  $x(k)$  izpolnjevati nekaj pogojev, da z-transformiranka obstaja in je enolična. Ti pogoji so v glavnem povezani s konvergenco zgornje neskončne vrste. Pomembno je tudi dejstvo, da mora biti vrednost signala pri negativnih vrednostih  $k$  enaka 0.

**Primer 2.1** *Določite z-transformacijo geometričnega zaporedja:*

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Z-transformacijo izračunamo po definiciji (2.1):

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (2.3)$$

Zgornja neskončna vrsta konvergira, če  $|az^{-1}| < 1$  oz.  $|z| > |a|$ . Konvergenčno področje vrste oz. del ravnine  $z$ , kjer  $X(z)$  konvergira, ne bo predmet naše obravnave. Podobno kot pri Laplaceovi transformaciji bomo te vidike prezrli in uporabljali z-transformacijo kot inženirji na pragmatičen način. ■

Iz z-transformacije geometričnega zaporedja lahko izpeljemo z-transformacijo dveh signalov, ki smo ju pogosto uporabljali pri zveznih regulacijskih sistemih, podobno vlogo pa imata tudi pri diskretnih regulacijskih sistemih. Gre za enotino stopnico in eksponentno funkcijo  $e^{bkT}$  (ki je dobljena z vzorčenjem  $e^{bt}$ ).

**Primer 2.2** Določite z-transformacijo enotine stopnice:

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Enotino stopnico dobimo, če v enačbi (2.2) namesto  $a$  vstavimo 1. Torej je z-transformacija enotine stopnice enaka:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (2.5)$$

Pri transformaciji stopnice smo predstavili dve različici z-transformiranke. Obe se pogosto uporabljata, tako da je izbira, katero uporabiti, pogosto stvar osebnih preferenc. Res pa je, da so nekatere operacije bolj prikladne s prvo, druge spet z drugo različico. ■

**Primer 2.3** Določite z-transformacijo eksponentne funkcije:

$$x(k) = \begin{cases} e^{bkT} & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Eksponentna funkcija  $e^{bkT}$  je ekvivalentna geometričnemu zaporedju  $a^k$ , če velja  $a = e^{bT}$ . Torej lahko zapišemo:

$$\mathcal{Z} \{e^{bkT}\} = \frac{1}{1 - e^{bT}z^{-1}} \quad (2.7)$$

■

**Primer 2.4** Določite z-transformacijo sinusne funkcije:

$$x(k) = \begin{cases} \sin(\omega kT) & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ker lahko harmonično funkcijo zapišemo kot vsoto eksponentnih funkcij, lahko zaradi linearnosti z-transformacije dobimo z-transformiranko harmonične funkcije iz že znanih z-transformirank eksponentnih funkcij. Če upoštevamo znano relacijo:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (2.9)$$

dobimo z upoštevanjem enačbe (2.7):

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(1 - e^{-j\omega T} z^{-1}) - (1 - e^{j\omega T} z^{-1})}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} = \\ &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

kjer smo še enkrat upoštevali relacijo (2.9) in podobno relacijo za kosinusno funkcijo. ■

**Primer 2.5** Določite z-transformacijo signala rampe

$$x_z(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

ki ga diskretiziramo s časom vzorčenja  $T$ .

Po diskretizaciji obravnavamo diskretni signal:

$$x(k) = \begin{cases} kT & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Problem bomo rešili na tri načine.

Prvi način:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) = \\
 &= T(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots)(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \\
 &= T \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Drugi način:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \tag{2.14}$$

Zgornje vrste ne znamo direktno rešiti, ker vsebuje vsak člen faktor  $k$ , lahko pa rešimo naslednjo vrsto:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{2.15}$$

Če odvajamo  $Y(z)$  po spremenljivki  $z$ , bo vsak člen vseboval faktor  $k$ , kar potrebujemo:

$$\frac{dY(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k)z^{-k-1} \tag{2.16}$$

S primerjavo enačb (2.14) in (2.16) vidimo, da je potrebno slednjo množiti s faktorjem  $(-Tz)$ , da bosta enaki:

$$-Tz \frac{dY(z)}{dz} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = X(z) \tag{2.17}$$

Z upoštevanjem enačb (2.15) in (2.17) dobimo

$$X(z) = -Tz \left( -\frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \tag{2.18}$$

Tretji način je uporaba teorema o množenju s  $k$  (glej stran 11), ki pravi:

$$\mathcal{Z} \{kf(k)\} = -z \frac{dF(z)}{dz} \tag{2.19}$$

Z upoštevanjem tega teorema se reševanje naloge nadaljuje enako kot pri drugem načinu.



Pri iskanju z-transformiranih znanih signalov se reševanje bolj ali manj zreducira na reševanje neskončnih vrst, tako da lahko direktno uporabimo znanja s tega področja (kar je ilustriral drugi način reševanja). S pridom lahko izkoristimo teoreme z-transformacije, kar je pokazal tretji način reševanja. Včasih pa lahko zadevo rešimo tako, da uberemo kakšno bližnjico, kot smo to storili pri prvem načinu reševanja. ■

## 2.2 Teoremi z-transformacije

Pri računanju z-transformacije pogosto uporabljamo nekatere lastnosti, ki jih imenujemo teoremi z-transformacije in jih ni potrebno vsakič posebej izpeljevati. Zbrani so v spodnji tabeli:

	$x(k)$	$X(z)$
Teorem linearnosti	$ax_1(k) + bx_2(k)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Teorem časovnega premika v desno	$x(k - m)$	$z^{-m}X(z)$
Teorem časovnega premika v levo	$x(k + m)$	$z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$
Teorem eksponencialnega dušenja	$a^{-k}x(k)$	$X(az)$
Teorem začetne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow 0} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Teorem končne vrednosti	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$
Teorem množenja s $k^r$	$k^r x(k)$	$(-z \frac{d}{dz})^r X(z)$
Teorem diferenciranja funkcije po parametru	$\frac{\partial}{\partial a} x(k, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
Teorem konvolucije	$\sum_{m=0}^k x(m)h(k - m)$	$X(z)H(z)$

**Primer 2.6** Izračunajte z-transformacijo zaporedja, ki ga dobimo z vzorčenjem signala

$$x_z(t) = \begin{cases} e^{-at} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

če je čas vzorčenja enak 5.

Signal  $x_z(t)$  je potrebno najprej diskretizirati. Seveda se bomo ukvarjali le z nenegativnimi časi ( $t \geq 0$ ):

$$x(k) = e^{-akT} \sin \omega kT = (e^{aT})^{-k} \sin \omega kT \quad (2.21)$$

Uporabili bomo teorem eksponencialnega dušenja, ki pravi

$$\mathcal{Z} \{b^{-k} f(k)\} = F(bz) \quad (2.22)$$

S primerjavo enačb (2.21) in (2.22) vidimo, da je  $b = e^{aT}$  in  $f(k) = \sin \omega kT$ , torej dobimo:

$$X(z) = \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos \omega T + e^{-2aT} z^{-2}} \quad (2.23)$$

kjer smo upoštevali izraz za z-transformacijo sinusne funkcije:

$$\mathcal{Z} \{\sin \omega kT\} = \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \quad (2.24)$$

Na koncu je potrebno v enačbo (2.23) vnesti le še čas vzorčenja  $T = 5$ :

$$X(z) = \frac{e^{-5a} z^{-1} \sin 5\omega}{1 - 2e^{-5a} z^{-1} \cos 5\omega + e^{-10a} z^{-2}} \quad (2.25)$$

■

**Primer 2.7** Poiščite z-transformacijo signala

$$x(k) = \begin{cases} 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

S teoremoma začetne in končne vrednosti preverite pravilnost rešitve pri  $k = 0$  in pri  $k \rightarrow \infty$ .

Z-transformacijo signala dobimo z uporabo tabel z-transformacije:

$$X(z) = \frac{3}{1 - z^{-1}} - 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{3 - \frac{3}{2}z^{-1} - 2 + 2z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (2.27)$$

Ko uporabimo teorem začetne vrednosti na izrazu v enačbi (2.27), dobimo:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1 \quad (2.28)$$

ker gre takrat  $z^{-1}$  proti 0. Teorem končne vrednosti pa pravi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad (2.29)$$

Vrednosti, ki ju dobimo s teoremoma začetne in končne vrednosti, se seveda ujemata z vrednostmi, ki ju dobimo direktno iz enačbe signala v časovnem prostoru (2.26). Oba teorema sta uporabna predvsem takrat, ko imamo le z-transformaciji signalov, ne pa tudi signalov samih. Pri vajah ju koristno uporabljamo za hiter test (ne)pravilnosti izračunane inverzne z-transformacije. ■

**Primer 2.8** *S teoremoma začetne in končne vrednosti določite limitne vrednosti signala:*

$$x(k) = \begin{cases} (-1)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Z uporabo tabel dobimo z-transformacijo  $X(z) = \frac{z}{z+1}$ . Teorem začetne vrednosti:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 1 \quad (2.31)$$

Teorem končne vrednosti da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{z}{z+1} \right] = 0 \quad (2.32)$$

Prvi rezultat je pravilen, drugi pa ne, saj vemo, da limita funkcije  $x(k)$  v neskončnosti ne obstaja. To je omejitev pri uporabi tega teorema: Teorem končne vrednosti smemo uporabiti le v primerih, ko limita v neskončnosti obstaja. ■

**Primer 2.9** *Poiščite z-transformacijo signala*

$$x(k) = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Iz definicije z-transformacije sledi:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z^{-1})^k \quad (2.34)$$

Če upoštevamo znano vrsto za  $e^y$

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k \quad (2.35)$$

vidimo, da je z-transformacija iskanega signala enaka

$$X(z) = e^{z^{-1}} = e^{1/z} \quad (2.36)$$

■

**Primer 2.10** Poiščite z-transformacijo signala

$$y(k) = \begin{cases} \frac{k^2}{3^k k!} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Izhajali bomo iz rešitve prejšnje naloge (primer 2.9). S primerjavo izrazov za  $x(k)$  v enačbi (2.33) in  $y(k)$  v enačbi (2.37) dobimo, da je  $y(k) = k^2 3^{-k} x(k)$ . Z uporabo teoremov množenja s  $k^r$  in eksponencialnega dušenja rešimo problem. Najprej bomo poiskali z-transformacijo signala  $y_1(k) = kx(k)$ . Teorem množenja s  $k$  pravi:

$$Y_1(z) = -z \frac{dX(z)}{dz} = -z \left( -\frac{1}{z^2} \right) e^{1/z} = \frac{e^{1/z}}{z} \quad (2.38)$$

Naslednji signal je  $y_2(k) = k^2 x(k) = ky_1(k)$ , katerega z-transformacija je enaka:

$$Y_2(z) = -z \frac{dY_1(z)}{dz} = -z \frac{\left( -\frac{1}{z^2} \right) e^{1/z} z - e^{1/z}}{z^2} = \frac{z+1}{z^2} e^{1/z} \quad (2.39)$$

Končni rezultat dobimo iz  $y(k) = 3^{-k} y_2(k)$  in upoštevanja teorema eksponencialnega dušenja:

$$Y(z) = Y_2(3z) = \frac{3z+1}{(3z)^2} e^{1/(3z)} = \left( \frac{1}{3} z^{-1} + \frac{1}{9} z^{-2} \right) e^{\frac{1}{3} z^{-1}} \quad (2.40)$$

■

**Primer 2.11** *Poiščite z-transformacijo signala*

$$x(k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k > 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Iz definicije z-transformacije sledi:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^{-k} \quad (2.42)$$

Zgornjo vrsto rešimo tako, da  $X(z)$  najprej odvajamo po  $z$ :

$$\begin{aligned} X'(z) &= - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k-1} = -(z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \\ &= - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Iskani z-transform dobimo (do aditivne konstante natančno) z integriranjem zgornjega izraza:

$$\int X'(z) dz = \int \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) dz = \ln z - \ln(z-1) + C = \ln \frac{z}{z-1} + C \quad (2.44)$$

Če hočemo določiti dejansko vrednost  $X(z)$ , je potrebno izračunati vrednost konstante  $C$ . Izraza v enačbah (2.42) in (2.44) je potrebno primerjati pri vrednosti  $z$ , pri kateri je mogoče vrsto (2.42) rešiti. V podobnih primerih se običajno uporabi skrajne vrednosti. V danem primeru bomo poiskali limiti, ko gre  $z$  proti  $\infty$  ( $z^{-1}$  pa proti 0):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^{-k} \right) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \int X'(z) dz \right) &= \left( \ln \frac{z}{z-1} + C \right) \Big|_{z \rightarrow \infty} = C \end{aligned} \quad (2.45)$$

Z izenačitvijo obeh izrazov pridemo do rešitve  $C = 0$ . Z-transformacija signala  $x(k)$  je torej:

$$X(z) = \ln \frac{z}{z-1} \quad (2.46)$$

■

**Primer 2.12** *Poiščite z-transformacijo signalov iz primerov 2.4 in 2.11 še z uporabo MATLABa.*

Programski paket MATLAB ima v okviru knjižnice *Symbolic Toolbox* funkcijo `ztrans`, ki je namenjena določanju z-transformacije diskretnega signala. Za sinusni signal iz primera 2.4 uporabimo naslednje zaporedje ukazov:

```
syms k z omega T
x = sin(omega*k*T);
X = ztrans(x,k,z)
```

Pri zgornjem klicu funkcije `ztrans` je prvi parameter diskretni signal, drugi je neodvisna spremenljivka v časovnem prostoru, tretji pa neodvisna spremenljivka v frekvenčnem prostoru. Izpis v ukaznem oknu MATLABa je naslednji:

```
X =
z*sin(omega*T)/(z^2-2*z*cos(omega*T)+1)
```

Rezultat je seveda enak kot pri analitičnem reševanju.

Na podoben način poskušamo rešiti še drugi primer:

```
syms k z
x = 1/k;
X = ztrans(x,k,z)
```

Odziv MATLABa

```
X =
ztrans(1/k,k,z)
```

kaže da funkcijski klic ni bil uspešen. Funkcija `ztrans` namreč poskuša rešiti neskončno vrsto, kjer  $k$  teče od 0 naprej, medtem ko je v danem primeru signal definiran šele od 1 naprej. Tokrat uporabimo funkcijo `symsum`, ki je namenjena računanju neskončnih vrst:

```
syms k z
X = symsum((1/k)/z^k, k, 1, inf)
```

Računamo torej vsoto vrste  $(1/k)z^{-k}$ , kjer  $k$  teče od 1 do  $\infty$ . Rezultat je tokrat seveda pravilen, četudi je oblika nekoliko drugačna kot v primeru 2.11:

```
X =
-log(1-1/z)
```



## Poglavje 3

# Inverzna z-transformacija

Inverzna z-transformacija predstavlja inverzno operacijo k z-transformaciji. Namenjena je računanju zaporedja  $x(k)$  iz njegove z-transformiranke  $X(z)$ . Formulo za izračun inverzne z-transformacije lahko izpeljemo iz formule za izračun z-transformacije in se glasi:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz \quad (3.1)$$

kjer krivulja  $C$  enkrat obkroži vse singularnosti funkcije  $X(z)z^{k-1}$  v nasprotni smeri urnega kazalca. Če ima funkcija  $X(z)z^{k-1}$   $l$  singularnih točk  $z_1, z_2, \dots, z_l$  v ravnini  $\mathbb{Z}$  oz. znotraj zaključene krivulje  $C$ , potem lahko inverzno z-transformacijo izračunamo s pomočjo izreka o residuih:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{X(z)\} = \sum_{i=1}^l \operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z)z^{k-1}] \quad (3.2)$$

Najprej moramo poiskati singularnosti funkcije v oglatem oklepaju. V primeru racionalne funkcije  $X(z)$  so to poli funkcije  $X(z)$ , lahko pa se pojavi dodaten pol pri  $z = 0$  (zaradi  $z^{k-1}$ ), če funkcija  $X(z)$  nima ničle pri  $z = 0$ . Za vse pole moramo ugotoviti, katere stopnje so. Lahko gre za enostavne (enkratne) ali večkratne pole. Če ima funkcija  $X(z)z^{k-1}$  enostavni pol v  $z = z_i$ , izračunamo residuum funkcije v tej točki po naslednji formuli:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z)z^{k-1}] = \lim_{z \rightarrow z_i} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)] = [X(z)z^{k-1}(z - z_i)]_{z=z_i} \quad (3.3)$$

Če pa ima funkcija  $X(z)z^{k-1}$   $m$ -kratni pol v  $z = z_i$ , izračunamo residuum po

formuli:

$$\operatorname{Res}_{z=z_i} [X(z)z^{k-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [X(z)z^{k-1}(z - z_i)^m] \quad (3.4)$$

V praksi se za izračun inverzne z-transformacije uporablja več možnosti:

- uporaba tabel z-transformacije,
- izračun s pomočjo enačb (3.2), (3.3) in (3.4),
- metoda parcialnih ulomkov,
- metoda deljenja idr.

### 3.1 Izračun inverzne z-transformacije s pomočjo uporabe tabel z-transformacije

Z-transformiranko je najbolj enostavno pretvoriti v časovni prostor, če v tabeli z-transformov najdemo natančno takšno transformiranko. Takrat rešitev enostavno prepisemo iz drugega stolpca tabele, ki se nahaja v dodatku A na strani 85.

**Primer 3.1** *Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije*

$$X(z) = \frac{2 + 3z^{-1}}{1 + z^{-2}} \quad (3.5)$$

Funkcijo  $X(z)$  najprej zapišemo po pozitivnih potencah  $z$ , ker je taka oblika bolj primerna za določanje inverzne z-transformacije (edina izjema je mogoče metoda deljenja):

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 1} \quad (3.6)$$

Ker sta pola funkcije  $X(z)$  konjugirano kompleksna, tega člena ne razbijamo na parcialne ulomke. Kadar sta pola z-transformiranske drugega reda konjugirano kompleksna, je signal  $x(k)$  naslednje oblike:

$$x(k) = Ab^k \sin(\omega kT + \varphi) \quad (3.7)$$



Frekvenca nihanja  $\omega$  je odvisna od faznega zasuka pola funkcije  $X(z)$ ,  $b$  pa je odvisen od lege polov glede na krožnico enote: če diskretna pola ležita zunaj kroga enote, je  $b$  večji od 1; če ležita na krožnici enote, je  $b$  enak 1; če sta pola v krogu enote, je  $b$  manjši od 1. V danem primeru pola ležita na enotini krožnici ( $\pm j$ ), zato je signal  $x(k)$  harmoničen. Spomnimo se, kakšna sta z-transforma sinusne in kosinusne funkcije:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\sin \omega kT\} &= \frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \\ \mathcal{Z}\{\cos \omega kT\} &= \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} = \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Imenovalec z-transformacij obeh harmoničnih funkcij je enak, tako da s primerjavo z imenovalcem z-transformacije iskane funkcije najprej določimo  $\cos \omega T$ . Pri nas je le-ta enak 0:

$$\cos \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \omega T = 1 \quad (3.9)$$

Tukaj velja poudariti, da je v diskretnih sistemih produkt  $\omega T$  zaradi Shannonovega teorema omejen na interval  $(-\pi, \pi)$  (pokažite, da je to res). Zato v gornji enačbi ni potrebno podajati rešitev, ki se nanašajo na vrednosti  $\omega T$ , ki so premaknjene za večkratnik števila  $2\pi$ . Kako pa je z rešitvijo  $\omega T = -\frac{\pi}{2}$ ? Ta rešitev pomeni, da gre za negativno frekvenco signala. Pri kosinusnem signalu ta razlika ni pomembna, saj je kosinusna funkcija soda. Pri sinusnem signalu pa to pomeni, da se spremeni predznak funkcije, kar pa se kompenzira z negativnim ojačenjem funkcije (glej z-transformacijo sinusne funkcije).

Če vnesemo vrednosti iz enačbe (3.9) v enačbo (3.8), dobimo:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{\sin \frac{k\pi}{2}\right\} &= \frac{z}{z^2 + 1} \\ \mathcal{Z}\left\{\cos \frac{k\pi}{2}\right\} &= \frac{z^2}{z^2 + 1}\end{aligned}\quad (3.10)$$

S primerjavo enačb (3.10) in (3.6) dobimo končni rezultat:

$$x(k) = 3 \sin \frac{k\pi}{2} + 2 \cos \frac{k\pi}{2}, \quad k \geq 0 \quad (3.11)$$

Zaradi specifične oblike zaporedja  $x(k)$  je le-to periodično zaporedje s periodo 4:

$$x(k) = \{2, 3, -2, -3, 2, 3, -2, -3, \dots\} \quad (3.12)$$

■

**Primer 3.2** *Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije*

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} \quad (3.13)$$

Inverzna z-transformacija funkcije 1 je  $\delta(k)$ , torej časovno zaporedje, ki je enako 1 za  $k = 0$ , pri vseh ostalih vrednostih  $k$  pa je enako 0. Če je takšna z-transformiranka pomnožena z  $z^{-n}$ , je njena inverzna z-transformacija za  $n$  vzorcev zakasnjeno zaporedje – torej  $\delta(k - n)$ . Glede na povedano, je  $x(k)$  enak:

$$x(k) = \delta(k) + 2\delta(k - 1) + 3\delta(k - 2) + 2\delta(k - 3) + \delta(k - 4) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 3 & k = 2 \\ 2 & k = 3 \\ 1 & k = 4 \\ 0 & k \geq 5 \end{cases} \quad (3.14)$$

■

## 3.2 Izračun inverzne z-transformacije s pomočjo izreka o residuih

Teoretično ozadje te metode je bilo podano v uvodu tega poglavja, tako da se bomo tukaj posvetili primerom.

**Primer 3.3** *Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije*

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z - 2)^2(z - 1)} \quad (3.15)$$

Najprej izračunamo izraz  $X(z)z^{k-1}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z - 2)^2(z - 1)} \quad (3.16)$$

in poiščemo residue te funkcije. Funkcija ima enostavni pol v  $z = 1$  in dvojni pol v  $z = 2$  (pola v  $z = 0$  ni, ker je  $k \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)} &= \left[ \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)}(z-1) \right]_{z=1} = \frac{3 \cdot 1^k}{(-1)^2} = 3 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)} &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(2z^2 + 1)z^k}{(z-2)^2(z-1)}(z-2)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[ \frac{4zz^k(z-1) + (2z^2 + 1)kz^{k-1}(z-1) - (2z^2 + 1)z^k}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \left[ \frac{4 \cdot 2 \cdot 2^k + 9k \cdot 2^{k-1} - 9 \cdot 2^k}{(2-1)^2} \right] = -2^k + 9k \cdot 2^{k-1} = -2^k + \frac{9k}{2} \cdot 2^k \end{aligned} \quad (3.17)$$

Končni rezultat je vsota obeh residuov:

$$x(k) = 3 - 2^k + \frac{9k}{2} \cdot 2^k, \quad k \geq 0 \quad (3.18)$$

■

**Primer 3.4** *Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije*

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} \quad (3.19)$$

Najprej izračunamo izraz  $X(z)z^{k-1}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} \quad (3.20)$$

Funkcija ima enostavni pol v  $z = 2$  ter večkratni pol v  $z = 0$ . Potrebno je poudariti, da se večkratnost pola s časom  $k$  spreminja: ob času  $k = 0$  je pol trikratni, ob  $k = 1$  dvakratni, ob  $k = 2$  enostaven, za  $k \geq 3$  pa pola v  $z = 0$  sploh ni. Načeloma je zato potrebno obravnavo ločiti na štiri primere:

$$x(k) = \begin{cases} \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z^3} & k = 0 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z^2} & k = 1 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{(z+2)}{(z-2)z} & k = 2 \\ \operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.21)$$

Vidimo, da je prvi residuum enak v vseh primerih in ga je potrebno izračunati le enkrat:

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} = \left[ \frac{(z+2)z^k}{(z-2)z^3} (z-2) \right]_{z=2} = \frac{4 \cdot 2^k}{2^3} = 2^{k-1} \quad (3.22)$$

Izračunati pa moramo še ostale tri residue:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z} &= \left[ \frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z^2} &= \left[ \frac{d}{dz} \frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -1 \\ \operatorname{Res}_{z=0} \frac{z+2}{(z-2)z^3} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dz^2} \frac{z+2}{z-2} \right]_{z=0} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Zaradi bolj učinkovitega računanja smo drugi residuum računali v nasprotnem vrstnem redu (od  $k=2$  proti  $k=0$ ), ker se izkaže, da ves čas obravnavamo isti izraz, ki ga moramo večkrat odvajati. Kot smo že povedali, je prvi residuum v rezultatu enak pri vseh  $k$ , drugi pa se spreminja. Dodatni člen, ki se pojavi le ob časih  $k'=0, 1, 2$ , se prišteje k rezultatu pomnožen z  $\delta(k-k')$ , ker ima ta funkcija pri  $k=k'$  vrednost 1, pri ostalih  $k$  pa vrednost 0. Končni rezultat je torej:

$$x(k) = 2^{k-1} - \frac{1}{2}\delta(k) - \delta(k-1) - \delta(k-2), \quad k \geq 0 \quad (3.24)$$

Rezultat lahko zapišemo tudi v nekoliko manj sofisticirani obliki:

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1 \\ 1 & k = 2 \\ 2^{k-1} & k \geq 3 \end{cases} \quad (3.25)$$

■

### 3.3 Izračun inverzne z-transformacije z uporabo metode parcialnih ulomkov

Pri tej metodi je postopek podoben kot pri računanju inverzne Laplaceove transformacije. Pomembna razlika je, da je potrebno na parcialne ulomke razcepiti funkcijo  $\frac{X(z)}{z}$ . Nadaljevanje pa je zelo podobno. Če imamo realne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 1. Če imamo konjugirano kompleksne enojne pole, dobimo parcialne ulomke, katerih red imenovalca je 2 (za podrobnosti nadaljevanja glejte rešitev primera 3.1). Če imamo večkratne pole, dobimo več pripadajočih parcialnih ulomkov.

**Primer 3.5** Rešimo nalogo iz primera 3.3 še enkrat – tokrat z uporabo metode parcialnih ulomkov. Inverzna z-transformacija iskanega zaporedja  $x(k)$  je naslednja:

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)} \quad (3.26)$$

Na parcialne ulomke razcepimo izraz  $\frac{X(z)}{z}$ :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-1} \quad (3.27)$$

Ko množimo obe strani enačbe (3.27) z izrazom  $[(z-2)^2(z-1)]$ , dobimo:

$$\begin{aligned} 2z^2 + 1 &= A(z-1) + B(z-1)(z-2) + C(z-2)^2 = \\ &= (B+C)z^2 + (A-3B-4C)z + (-A+2B+4C) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Iz enačbe (3.28) dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} B + C &= 2 \\ A - 3B - 4C &= 0 \\ -A + 2B + 4C &= 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

katerega rešitev je:

$$\begin{aligned} A &= 9 \\ B &= -1 \\ C &= 3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Če vstavimo konstante iz enačbe (3.30) v enačbo (3.27), dobimo:

$$X(z) = 9 \frac{z}{(z-2)^2} - \frac{z}{z-2} + 3 \frac{z}{z-1} \quad (3.31)$$

Z uporabo tabel z-transformirank dobimo končni rezultat, ki je seveda enak kot v primeru 3.3:

$$x(k) = \frac{9k}{2} \cdot 2^k - 2^k + 3, \quad k \geq 0 \quad (3.32)$$

■

**Primer 3.6** Rešimo nalogo iz primera 3.4 še enkrat – tokrat z uporabo metode parcialnih ulomkov. Inverzna z-transformacija iskanega zaporedja  $x(k)$  je naslednja:

$$X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2} \quad (3.33)$$

Na parcialne ulomke razcepimo izraz  $\frac{X(z)}{z}$ :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+2}{(z-2)z^3} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} \quad (3.34)$$

Obe strani enačbe (3.34) množimo z  $[(z-2)z^3]$  in dobimo:

$$\begin{aligned} z+2 &= Az^3 + B(z-2)z^2 + C(z-2)z + D(z-2) = \\ &= (A+B)z^3 + (-2B+C)z^2 + (-2C+D)z + (-2D) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Iz enačbe (3.35) dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -2D &= 2 \Rightarrow D = -1 \\ -2C + D &= 1 \Rightarrow C = -1 \\ -2B + C &= 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ A + B &= 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

in posledično z-transformiranko:

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{1}{2} - z^{-1} - z^{-2} \quad (3.37)$$

Končni rezultat je zaporedje

$$x(k) = \frac{1}{2}2^k - \frac{1}{2}\delta(k) - \delta(k-1) - \delta(k-2), \quad k \geq 0 \quad (3.38)$$

■

**Primer 3.7** Izračunajte inverzno z-transformacijo funkcije

$$X(z) = \frac{3z^3}{z^3+1} \quad (3.39)$$

Kot vedno, moramo razcepiti na parcialne ulomke  $\frac{X(z)}{z}$ :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{3z^2}{z^3+1} = \frac{3z^2}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+1} \quad (3.40)$$

Tudi tukaj postopamo podobno kot v prejšnjih primerih:

$$3z^2 = A(z^2-z+1) + (Bz+C)(z+1) = (A+B)z^2 + (-A+B+C)z + (A+C) \quad (3.41)$$

S primerjavo členov na levi in desni strani enačbe (3.41) spet pridemo do sistema treh enačb s tremi neznankami, katerega rešitev je:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -1 \quad (3.42)$$

Ko to rešitev vstavimo v enačbo (3.40), dobimo

$$X(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{2z^2 - z}{z^2 - z + 1} \quad (3.43)$$

V prvem členu prepoznamo z-transformacijo  $(-1)^k$ , v drugem pa z-transformacijo sinusne oz. kosinusne funkcije. Iz člena pri  $z$  v imenovalcu dobimo:

$$\cos \omega T = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{3} \quad (3.44)$$

Z upoštevanjem enačbe (3.44) pridemo do končnega rezultata:

$$x(k) = (-1)^k + 2 \cos\left(k \frac{\pi}{3}\right) \quad (3.45)$$

■

## 3.4 Izračun inverzne z-transformacije z uporabo metode deljenja

Pri metodi deljenja delimo polinom v števcu z-transformiranke s polinomom v imenovalcu. V večini primerov se postopek nikoli ne konča in dobimo neskončno vrsto po negativnih potencah  $z$ . Spomnimo se, da je na prav tak način definirana z-transformacija diskretnega signala oz. zaporedja (enačba 2.1). Vrednosti iskanega zaporedja ob času  $k$  dobimo iz faktorjev pri  $z^{-k}$ . Na ta način lahko dobimo vrednost zaporedja pri vseh vrednostih argumenta  $k$ .

**Primer 3.8** *Rešimo nalogo iz primera 3.7 tudi z uporabo metode deljenja.*

Najprej delimo števec  $X(z)$  z imenovalcem  $X(z)$ :

$$\begin{array}{r} (3z^3) : (z^3 + 1) = 3 - 3z^{-3} + 3z^{-6} - 3z^{-9} + \dots \\ \underline{-3z^3 - 3} \\ -3 \\ \underline{3 + 3z^{-3}} \\ 3z^{-3} \\ \underline{-3z^{-3} - 3z^{-6}} \\ -3z^{-6} \end{array}$$

Iz rezultata deljenja lahko dobimo vrednosti  $x(k)$  pri posameznih diskretnih časovnih trenutkih  $k$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$x(k)$	3	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0	...

Ker je vzorec enostaven, ga lahko posplošimo na poljuben člen zaporedja:

$$x(k) = \begin{cases} 3(-1)^{\frac{k}{3}} & k = 3l, l \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (3.46)$$

kjer  $\mathbb{N}_0$  označuje množico naravnih števil, ki vključuje tudi število 0. ■

Velja omeniti, da je določanje inverzne z-transformacije z metodo deljenja dokaj zamuden in po svoje nepraktičen pristop. Po drugi strani pa je to najbolj enostaven postopek za določanje vrednosti zaporedja za prvi (neničelni) vzorec. Poglejmo si postopek na primeru:

**Primer 3.9** *Izračunajmo vrednost zaporedja  $x(k)$  iz primera 3.4 za prvih nekaj vzorcev. Z-transformiranka iskanega zaporedja je:*

$$X(z) = \frac{z + 2}{(z - 2)z^2} \quad (3.47)$$

Izračunamo le člena pri najvišjih potencah  $z$  v števcu in imenovalcu in nato izvedemo deljenje le za prvi člen vrste:

$$X(z) = \frac{z + \dots}{z^3 + \dots} = z^{-2} + \dots \quad (3.48)$$

Iz rezultata deljenja vidimo, da je  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 0$  in  $x(2) = 1$ . Člene zaporedja do prve neničelne vrednosti lahko vedno dobimo na izredno enostaven način – podobno kot zgoraj. Spomnimo se, da je pri računanju inverzne z-transformacije z metodo razcepa na parcialne ulomke ali s pomočjo izreka o residuih največ dela ravno z računanjem prvih vzorcev (glejte npr. primera 3.4 in 3.6). Zaradi tega je izračun inverzne z-transformacije z uporabo metode deljenja zelo koristen kot preverjanje prvih vrednosti zaporedja, ki smo jih določili z uporabo drugih metod. ■



**Primer 3.10** Poiščite inverzno z-transformacijo transformirank iz primerov 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 in 3.7 še z uporabo MATLABa.

Programski paket MATLAB ima v okviru knjižnice *Symbolic Toolbox* funkcijo `iztrans`, ki je namenjena določanju inverzne z-transformacije diskretnega signala. Inverzno z-transformacijo iz omenjenih petih primerov dobimo na naslednji način:

```
syms k z
X1 = (2+3*z^(-1))/(1+z^(-2));
x1 = iztrans(X1,z,k)
X2 = 1+2*z^(-1)+3*z^(-2)+2*z^(-3)+z^(-4);
x2 = iztrans(X2,z,k)
X3 = (2*z^3+z)/(z-2)^2/(z-1);
x3 = iztrans(X3,z,k)
X4 = (z+2)/(z-2)/z^2;
x4 = iztrans(X4,z,k)
X7 = 3*z^3/(z^3+1);
x7 = iztrans(X7,z,k)
```

Rezultat kode je naslednji izpis:

```
x1 =
2*cos(1/2*pi*k)+3*sin(1/2*pi*k)

x2 =
charfcn[0](k)+2*charfcn[1](k)+3*charfcn[2](k)+2*charfcn[3](k)
+charfcn[4](k)

x3 =
-2^k+9/2*2^k*k+3

x4 =
-charfcn[2](k)-charfcn[1](k)-1/2*charfcn[0](k)+1/2*2^k

x7 =
sum((1/_alpha)^k,_alpha = RootOf(_Z^2-_Z+1))+(-1)^k
```

Rezultata primerov 3.1 in 3.3 sta povsem pričakovana. Rezultata primerov 3.2 in 3.4 sta enaka kot pri analitični izpeljavi, pri čemer `charfcn[n](k)` predstavlja signal  $\delta(k - n)$ . Rezultat primera 3.7 kaže, da funkcija `iztrans` vedno ne najde rešitve, čeprav je primer analitično rešljiv. Tudi v tem primeru pa je rešitev mogoče najti v okviru knjižnice *Symbolic Toolbox*, in sicer z direktno uporabo jedra Maple, ki ga MATLAB uporablja za simbolično računanje. S klicem funkcije `convert` (parameter `parfrac`) razbijemo z-transformiranko na parcialne ulomke (angl. *partial fractions*):

```
maple('convert',(3*z^3/(z^3+1)), 'parfrac', 'z')
```

Rezultat klica:

```
ans =
3-1/(z+1)+(-2+z)/(z^2-z+1)
```

Res je sicer, da smo pri razcepu na parcialne ulomke običajno preoblikovali izraz  $\frac{X(z)}{z}$ , toda v tem primeru gre le za to, da nekoliko znižamo red posameznih členov z-transformiranke, tako da funkcija `iztrans` najde rešitev. Nato kličemo funkcijo `iztrans` z zgornjim rezultatom:

```
iztrans(3-1/(z+1)+(-2+z)/(z^2-z+1), z, k)
```

Končni rezultat:

```
ans =
(-1)^k+(-2/(-1+i*3^(1/2)))^k+2^k*(1/(1+i*3^(1/2)))^k
```

Zgornji izpis v nekoliko bolj pregledni obliki dobimo z ukazom `pretty(ans)`, ki vrne:

```

      k /      2      \k      k /      1      \k
(-1) + |-----| + 2 |-----|
      |      1/2 |      |      1/2 |
      \ -1 + 3  I/      \1 + 3  I/
```

Ta rezultat je seveda ekvivalenten tistemu iz enačbe (3.45). ■

## Poglavje 4

# Diferenčne enačbe in diskretna prenosna funkcija

### 4.1 Diferenčne enačbe

Diferenčna enačba je enačba, ki povezuje različne vzorce iskanega zaporedja  $y(k)$  z vzorci danega zaporedja  $u(k)$ . Diferenčne enačbe delimo glede na linearnost na linearne in nelinearne, glede na časovno spremenljivost pa na enačbe s konstantnimi in enačbe s spremenljivimi koeficienti. Pri naši obravnavi se bomo omejili na linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti:

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \dots + b_nu(k) \quad (4.1)$$

Zgornja diferenčna enačba definira relacijo med vzorci  $y(k)$ ,  $y(k+1)$ ,  $\dots$  in  $y(k+n)$  iskanega zaporedja  $y(k)$ . Razliko med največjim in najmanjšim indeksom zaporedja  $y$  v diferenci enačbi imenujemo red diferenčne enačbe. Red diferenčne enačbe (4.1) je torej  $n$ . Podobno kot pri reševanju diferencialnih enačb, dobimo tudi pri reševanju diferenci enačb splošno rešitev, ki predstavlja neskončno družino zaporedij. Če hočemo dobiti partikularno rešitev diferenci enačbe  $n$ -tega reda, je potrebno podati  $n$  začetnih pogojev. Idealno je, če so podane vrednosti zaporedja v prvih  $n$  vzorcih, torej:

$$y(0), y(1), \dots, y(n-1) \quad (4.2)$$

Obstajajo metode za neposredno reševanje diferenci enačb, a mi se bomo omejili le na reševanje s pomočjo  $z$ -transformacije. Če torej na diferenci enačbi (4.1)

izvedemo z-transformacijo, dobimo:

$$\begin{aligned}
& z^n Y(z) - y(0)z^n - y(1)z^{n-1} - \dots - y(n-1)z + \\
& + a_1 [z^{n-1}Y(z) - y(0)z^{n-1} - y(1)z^{n-2} - \dots - y(n-2)z] + \dots + \\
& + a_n Y(z) = \\
& = b_0 [z^n U(z) - u(0)z^n - u(1)z^{n-1} - \dots - u(n-1)z] + \\
& + b_1 [z^{n-1}U(z) - u(0)z^{n-1} - u(1)z^{n-2} - \dots - u(n-2)z] + \dots + \\
& + b_n U(z)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

kjer smo večkrat upoštevali teorem časovnega premika v levo. Enačba (4.3) izgleda precej komplicirano, a edina neznanca veličina v njej je z-transformiranka  $Y(z)$ , ki jo izrazimo iz enačbe in izvedemo inverzno z-transformacijo, s čimer pridemo do iskanega zaporedja  $y(k)$ .

**Primer 4.1** *Fibonaccijevo zaporedje je tisto zaporedje, v katerem je vsota predhodnih dveh členov enaka naslednjemu členu. Fibonaccijevo zaporedje  $x(k)$  lahko torej definiramo z diferenčno enačbo:*

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \tag{4.4}$$

*Izračunajte z-transformacijo  $X(z)$  zgornjega zaporedja in inverzno z-transformacijo funkcije  $X(z)$ . Ali je torej mogoče člene Fibonaccijevega zaporedja podati eksplicitno kot funkcijo indeksa v zaporedju  $k$  (in ne le rekurzivno kot v enačbi 4.4)?*

Izvedemo z-transformacijo na enačbi (4.4) in dobimo:

$$\begin{aligned}
& z^2 X(z) - x(0)z^2 - x(1)z = zX(z) - x(0)z + X(z) \\
& z^2 X(z) - z = zX(z) + X(z) \\
& X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Inverzno z-transformacijo lahko izvedemo z uporabo izreka o residuih, kjer moramo poiskati residue funkcije  $X(z)z^{k-1}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{z^k}{(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} &= \left[ \frac{z^k}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right]_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k}{\sqrt{5}} \\
\operatorname{Res}_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{z^k}{(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} &= \left[ \frac{z^k}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right]_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k}{-\sqrt{5}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Končna rešitev je vsota obeh residuov:

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right], \quad k \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\doteq 0,4472 [1,6180^k - (-0,6180)^k], \quad k \geq 0$$

Iz enačbe (4.7) vidimo, da se da tudi rekurzivno podano Fibonaccijevo zaporedje podati v eksplicitni obliki, tako da lahko poljuben člen zaporedja izračunamo, ne da bi za to izračunali vse prejšnje člene. Zanimiva je ugotovitev, da zavzame funkcija  $x(k)$  v enačbi (4.7) pri vstavitvi naravnega števila  $k$  za svoj argument vedno vrednost iz množice naravnih števil. ■

**Primer 4.2** *Poiščite analitično rešitev (torej eksplicitno odvisnost  $y$  od  $k$ ) naslednje diference enačbe:*

$$y(k) = 0,5 y(k-1) + 0,5 y(k-2) \quad (4.8)$$

ki zadosti pogojema  $y(0) = 5$  in  $y(3) = 2$ . Izračunajte  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ .

Diferenčno enačbo rešujemo z uporabo z-transformacije. V ta namen diference enačbo zapišemo nekoliko drugače. Namesto zakasnenih vrednosti signala uporabimo njegovo predikcijo, torej v enačbo (4.8) uvedemo novo spremenljivko  $l = k - 2$ :

$$y(l+2) = 0,5 y(l+1) + 0,5 y(l) \quad (4.9)$$

Izvedemo z-transformacijo enačbe (4.9):

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) = \frac{1}{2} z Y(z) - \frac{1}{2} zy(0) + \frac{1}{2} Y(z) \quad (4.10)$$

Vrednost  $y(0)$  je enaka 5, vrednosti  $y(1)$  pa ne poznamo, zato jo v enačbi (4.10) nadomestimo s konstanto  $C$ :

$$(z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2})Y(z) = 5z^2 + (C - \frac{5}{2})z$$

$$Y(z) = \frac{5z^2 + (C - \frac{5}{2})z}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} = \frac{5z^2 + (C - \frac{5}{2})z}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \quad (4.11)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{2}{3}C}{z-1} + \frac{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}C}{z+\frac{1}{2}}$$

Rešitev diference enačbe je torej:

$$y(k) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}C + (\frac{10}{3} - \frac{2}{3}C)(-\frac{1}{2})^k \quad (4.12)$$

Za določitev konstante  $C$  uporabimo pogoj  $y(3) = 2$ :

$$y(3) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}C + \left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}C\right)\left(-\frac{1}{8}\right) = 2 \Rightarrow C = 1 \quad (4.13)$$

Partikularna rešitev diference enačbe je:

$$y(k) = \frac{7}{3} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0 \quad (4.14)$$

Iz enačbe (4.14) dobimo  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \frac{7}{3}$ . ■

## 4.2 Diskretna prenosna funkcija

Izkaže se, da je mogoče linearni časovno nespremenljivi diskretni sistem  $n$ -tega reda modelirati z diference enačbo, kot je (4.1). Videli bomo, da takšno diference enačbo dobimo tudi z diskretizacijo linearnega časovno nespremenljivega zveznega sistema  $n$ -tega reda. Obravnava linearnih časovno nespremenljivih sistemov je pri diskretnih sistemih zelo podobna kot pri zveznih. Če namreč izhajamo iz diference enačbe (4.1), pri kateri  $u(k)$  interpretiramo kot vhodno zaporedje v sistem,  $y(k)$  pa kot izhodno zaporedje, lahko definiramo tudi diskretno prenosno funkcijo  $G(z)$ . Dobimo jo, če v  $z$ -transformaciji diference enačbe, ki opisuje vhodno-izhodno obnašanje sistema, postavimo vse začetne pogoje na 0. V enačbi (4.3) torej upoštevamo

$$y(0) = 0, y(1) = 0, \dots, y(n-1) = 0, u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(n-1) = 0 \quad (4.15)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) &= b_0 z^n U(z) + b_1 z^{n-1} U(z) + \dots + b_n U(z) \\ G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Če je diskretni sistem opisan s prenosno funkcijo, dobimo odziv sistema tako, da množimo  $z$ -transformacijo vhodnega zaporedja s prenosno funkcijo ter na tem produktu izvedemo inverzno  $z$ -transformacijo:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1} \{G(z) \mathcal{Z} \{u(k)\}\} \quad (4.17)$$

**Primer 4.3** *Določite odziv diskretnega sistema*

$$G(z) = \frac{z^{-1} - 0,7z^{-2}}{(1 - 0,9z^{-1})(1 - 0,5z^{-1})} \quad (4.18)$$

na vzbujalni signal

$$u(k) = 2 - 0,5^k \quad (4.19)$$

Skicirajte vzbujanje  $u(k)$  in odziv  $y(k)$  sistema.

Podobne naloge enostavneje rešujemo, če operiramo s pozitivnimi potencami  $z$ . Torej uporabimo  $z$ -transformiranko vzbujalnega signala v naslednji obliki:

$$U(z) = 2 \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \quad (4.20)$$

Tudi prenosno funkcijo zapišemo po pozitivnih potencah  $z$ :

$$G(z) = \frac{z - \frac{7}{10}}{(z - \frac{9}{10})(z - \frac{1}{2})} \quad (4.21)$$

$Y(z)$  je torej:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^2(z - \frac{7}{10})}{(z-1)(z - \frac{9}{10})(z - \frac{1}{2})^2} \quad (4.22)$$

Uporabimo eno od metod za določanje inverzne  $z$ -transformacije in dobimo:

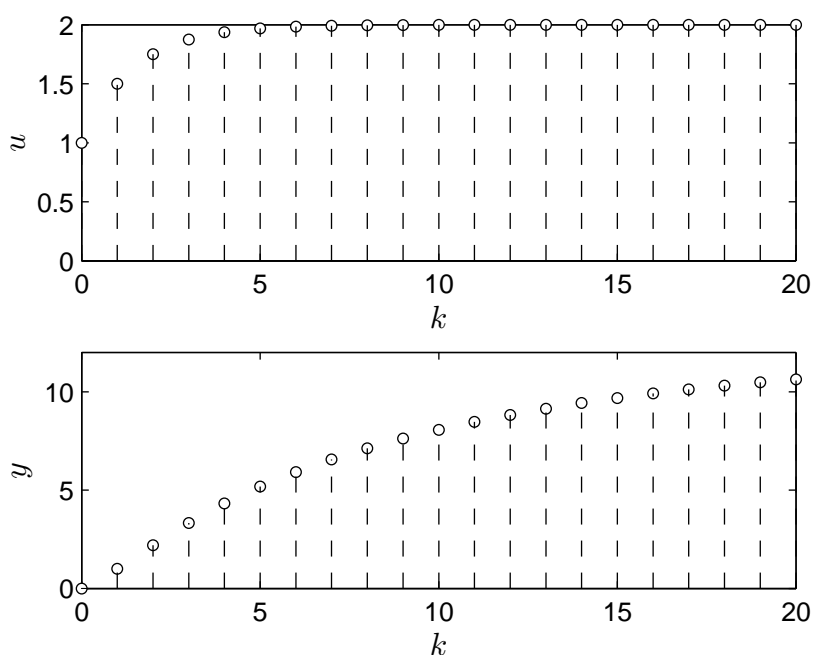
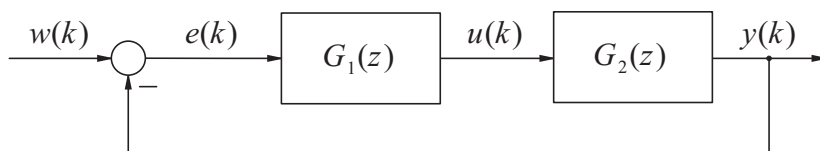
$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\} = 12 - \frac{45}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^k - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k - k \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (4.23)$$

Vzbujanje  $u(k)$  in odziv  $y(k)$  sta prikazana na sliki 4.1. ■

Kadar imamo opravka z bločno shemo, uporabljamo enaka pravila kot pri poenostavljanju bločnih shem zveznih sistemov. Če so sistemi univariabilni, ni pomemben vrstni red množenja, tako da za sistem na sliki 4.2 veljajo (med drugimi) naslednje relacije:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}W(z) = G_2(z)U(z) \\ U(z) &= G_1(z)E(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}W(z) \\ E(z) &= \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z)}W(z) = \frac{1}{G_1(z)G_2(z)}Y(z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

**Primer 4.4** Povratnozančno strukturo na sliki 4.2 lahko interpretiramo kot regulacijski sistem, pri čemer vemo, da prenosna funkcija  $G_2(z)$  predstavlja proces,  $G_1(z)$  je regulator,  $y(k)$  je regulirana veličina,  $u(k)$  regulirna veličina,

Slika 4.1: Vzbujanje  $u(k)$  in odziv  $y(k)$  sistema iz primera 4.3

Slika 4.2: Primer bločne sheme diskretnega sistema

$e(k)$  je regulacijski pogrešek,  $w(k)$  pa referenčna veličina. Naj bosta:

$$G_1(z) = \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{(z + \frac{9}{10})(z - 1)} \quad (4.25)$$

$$G_2(z) = \frac{\frac{1}{10}(z + \frac{9}{10})}{(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}$$

Sistem vzbujaemo z enotino stopnico  $w(k)$ . Poiščite diskretne signale  $e(k)$ ,  $u(k)$  in  $y(k)$ .



Tri iskane prenosne funkcije so torej:

$$\begin{aligned}\frac{E(z)}{W(z)} &= \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z} = 1 - z^{-1} \\ \frac{U(z)}{W(z)} &= G_1(z) \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{(z + \frac{9}{10})(z-1)} \frac{z-1}{z} = \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})} \\ \frac{Y(z)}{W(z)} &= \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} = 1 - \frac{E(z)}{W(z)} = 1 - (1 - z^{-1}) = z^{-1}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Sedaj lahko poiščemo  $z$ -transformacije iskanih signalov:

$$\begin{aligned}E(z) &= W(z) \frac{E(z)}{W(z)} = \frac{z}{z-1} \frac{z-1}{z} = 1 \\ U(z) &= W(z) \frac{U(z)}{W(z)} = \frac{z}{z-1} \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})} = \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{(z + \frac{9}{10})(z-1)} \\ Y(z) &= W(z) \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{z}{z-1} z^{-1} = \frac{1}{z-1}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Z uporabo inverzne  $z$ -transformacije zlahka pridemo do rešitve za  $e(k)$ :

$$e(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \geq 1 \end{cases}\quad (4.28)$$

Ostala dva signala poiščemo s pomočjo izreka o residuih, torej moramo poiskati residue funkcij  $\frac{10z^k(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})(z-1)}$  in  $\frac{z^k}{z(z-1)}$ . Obe funkciji imata ob  $k = 0$  singularnost pri  $z = 0$ , ki pri kasnejših časih izgine. Rešitvi za  $k \geq 1$  sta torej:

$$\begin{aligned}u(k) \Big|_{k \geq 1} &= \operatorname{Res}_{z=1} \frac{10z^k(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})(z-1)} + \operatorname{Res}_{z=-\frac{9}{10}} \frac{10z^k(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})(z-1)} = \\ &= \frac{10 \cdot 1^k \frac{1}{10} \frac{19}{100}}{1 \cdot \frac{19}{10}} + \frac{10 \cdot (-\frac{9}{10})^k (-\frac{18}{10})(-\frac{171}{100})}{(-\frac{9}{10})(-\frac{19}{10})} = \frac{1}{10} + 18(-\frac{9}{10})^k \\ y(k) \Big|_{k \geq 1} &= \operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^k}{z(z-1)} = \frac{1^k}{1} = 1\end{aligned}\quad (4.29)$$

Dodatna residua (ob času  $k = 0$ ) pri  $z = 0$  sta:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=0} \frac{10(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})}{z(z + \frac{9}{10})(z-1)} &= \frac{10(-\frac{9}{10})(-\frac{81}{100})}{(\frac{9}{10})(-1)} = -\frac{81}{10} \\ \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}\quad (4.30)$$

Ker nastopita omenjena residua le ob času  $k = 0$ , ju pomnožimo z  $\delta(k)$  in prištejemo k rešitvi (4.29), da dobimo končni rezultat:

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{1}{10} + 18\left(-\frac{9}{10}\right)^k - \frac{81}{10}\delta(k) \\ y(k) &= 1 - \delta(k) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Signal  $y(k)$  predstavlja za en vzorec zakasnjeno enotino stopnico, kar je (glede na prenosno funkcijo  $Y/W$  v enačbi 4.26) pričakovan rezultat. Z upoštevanjem relacije  $e(k) = w(k) - y(k)$ , lahko še dodatno preverimo pravilnost rezultata. ■

**Primer 4.5** *Poiščite diskretne signale  $e(k)$ ,  $u(k)$  in  $y(k)$  iz primera 4.4 še z uporabo MATLABa.*

Nalogo rešimo z uporabo knjižnice *Symbolic Toolbox*. Najprej definiramo prenosni funkciji  $G_1(z)$  in  $G_2(z)$ , nato definiramo vzbujalni signal in izračunamo njegovo  $z$ -transformacijo z uporabo funkcije `ztrans`. V nadaljevanju z uporabo enačbe (4.24) izračunamo  $z$ -transformiranke  $E(z)$ ,  $U(z)$  in  $Y(z)$  ter izračunamo še njihovo inverzno  $z$ -transformacijo, s čimer pridemo do iskanih signalov. Celotna koda za rešitev naloge:

```
syms k z
G1 = 10 * (z-9/10) * (z-81/100) / (z+9/10) / (z-1);
G2 = 1/10 * (z+9/10) / (z-9/10) / (z-81/100);
w = 1;
W = ztrans(w, k, z);
E = simplify(W * 1/(1+G1*G2));
U = simplify(G1*E);
Y = simplify(G2*U);
e = iztrans(E,z,k)
u = iztrans(U,z,k)
y = iztrans(Y,z,k)
```

Uporabili smo tudi funkcijo `simplify`, ki se uporablja za poenostavljanje kompleksnih izrazov. Rezultat kode je naslednji izpis:

```
e =
charfcn[0](k)

u =
-81/10*charfcn[0](k)+1/10+18*(-9/10)^k

y =
-charfcn[0](k)+1
```

Če upoštevamo že omenjeno dejstvo, da `charfcn[n](k)` predstavlja signal  $\delta(k - n)$ , je zgornji rezultat enak analitičnemu rezultatu. ■

## Poglavje 5

# Frekvenčni odziv diskretnih sistemov

Za stabilni linearni časovno nespremenljivi sistem je značilno, da se na harmonično vzbujanje po preteku prehodnega pojava odzove s harmoničnim nihanjem izhodnega signala, pri čemer sta frekvenci vhodnega in izhodnega nihanja enaki. Ta lastnost velja tako za zvezne kot tudi za diskretne sisteme. Če torej sistem vzbujamo s signalom

$$u(k) = U_0 \sin \omega k T \quad (5.1)$$

se na izhodu sistema v ustaljenem stanju pojavi signal

$$y(k) = Y_0(\omega) \sin(\omega k T + \varphi(\omega)) \quad (5.2)$$

kjer smo eksplicitno poudarili, da sta amplituda in fazni zaostanek izhodnega signala (glede na vhodni signal) odvisni od frekvence vzbujalnega signala. Razmerje med amplitudama izhodnega in vhodnega signala imenujemo *amplitudni odziv*  $A(\omega)$ :

$$A(\omega) = \frac{Y_0(\omega)}{U_0} \quad (5.3)$$

Funkciji, ki podaja fazno razliko  $\varphi(\omega)$ , pa rečemo *fazni odziv* diskretnega sistema  $\beta(\omega)$ :

$$\beta(\omega) = \varphi(\omega) \quad (5.4)$$

Običajno *frekvenčni odziv* podajamo kot kompleksno funkcijo frekvence:

$$\mathcal{H}(\omega) = A(\omega) e^{j\beta(\omega)} \quad (5.5)$$

Odziv  $y(k)$  v ustaljenem stanju lahko torej izračunamo iz frekvenčnega odziva  $\mathcal{H}(\omega)$  s pomočjo naslednje formule:

$$y(k) = U_0 |\mathcal{H}(\omega)| \sin \{ \omega k T + \angle [\mathcal{H}(\omega)] \} \quad (5.6)$$

Frekvenčni odziv diskretnega sistema najlažje dobimo z upoštevanjem prenosne funkcije sistema  $G(z)$ :

$$\mathcal{H}(\omega) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = G(e^{j\omega T}) = |G(e^{j\omega T})| e^{j\angle[G(e^{j\omega T})]} \quad (5.7)$$

**Primer 5.1** *Diskretni sistem opisuje diferencialna enačba:*

$$y(k) = u(k) + ay(k-1) \quad (5.8)$$

*Določite amplitudni in fazni odziv sistema. Določite vrednost sistemkega parametra  $a$  tako, da bo fazni zaostanek pri vzbujanju s sinusnim signalom, katerega frekvenca je enaka četrtini frekvence vzorčenja, enak  $\pi/6$  oz.  $30^\circ$ . Kolikšna je takrat (pri poprej določenem  $a$  in enaki frekvenci vzbujalnega signala) amplituda izhodnega signala v ustaljenem stanju, če je amplituda vhodnega signala enaka  $\sqrt{3}$ .*

Najprej moramo določiti prenosno funkcijo sistema, ki je enaka:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \Big|_{z.p. \text{ enaki } 0} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (5.9)$$

Frekvenčni odziv sistema je torej:

$$\mathcal{H}(\omega) = G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - a \cos \omega T + ja \sin \omega T} \quad (5.10)$$

Amplitudni in fazni odziv sta enaka:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega T)^2 + (a \sin \omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega T}} \quad (5.11)$$

$$\beta(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega T}{1 - a \cos \omega T}$$

Izračunajmo vrednost produkta  $\omega T$ , če je frekvenca signala štirikrat manjša od frekvence vzorčenja:

$$\omega T = 2\pi f \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

kjer  $f_s$  predstavlja frekvenco vzorčenja. Če enačbo (5.12) vnesemo v enačbo (5.11), dobimo:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (5.13)$$

$$\beta(\omega) = -\operatorname{arctg} a = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Amplituda izhodnega nihanja  $Y_0$  je pri frekvenci  $f_s/4$  enaka:

$$Y_0 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \quad (5.14)$$

■

**Primer 5.2** *Obravnavamo naslednji filter:*

$$y(k) = u(k) - u(k-8) \quad (5.15)$$

*Sistem vzorčimo s frekvenco 10 kHz. Za katere vrednosti sinusnega signala  $u(k)$  je izhod sistema  $y(k)$  po preteku prehodnega pojava enak 0?*

Najprej poiščemo prenosno funkcijo sistema:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 1 - z^{-8} \quad (5.16)$$

Frekvenčni odziv sistema je torej enak:

$$\mathcal{H}(\omega) = 1 - e^{-8j\omega T} \quad (5.17)$$

Iščemo torej frekvence  $\omega$ , pri katerih je vrednost frekvenčnega odziva enaka 0 oz. pri katerih velja naslednja enačba:

$$e^{-8j\omega T} = 1 \Rightarrow 8\omega T = 16\pi f \frac{1}{f_s} = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (5.18)$$

Pogoj je torej izpolnjen pri mnogokratnikih osmine frekvence vzorčenja:

$$f = l \frac{f_s}{8} = l \cdot 1250 \text{ Hz}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (5.19)$$

Čeprav rešitev obsega vse mnogokratnike frekvence 1250 Hz, so frekvence, ki zadoščajo zahtevam Shannonovega teorema: 0 Hz, 1250 Hz, 2500 Hz in 3750 Hz. ■

**Primer 5.3** Sistem opišemo s prenosno funkcijo:

$$G(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - \frac{1}{2})^2(z - \frac{4}{5})} \quad (5.20)$$

Določite frekvence, pri katerih ima frekvenčni odziv vrednost 0, če sistem vzorčimo s frekvenco 50 Hz. Omejite se le na frekvenčni interval, ki izpolnjuje zahteve Shannonovega teorema o vzorčenju.

Frekvenčni odziv sistema je

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{e^{2j\omega T} + 1}{(e^{j\omega T} - \frac{1}{2})^2(e^{j\omega T} - \frac{4}{5})} \quad (5.21)$$

Frekvenčni odziv ima vrednost 0 takrat, kadar ima števec funkcije  $\mathcal{H}(\omega)$  vrednost 0 (ob predpostavki, da imenovalec ni enak 0). Torej velja:

$$e^{2j\omega T} = -1 \Rightarrow 2\omega T = \pm\pi \Rightarrow \omega T = \pm\frac{\pi}{2} \quad (5.22)$$

Že v primeru 5.1 smo spoznali, da takšen  $\omega T$  ustreza četrtini frekvence vzorčenja. Zaradi simetričnosti je dovolj, če podamo le pozitivno frekvenco. Končni odgovor je torej 12,5 Hz. ■

## Poglavje 6

# Pretvorba zveznih dinamičnih sistemov v diskretni prostor

Pretvorba zveznih dinamičnih sistemov v diskretne oziroma diskretizacija je problematična, ker pri postopku zgublamo informacijo. Iz sistemov, kjer poznamo vhode in izhode v vsakem časovnem trenutku, dobimo sisteme, kjer lahko opišemo obnašanje le v diskretnih časovnih trenutkih. Glede na to, da diskretni sistem nima informacije o tem, kaj se v sistemu dogaja med trenutki vzorčenja, obstaja precej postopkov za diskretizacijo, ki temeljijo na drugačnih predpostavkah o obnašanju sistema med trenutki vzorčenja. Najbolj uporabljane metode za diskretizacijo zveznih sistemov so naslednje:

- Metoda bilinearne transformacije, pri kateri iščemo diskretni sistem, ki ima podoben frekvenčni odziv kot zvezni sistem.
- Metoda stopničaste invariance (angl. *zero-order hold equivalence*, *ZOH equivalence*), kjer iščemo tisti diskretni sistem, ki se obnaša enako kot zvezni sistem, kateremu med trenutkoma vzorčenja zadržimo vrednost vhodnega signala, izhod pa opazujemo le v trenutkih vzorčenja.
- Metoda ekvivalence z zadrževalnikom prvega reda (angl. *first-order hold equivalence*, *FOH equivalence*) je podobna kot prejšnja metoda, le da uporabimo na vhodu zveznega sistema zadrževalnik prvega in ne ničtega reda.
- Metoda ekvivalence polov in ničel. Pri tej metodi pretvorimo zvezne pole  $p_i$  in ničle  $z_i$  v diskretne pole  $\pi_i$  in ničle  $\zeta_i$  po naslednji enačbi:

$$\begin{aligned}\pi_i &= e^{p_i T}, i = 1, 2, \dots, n \\ \zeta_i &= e^{z_i T}, i = 1, 2, \dots, m\end{aligned}\tag{6.1}$$

kjer je  $T$  čas vzorčenja,  $n$  število polov zveznega sistema,  $m$  pa število ničel zveznega sistema. Seveda se uporablja enačba (6.1) le za pretvorbo končnih ničel, zvezne ničle, ki se nahajajo v neskončnosti, premaknemo (vse razen ene) v točko  $z = -1$ . Če bi pretvorili neskončne zvezne ničle v neskončne diskretne ničle, bi umetno ustvarili časovno zakasnitev, kar je seveda nesmiselno. Ena diskretna ničla ostane v neskončnosti, sicer bi imel diskretni sistem neposredno povezavo z vhoda na izhod.

Seveda obstajajo še mnoge druge možnosti za diskretizacijo, a omenjene so tiste, ki se pogosteje uporabljajo. Izbor metode je zelo odvisen od namena diskretizacije. Če diskretiziramo zvezni proces, ki ga želimo regulirati z diskretnim regulatorjem, je običajno idealna izbira metoda stopničaste invariance, saj je zadrževalno vezje na vhodu procesa zelo dober model dejanskega digitalno-analognega (D/A) pretvornika. Zelo podobne rezultate dobimo ob uporabi metode ekvivalence polov in ničel. Če želimo realizirati digitalni filter, pa primerjamo frekvenčna odziva in določimo, da se frekvenčna odziva zveznega in diskretnega sistema natančno ujemata pri mejni frekvenci filtra. V takšnih primerih uporabimo bilinearno transformacijo.

## 6.1 Metoda bilinearne transformacije

Znano dejstvo je, da sta kompleksni ravnini  $s$  in  $z$  povezani z naslednjo transformacijo

$$z = e^{sT} \quad \text{oz.} \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (6.2)$$

Na prvi pogled bi pomislili, da lahko zvezno prenosno funkcijo pretvorimo v diskretni prostor, če v zvezni prenosni funkciji  $s$  nadomestimo z  $\frac{1}{T} \ln z$ . Ta ideja ima več pomanjkljivosti. Prva je ta, da bi dobili diskretno prenosno funkcijo, ki bi bila transcendentna, s čimer so bistveno omejene možnosti analize tovrstnega sistema. Druga težava je, da je logaritemska funkcija mnogolična funkcija za kompleksne vrednosti argumenta. Naslednja ideja za rešitev problema je, da namesto transcendentne funkcije uporabimo racionalni približek:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \doteq \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \Rightarrow s \doteq \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.3)$$

Ker smo pri zgornji izpeljavi razvili funkcijo  $e^{sT/2}$  v Taylorjevo vrsto in upoštevali le prvi člen, velja približek pri majhnih vrednostih  $s$  (oziroma  $\omega$ ). Če uporabimo bilinearno transformacijo (6.3) za transformacijo zveznega sistema v diskretni



prostor, se frekvenčna odziva zveznega in diskretiziranega sistema ujemata pri nizkih frekvencah (v bistvu sta frekvenčna odziva enaka pri frekvenci 0, pri frekvenci 0 pa sta enaka tudi odvoda frekvenčnih odzivov po frekvenci).

Izkaže se, da lahko namesto transformacije (6.3) uporabimo sorodno transformacijo:

$$s = C \frac{z - 1}{z + 1} \quad (6.4)$$

Dobra lastnost te transformacije je, da se notranjost enotnega kroga v kompleksni ravnini  $z$  preslika v levo polravnino kompleksne ravnine  $s$ . S tem se pri diskretizaciji ohranja stabilnost sistema – če je zvezni sistem stabilen, je stabilen tudi diskretizirani sistem; enako velja tudi za nestabilnost. S primernim izborom konstante  $C$  dosežemo, da se frekvenčna odziva zveznega in diskretiziranega sistema ujemata pri dveh frekvencah – frekvenci 0 in poljubni frekvenci, ki si jo izberemo. Pri načrtovanju digitalnih filtrov je druga frekvenca običajno mejna frekvenca filtra. Če torej želimo, da se frekvenčna odziva zveznega in diskretiziranega sistema ujemata pri frekvenci  $\omega_r$ , moramo konstanto  $C$  izračunati po formuli:

$$C = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T}{2} = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s} \quad (6.5)$$

pri čemer je  $f_r$  frekvenca, ki ustreza krožni frekvenci  $\omega_r$ ,  $f_s$  pa je frekvenca vzorčenja. Logično je, da frekvenca  $f_r$  mora zadoščati pogoju Shannonovega teorema, kar pomeni  $f_r < f_s/2$ .

Zaradi zgodovinskih razlogov pa obstaja še ena različica diskretizacije z metodo bilinearne transformacije. Za določanje parametrov prenosnih funkcij filtrov so se uporabljale tabele, v katerih so bili zbrani parametri normiranih filtrov. Filtri so bili normirani tako frekvenčno (npr. mejna frekvenca filtra je bila 1) kot tudi amplitudno (ojačenje filtrov je bilo v prepustnem področju približno enako 1). Prenosno funkcijo normiranega filtra označimo z  $G_{norm}(p)$ , s čimer jo ločimo od prenosne funkcije zveznega filtra  $G(s)$ , ki jo dejansko realiziramo. S tem smo implicitno uvedli tudi »normirano« kompleksno frekvenco  $p$ . Da bi prišli do dejanskih parametrov prenosne funkcije, je potrebno frekvenčno in amplitudno skaliranje. Slednje je zelo enostavno, saj je potrebno prenosno funkcijo filtra (oz. parametre števec prenosne funkcije) pomnožiti z ustrežno konstanto. Frekvenčno skaliranje pa izvedemo tako, da namesto  $p$  pišemo  $ks$ :

$$G(s) = G_{norm}(p) \Big|_{p=ks} \quad (6.6)$$

kjer je  $k$  ustrežna konstanta. S tem pridemo do prenosne funkcije zveznega filtra, ki jo z uporabo transformacije (6.4) diskretiziramo:

$$H(z) = G(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}} \quad (6.7)$$

Možna pa je tudi poenostavljena pot, kjer operaciji skaliranja (6.6) in diskretizacije (6.7) združimo v en korak. Uporabimo torej naslednjo transformacijo:

$$H(z) = G_{norm}(p) \Big|_{p=C_n \frac{z-1}{z+1}} \quad (6.8)$$

pri čemer pa je  $C_n$  določen s pomočjo enačbe:

$$C_n = \lambda_r \operatorname{ctg} \frac{\omega_r T}{2} = \lambda_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s} \quad (6.9)$$

kjer je  $\lambda_r$  normirana frekvenca, pri kateri želimo ujemanje frekvenčnih odzivov zveznega in diskretiziranega filtra.

**Primer 6.1** *Določite diskretni ekvivalent zveznega filtra s prenosno funkcijo*

$$G(s) = \frac{20}{s + 10} \quad (6.10)$$

*če sistem vzorčimo s frekvenco 100 Hz, frekvenčna odziva zveznega filtra in njegovega diskretnega ekvivalenta pa naj se ujemata pri mejni frekvenci zveznega filtra.*

Ker gre za enostaven filter prvega reda, je njegova mejna frekvenca enaka absolutni vrednosti pola, torej 10 rad/s. Frekvenca  $f_r$  je torej:

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz} \quad (6.11)$$

Konstanto  $C$  izračunamo po formuli (6.5):

$$C = \omega_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s} = 10 \operatorname{ctg} 0,05 \doteq 199,833 \quad (6.12)$$

Enačba diskretnega filtra je torej:

$$H(z) = G(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}} = \frac{20z + 20}{(C + 10)z + (10 - C)} \doteq \frac{20z + 20}{209,833z - 189,833} \quad (6.13)$$

■

**Primer 6.2** *Določite diskretni ekvivalent zveznega filtra iz primera 6.1, če izhajamo iz normirane prenosne funkcije filtra.*

Ker gre za nizkoprepustni filter prvega reda, je njegova normirana prenosna funkcija

$$G_{norm}(p) = \frac{1}{p+1} \quad (6.14)$$

Ker je filter normiran glede na mejno frekvenco, je normirana mejna frekvenca enaka  $\lambda = 1$ . Torej velja tudi  $\lambda_r = 1$ . Izračunajmo še  $C_n$ :

$$C_n = \lambda_r \operatorname{ctg} \frac{\pi f_r}{f_s} = \operatorname{ctg} 0,05 = \frac{C}{10} \doteq 19,9833 \quad (6.15)$$

Diskretni filter z normirano amplitudo je torej:

$$H_0(z) = G_{norm}(p) \Big|_{p=C_n \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{(C_n+1)z+(1-C_n)} = \frac{10z+10}{(C+10)z+(10-C)} \quad (6.16)$$

Ker ima zvezni filter  $G(s)$  ojačenje enako 2, je končna prenosna funkcija diskretnega filtra enaka

$$H(z) = 2H_0(z) = \frac{20z+20}{(C+10)z+(10-C)} \doteq \frac{20z+20}{209,833z-189,833} \quad (6.17)$$

Rezultat je seveda enak kot v primeru 6.1. ■

**Primer 6.3** *Določite diskretni ekvivalent zveznega filtra iz primera 6.1 še enkrat. Tokrat želimo podobno obnašanje zveznega in diskretnega sistema pri nizkih frekvencah.*

Spet uporabimo bilinearno transformacijo, pri čemer potrebujemo še vrednost konstante  $C$ . Če hočemo ujemanje frekvenčnih odzivov zveznega in diskretnega filtra pri nizkih frekvencah, uporabimo formulo:

$$C = \frac{2}{T} = 2f_s = 200 \quad (6.18)$$

Prenosna funkcija diskretnega filtra je torej:

$$H(z) = G(s) \Big|_{s=C \frac{z-1}{z+1}} = \frac{20z+20}{(C+10)z+(10-C)} = \frac{20z+20}{210z-190} \quad (6.19)$$

Ker je v danem primeru mejna frekvenca zveznega filtra (10 rad/s oz. 1,59 Hz) veliko manjša od frekvence vzorčenja (100 Hz), sta prenosni funkciji digitalnih filtrov iz primerov 6.1 in 6.3 zelo podobni. ■

## 6.2 Metoda stopničaste invariance

Metoda bilinearne transformacije je temeljila na podobnosti frekvenčnih odzivov zveznega sistema in njegovega diskretnega ekvivalenta. Pri metodi stopničaste invariance pa primerjamo časovni odziv obeh sistemov. Kot pove ime metode, je kriterij enakost odzivov na stopničasti vhodni signal. Seveda je smiselno enačiti le vrednosti odzivov v točkah vzorčenja:

$$h_s(k) = g_s(t) \Big|_{t=kT} \quad (6.20)$$

pri čemer je  $g_s(t)$  odziv zveznega sistema  $G(s)$  na enotino stopnico:

$$g_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} \quad (6.21)$$

$h_s(k)$  pa odziv diskretnega sistema  $H(z)$  na enotino stopnico:

$$h_s(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} H(z) \right\} \quad (6.22)$$

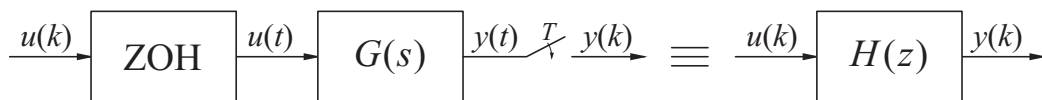
Če enačbi (6.21) in (6.22) vstavimo v enačbo (6.20), dobimo:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} H(z) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G(s) \right\} \Big|_{t=kT} \quad (6.23)$$

Iz enačbe (6.23) lahko izrazimo  $H(z)$ :

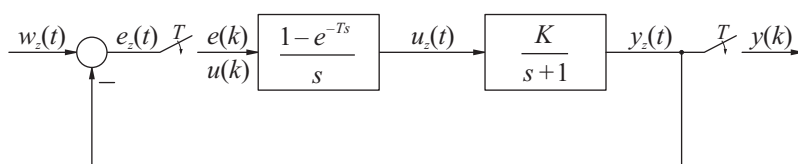
$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad (6.24)$$

Druga interpretacija stopničaste invariance je ekvivalenca sistemov na sliki 6.1. Če namreč pred zvezni blok postavimo zadrževalnik ničtega reda (ZOH), za zvezni blok pa vzorčevalno vezje ter sta vzorčevalnik in zadrževalnik časovno sinhronizirana, potem je takšen sistem ekvivalenten diskretnemu sistemu, ki je dobljen z diskretizacijo zveznega sistema po metodi stopničaste invariance.



Slika 6.1: Ekvivalentnost sistemov pri uporabi metode stopničaste invariance

**Primer 6.4** Določite diskretni ekvivalent prenosne funkcije  $G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$  po metodi stopničaste invariance, če je čas vzorčenja  $T = \ln \frac{10}{9} \doteq 0,1054$ .



Slika 6.2: Bločna shema diskretnega sistema za primer 6.5

Najprej moramo izračunati inverzno Laplaceovo transformacijo funkcije  $\frac{G(s)}{s}$ :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right\} = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \quad (6.25)$$

Nato signal diskretiziramo ( $t$  nadomestimo s  $kT$ ) in na njem izvedemo  $z$ -transformacijo:

$$\mathcal{Z} \{ 1 - 2e^{-kT} + e^{-2kT} \} = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-T}} + \frac{z}{z-e^{-2T}} \quad (6.26)$$

Izračunajmo vrednosti  $e^{-T}$  in  $e^{-2T}$ :

$$\begin{aligned} e^{-T} &= e^{-\ln \frac{10}{9}} = e^{\ln \frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \\ e^{-2T} &= (e^{-T})^2 = \frac{81}{100} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Če konstanti iz enačbe (6.27) vstavimo v enačbo (6.26) in rezultat množimo z  $\frac{z-1}{z}$ , dobimo končni rezultat:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-\frac{9}{10}} + \frac{z}{z-\frac{81}{100}} \right) = \frac{\frac{1}{100}(z + \frac{9}{10})}{(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})} \quad (6.28)$$

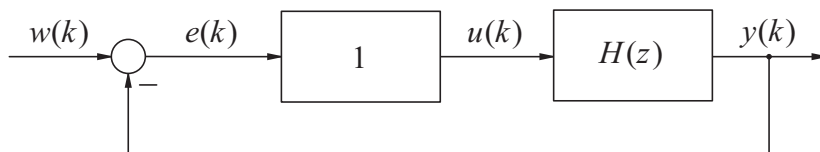
■

**Primer 6.5** Določite diskretno prenosno funkcijo  $Y(z)/W(z)$  za sistem, prikazan na sliki 6.2. Določite vrednost konstante  $K$ , da bo imel zaprtzančni sistem  $Y(z)/W(z)$  ojačenje 0,9. Kakšen mora biti takrat čas vzorčenja, če želimo doseči zaprtzančni pol pri 0,99, za eksponentno funkcijo pa uporabljamo naslednji približek:

$$e^x \doteq 1 + x, \quad |x| \ll 1 \quad (6.29)$$

*Opomba:* Funkcija  $Y(z)$  je  $z$ -transformacija signala  $y(k)$ , funkcija  $W(z)$  pa je  $z$ -transformacija referenčnega signala  $w(t)$  v trenutkih vzorčenja  $kT$ .

Pri tej nalogi ni eksplicitno podano, katero transformacijo iz zveznega v diskretni prostor je potrebno uporabiti. Ker pa se med diskretnim signalom  $u(k)$  in zveznim signalom  $u(t)$  nahaja blok s prenosno funkcijo  $(1 - e^{-sT})/s$ , ki predstavlja model



Slika 6.3: Nadomestna bločna shema diskretnega sistema za primer 6.5

zadrževalnika ničtega reda s časom vzorčenja  $T$ , je jasno, da moramo proces diskretizirati z metodo stopničaste invariance, torej:

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} = \frac{K(1-e^{-T})}{z-e^{-T}} \quad (6.30)$$

Nadomestna shema sistema, ki ga obravnavamo, je na sliki 6.3. Prenosna funkcija, ki jo iščemo, je torej:

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{K(1-e^{-T})}{z-e^{-T}}}{1 + \frac{K(1-e^{-T})}{z-e^{-T}}} = \frac{K(1-e^{-T})}{z+K-(K+1)e^{-T}} \quad (6.31)$$

Enosmerno ojačenje diskretnega sistema dobimo, če v prenosni funkciji tega sistema  $z$  nadomestimo z 1:

$$\left. \frac{K(1-e^{-T})}{z+K-(K+1)e^{-T}} \right|_{z=1} = \frac{K}{K+1} = 0,9 \Rightarrow K = 9 \quad (6.32)$$

Povratnozančna prenosna funkcija (6.31) ima pol  $\pi_1$ , za katerega velja:

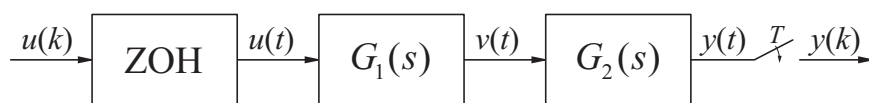
$$\pi_1 = (K+1)e^{-T} - K \doteq (K+1)(1-T) - K = 1 - T(K+1) \quad (6.33)$$

kjer smo upoštevali aproksimacijo za eksponentno funkcijo (6.29). Iz enačbe (6.33) izpeljemo čas vzorčenja, s katerim dosežemo zahtevani pol:

$$T \doteq \frac{1-\pi_1}{K+1} = 0,001 \quad (6.34)$$

Dejanska vrednost povratnozančnega pola (pri natančnem izračunu eksponentne funkcije) pri času vzorčenja  $T = 0,001$  je  $\pi_1 = 0,990004998$ . Dejanska vrednost pola  $\pi_i$  je zelo blizu želene vrednosti 0,99. To je posledica dejstva, da je približek (6.29) eksponentne funkcije  $e^{-T}$  zelo natančen, če je izpolnjen pogoj  $|-T| \ll 1$ , kar v našem primeru seveda velja. ■

Če imamo v sistemu več zveznih blokov, ki jih želimo diskretizirati s pomočjo metode stopničaste invariance, je potrebno biti previden. Analizirajmo sistem



Slika 6.4: Diskretizacija zaporedne vezave zveznih sistemov

na sliki 6.4. Če po metodi stopničaste invariance diskretiziramo  $G_1(s)$  in  $G_2(s)$ , dobimo:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_1(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \\ H_2(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_2(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Če pa diskretiziramo celoten sistem na sliki 6.4, dobimo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_1(s)G_2(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \quad (6.36)$$

Izkaže se, da  $\frac{Y(z)}{U(z)}$  NI enak  $H_1(z)H_2(z)$ . Če torej iščemo diskretni ekvivalent zaporedne vezave dveh zveznih sistemov, je potrebno najprej poiskati produkt zveznih prenosnih funkcij, nato pa ta rezultat diskretiziramo po metodi stopničaste invariance. Rezultirajoči diskretni sistem bomo označili z  $H_1H_2(z)$ , s čimer zapis ločimo od  $H_1(z)H_2(z)$ , kjer gre za zaporedno vezavo diskretnih sistemov. Velja torej:

$$H_1H_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_1(s)G_2(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} \neq H_1(z)H_2(z) \quad (6.37)$$

**Primer 6.6** Poiščite diskretni ekvivalent (po metodi stopničaste invariance) sistemov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  in celotnega sistema s slike 6.4, če velja:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{s+1} \\ G_2(s) &= \frac{4}{s+2} \\ T &= \ln \frac{10}{9} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Označite izračunane diskretne ekvivalente s  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  in  $H_1H_2(z)$ . Primerjajte prenosni funkciji  $H_1H_2(z)$  in  $H_1(z)H_2(z)$ . Kako bi morali spremeniti sistem na sliki 6.4, da bi  $H_1(z)H_2(z)$  bila diskretna prenosna funkcija celotnega sistema.

Z uporabo enačb (6.35) in (6.37) dobimo:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{\frac{1}{10}}{z - \frac{9}{10}} \\ H_2(z) &= \frac{\frac{38}{100}}{z - \frac{81}{100}} \\ H_2 H_1(z) &= \frac{\frac{1}{50}(z + \frac{9}{10})}{(z - \frac{9}{10})(z - \frac{81}{100})} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Prenosna funkcija  $H_1(z)H_2(z)$  ima pola pri  $\frac{9}{10}$  in  $\frac{81}{100}$ , nima ničel, ojačenje pa je 2. Prenosna funkcija  $H_1H_2(z)$  ima pola pri  $\frac{9}{10}$  in  $\frac{81}{100}$ , ničlo pri  $-\frac{9}{10}$ , ojačenje pa je 2. Prenosni funkciji se torej razlikujeta le v ničli. Prenosna funkcija  $H_1(z)H_2(z)$  bi bila prenosna funkcija celotnega sistema, če bi bila med zveznima blokoma  $G_1(s)$  in  $G_2(s)$  na sliki 6.4 vzorčevalnik in zadrževalnik ničtega reda. ■

**Primer 6.7** *Poiščite  $z$ -transformiranke signala  $y(k)$  za pet bločnih diagramov na sliki 6.5. Upoštevajte, da so bločni diagrami zaradi boljše preglednosti prikazani brez zadrževalnikov ničtega reda, ki se smiselno uporabljajo takrat, ko je potrebno diskretni signal peljati v zvezni sistem.*

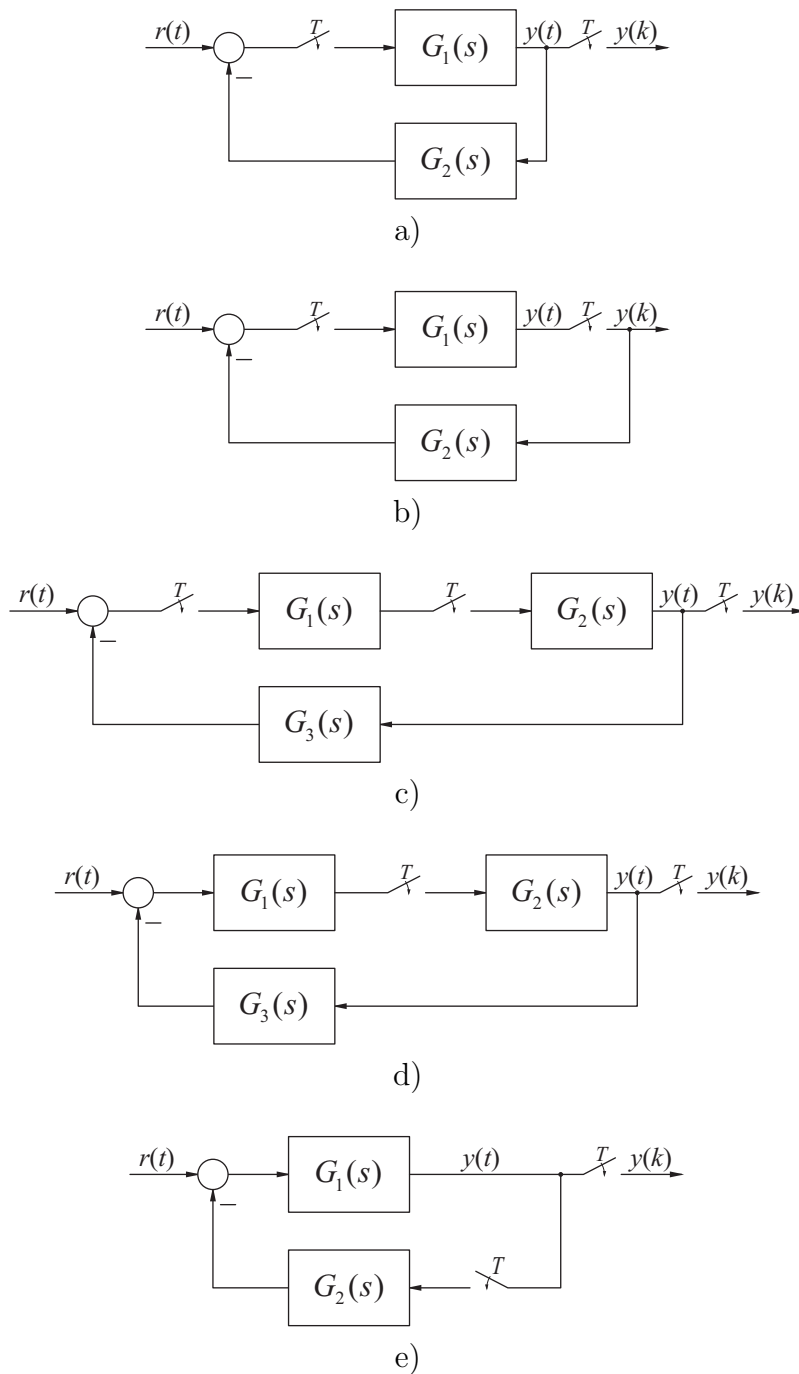
V prejšnjem primeru smo spoznali, da je potrebno zvezna sistema, ki sta ločena z vzorčevalnikom in zadrževalnikom ničtega reda, diskretizirati vsakega posebej. Če med zveznima sistemoma ni diskretnega bloka, računamo diskretni ekvivalent iz produkta zveznih prenosnih funkcij. To spoznanje lahko posplošimo na diskretizacijo bolj kompleksnih struktur, kot so zanke.

Ker je v vseh sistemih, ki jih analiziramo, le ena zanka, je v števcu  $Y(z)$  ojačenje direktne poti, pomnoženo z  $R(z)$ , v imenovalcu pa ojačenje zanke, povečano za 1. Potrebno je biti pazljiv le na točke, kjer vzorčevalnik prekinja direktno pot ali zanko.

Če analiziramo najprej direktne poti, vidimo, da v primerih a, b in c signal  $r(t)$  vstopa v vzorčevalnik in nato v sistem  $G_1(s)$ , zaradi česar nastopa v števcu iskane  $z$ -transformiranke produkt  $R(z)G_1(z)$ . V primerih d in e signal  $r(t)$  vstopa v blok  $G_1(s)$  kot zvezni signal (vmes ni nobenega diskretnega bloka), zato je potrebno diskretizirati zvezni signal  $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)G_1(s)\}$ . V ta namen bomo uvedli novo označbo, in sicer:

$$R_{G_1}(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[R(s)G_1(s)]|_{t=kT}\} \quad (6.40)$$





Slika 6.5: Bločni diagrami zaprtzoančnih sistemov za primer 6.7

V tem primeru ne gre za metodo stopničaste invariance, ker je potrebno le diskretizirati zvezni signal, in ne poiskati diskretnega ekvivalenta zveznega sis-

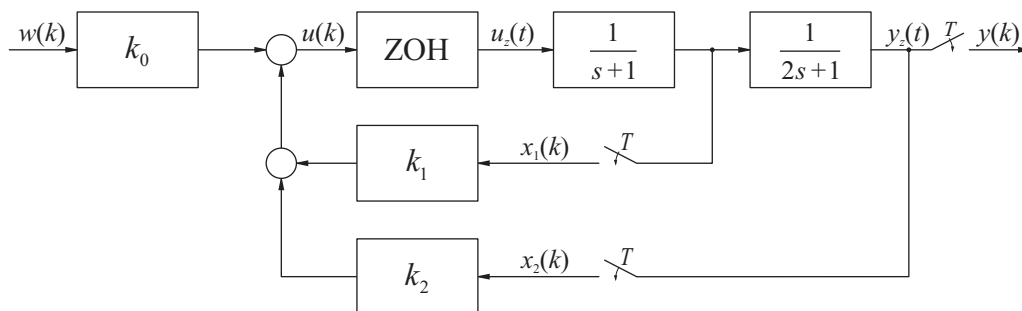
tema.

Pri analizi zank moramo poiskati točke, kjer je zanka prekinjena z diskretnim blokom (v našem primeru vzorčevalnikom), in transformirati zvezne sisteme, ki jih takšna delitev ustvari. Več podrobnosti lahko razberete iz rešitev:

$$\begin{aligned}
 \text{Primer a: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)}{1 + H_1H_2(z)} \\
 \text{Primer b: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \\
 \text{Primer c: } Y(z) &= \frac{R(z)H_1(z)H_2(z)}{1 + H_1(z)H_2H_3(z)} \\
 \text{Primer d: } Y(z) &= \frac{R_{G_1}(z)H_2(z)}{1 + H_1H_2H_3(z)} \\
 \text{Primer e: } Y(z) &= \frac{R_{G_1}(z)}{1 + H_1H_2(z)}
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

V zgornjih izrazih smo upoštevali enačbo (6.40) ter dejstvo, da predstavljajo  $H_1(z)$ ,  $H_2(z)$  in  $H_3(z)$  diskretne ekvivalente po metodi stopničaste invariance zveznih sistemov  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  in  $G_3(s)$ . ■

**Primer 6.8** Na sliki 6.6 je prikazan regulacijski sistem. Parametri regulatorja so  $k_0 = \frac{8}{3}$ ,  $k_1 = -\frac{2}{3}$ ,  $k_2 = -1$ . Čas vzorčenja je  $T = \ln 4 \doteq 1,3863$ . Izračunajte signala  $u(k)$  in  $y(k)$ , če sistem vzbujamo z enotino stopnico  $w(k)$ . Določite in skicirajte tudi poteka zveznih signalov  $u_z(t)$  in  $y_z(t)$ .



Slika 6.6: Bločni diagrami regulacijskega sistema za primer 6.8

Če označimo prenosno funkcijo  $\frac{1}{s+1}$  z  $G_1(s)$  in prenosno funkcijo  $\frac{1}{2s+1}$  z  $G_2(s)$  ter

poiščemo diskretna ekvivalenta:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_1(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} = \frac{\frac{3}{4}}{z - \frac{1}{4}} \\ H_1 H_2(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_1(s)G_2(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right\} = \frac{\frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

lahko na podlagi slike 6.6 zapišemo:

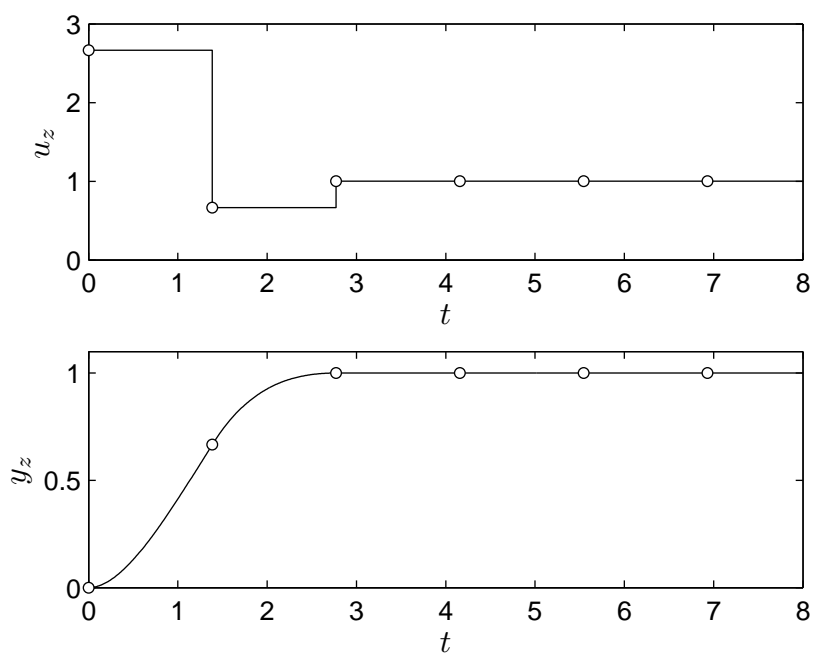
$$\begin{aligned} U(z) &= k_0 W(z) + k_1 X_1(z) + k_2 X_2(z) = k_0 W(z) + k_1 H_1(z)U(z) + k_2 H_1 H_2(z)U(z) \\ \frac{U(z)}{W(z)} &= \frac{k_0}{1 - k_1 H_1(z) - k_2 H_1 H_2(z)} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \\ \frac{Y(z)}{W(z)} &= \frac{k_0 H_1 H_2(z)}{1 - k_1 H_1(z) - k_2 H_1 H_2(z)} = \frac{\frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Prenosni funkciji  $\frac{U(z)}{W(z)}$  in  $\frac{Y(z)}{W(z)}$  imata oba pola v koordinatnem izhodišču, zaradi česar se odziv signalov  $u(k)$  in  $y(k)$  na stopničasto vzbujanje  $w(k)$  po  $k = 2$  ne spreminja. Diskretna signala  $u(k)$  in  $y(k)$  določimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} u(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{U(z)}{W(z)} W(z) \right\} = 1 + \frac{5}{3}\delta(k) - \frac{1}{3}\delta(k-1) = \begin{cases} \frac{8}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{3} & k = 1 \\ 1 & k \geq 2 \end{cases} \\ y(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{Y(z)}{W(z)} W(z) \right\} = 1 - \delta(k) - \frac{1}{3}\delta(k-1) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{2}{3} & k = 1 \\ 1 & k \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Signal vzbujanja  $u_z(t)$  dobimo tako, da peljemo signal  $u(k)$  v zadrževalnik ničtega reda in dobimo odziv, prikazan na sliki 6.7 zgoraj. Ker je signal vzbujanja odsekoma konstanten (ima tri odseke:  $0 \leq t < T$ ,  $T \leq t < 2T$  in  $t \geq 2T$ ), lahko zelo enostavno poiščemo analitično rešitev za  $y_z(t)$ . Na sliki 6.7 spodaj je prikazan simulirani odziv  $y_z(t)$ . Na prikazih regulirnega in reguliranega signala na sliki 6.7 so prikazani tudi vzorci diskretnih signalov  $u(k)$  in  $y(k)$ .

Zanimivo je dejstvo, da regulacijski sistem na sliki 6.6 zagotavlja, da je regulirani signal  $y_z(t)$  od  $t = 2T \doteq 2,8$  natančno enak referenčnemu signalu. Tega procesa ni mogoče zregulirati v končnem času z nobenim zveznim linearnim regulatorjem, z diskretnim linearnim regulatorjem pa je to očitno mogoče, kot je prikazal ta primer. ■



Slika 6.7: Regulirni in regulirani signal za primer 6.8

## Poglavje 7

# Zapis sistema v prostoru stanj

Prostor stanj omogoča alternativni zapis diskretnega sistema. Prednost tega zapisa pred zapisom v obliki prenosnih funkcij je, da je možno opisati tudi obnašanje nelinearnih sistemov in časovno spremenljivih sistemov. V splošnem je zapis *nelinearnega časovno spremenljivega sistema* v prostoru stanj naslednji:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(\mathbf{x}(k), u(k), k)\end{aligned}\tag{7.1}$$

kjer je  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Poenostavljeno povedano –  $\mathbf{f}$  je vektorska nelinearna preslikava,  $g$  pa skalarna nelinearna preslikava. Prva enačba v (7.1) se imenuje *enačba stanj*, druga pa je *izhodna enačba*. Če eksplicitne odvisnosti obeh funkcij od časa ni, govorimo o *nelinearnem časovno nespremenljivem sistemu*:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) &= g(\mathbf{x}(k), u(k))\end{aligned}\tag{7.2}$$

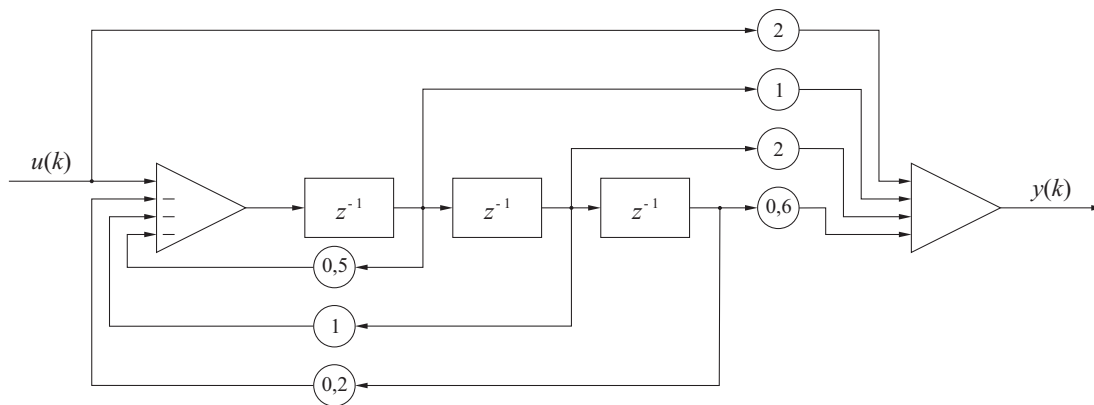
Obravnava nelinearnih sistemov je zahtevna, zato sistem pogosto lineariziramo v ravnovesni točki sistema. *Linearni časovno nespremenljivi sistem* lahko opišemo z linearnim sistemom enačb (s konstantnimi koeficienti) v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + du(k)\end{aligned}\tag{7.3}$$

kjer je  $\mathbf{A}$  kvadratna matrika dimenzije  $n$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$  sta stolpna vektorja dimenzije  $n$ ,  $d$  pa skalar. Matriko  $\mathbf{A}$  imenujemo *sistemska matrika*, vektor  $\mathbf{b}$  *vhodni vektor*, vektor  $\mathbf{c}^T$  pa *izhodni vektor*.

V vseh naštetih primerih podaja stanje sistema  $\mathbf{x}(k_0)$  informacijo, ki skupaj s poznavanjem vhodnega signala  $u(k)$  za  $k \geq k_0$  zadošča za natančno poznavanje odziva sistema v prihodnosti. Lahko rečemo, da poznavanje stanja sistema v vsakem trenutku nadomešča poznavanje dogajanja v preteklosti, če nas zanima le napoved prihodnjega obnašanja sistema.

**Primer 7.1** Zapišite v prostoru stanj diskretni sistem, katerega simulacijska shema je prikazana na sliki 7.1.



Slika 7.1: Bločna shema diskretnega sistema za primer 7.1

V diskretnem sistemu so stanja izhodi zakasnilnih blokov ( $z^{-1}$ ). Kadar nas zanima vhodno-izhodno obnašanje sistema, oštevilčenje stanj ni pomembno. V našem primeru označimo izhod desnega zakasnilnega bloka z  $x_1(k)$ , izhod srednjega z  $x_2(k)$  in izhod levega z  $x_3(k)$ . Signal na vhodu zakasnilnega bloka je seveda enokoračna predikcija signala na izhodu:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= -0,2x_1(k) - x_2(k) - 0,5x_3(k) + u(k) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Tudi izhodni signal zlahka izrazimo kot funkcijo stanj in vhoda v sistem:

$$y(k) = 0,6x_1(k) + 2x_2(k) + x_3(k) + 2u(k) \quad (7.5)$$

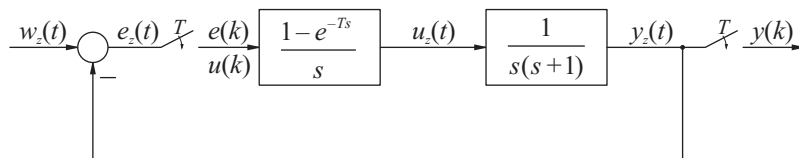
Običajno sistem zapišemo v obliki matričnih enačb:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,2 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (7.6)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 2u(k)$$

Zgornja predstavitev sistema je ena od kanoničnih oblik zapisa diskretnega sistema. Gre za vodljivostno regulatorsko kanonično obliko, pri kateri iz zadnje vrstice matrike  $\mathbf{A}$  direktno razberemo koeficiente imenovalca prenosne funkcije  $Y(z)/U(z)$ , iz vektorja  $\mathbf{c}$  pa koeficiente števca omenjene prenosne funkcije. ■

**Primer 7.2** Zapišite v prostoru stanj diskretni sistem z vhomom  $w(k) = w_z(kT)$  in izhodom  $y(k) = y_z(kT)$ . Pripadajoča bločna shema je prikazana na sliki 7.2.



Slika 7.2: Bločna shema diskretnega sistema za primer 7.2

Ker naloga ne zahteva posebne oblike zapisa v prostoru stanj, lahko uporabimo kateregakoli. Pred procesom  $G(s) = 1/(s(s+1)) = 1/s - 1/(s+1)$  je model zadrževalnika ničtega reda, zaradi česar je potrebno proces diskretizirati z metodo stopničaste invariance. Tokrat bomo posebej diskretizirali sistema  $1/s$  in  $1/(s+1)$  in njuna prispevka odšteli. V prejšnjih primerih smo videli, da sta ekvivalentna omenjenih sistemov po metodi stopničaste invariance  $T/(z-1)$  in  $(1 - e^{-T})/(z - e^{-T})$ . Torej velja:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{T}{z-1}U(z) - \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}U(z) = X_1(z) - X_2(z) \quad (7.7)$$

Izhoda obeh sistemov prvega reda smo torej označili z  $x_1(k)$  in  $x_2(k)$ . Vemo namreč, da lahko sistem prvega reda, katerega izhod je stanje sistema vedno

zapišemo v prostoru stanj. Torej:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + Tu(k) \\x_2(k+1) &= e^{-T}x_2(k) + (1 - e^{-T})u(k) \\u(k) &= w(k) - y(k) = w(k) - x_1(k) + x_2(k)\end{aligned}\tag{7.8}$$

Ko tretjo enačbo v (7.8) vstavimo v prvi dve, dobimo:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= (1 - T)x_1(k) + Tx_2(k) + Tw(k) \\x_2(k+1) &= -(1 - e^{-T})x_1(k) + x_2(k) + (1 - e^{-T})w(k)\end{aligned}\tag{7.9}$$

Končni rezultat zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_1(k+1) \\x_2(k+1)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 - T & T \\-(1 - e^{-T}) & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1(k) \\x_2(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}T \\1 - e^{-T}\end{bmatrix} w(k) \\y(k) &= \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1(k) \\x_2(k)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7.10}$$

Matriki  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{b}$  našega zapisa sta odvisni od časa vzorčenja, matriki  $\mathbf{c}^T$  in  $d$  pa ne. ■

## 7.1 Ekvivalentni sistemi

Ekvivalentni sistemi so tisti sistemi, ki se po vhodno-izhodnem obnašanju ne ločijo med seboj. Četudi je prenosna funkcija vseh sistemov enaka, je možno takšen sistem v prostoru stanj predstaviti z neskončno zapisi. Tudi če se omejimo le na zapise z minimalno dolžino vektorja stanj, še vedno obstaja neskončno mnogo zapisov takšnega sistema v prostoru stanj. Izkaže se, da obstaja med vektorji stanj teh sistemov linearna preslikava

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}\tag{7.11}$$

kjer je  $\mathbf{x}$  vektor stanj izhodiščnega sistema,  $\boldsymbol{\xi}$  vektor stanj transformiranega sistema,  $\mathbf{T}$  pa je nesingularna kvadratna matrika dimenzije  $n$ . Če izhodiščni sistem (7.3) pretvorimo v ekvivalentni sistem z linearno transformacijo (7.11), dobimo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(k+1) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(k) \\y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}\boldsymbol{\xi}(k) + du(k)\end{aligned}\tag{7.12}$$

Z izborom različnih transformacijskih matrik  $\mathbf{T}$  dobimo različne zapise transformiranega sistema. Določene vrste zapisov so v obliki, ki omogoča lažjo analizo oz. načrtovanje sistemov. Takšnim oblikam zapisa rečemo kanonične oblike.



**Primer 7.3** *Dinamični diskretni sistem je opisan z naslednjim zapisom v prostoru stanj:*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

*Pretvorite sistem v diagonalno kanonično obliko zapisa v prostoru stanj. Stanja novega sistema označite s  $\xi_1(k)$ ,  $\xi_2(k)$  in  $\xi_3(k)$  oz. z vektorjem  $\boldsymbol{\xi}(k)$ . Kakšno je začetno stanje transformiranega sistema  $\boldsymbol{\xi}(0)$ , če je začetno stanje podanega sistema  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1 \ 0]^T$ ?*

Pri pretvorbi v diagonalno kanonično obliko uporabimo za transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  kar matriko lastnih vrednosti systemske matrike:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_1 & \boldsymbol{\vartheta}_2 & \dots & \boldsymbol{\vartheta}_n \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Matriko  $\mathbf{A}$  ter njene lastne vektorje  $\boldsymbol{\vartheta}_i$  in lastne vrednosti  $\lambda_i$  povezuje naslednja enačba:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\vartheta}_i = \lambda_i\boldsymbol{\vartheta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.15)$$

ki jo lahko zapišemo tudi v bolj kompaktni obliki:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Lambda} \quad (7.16)$$

kjer je  $\boldsymbol{\Lambda}$  diagonalna matrika lastnih vrednosti. Lastne vrednosti systemske matrike so  $\lambda_1 = \frac{4}{5}$ ,  $\lambda_2 = \frac{9}{10}$  in  $\lambda_3 = 1$ , pripadajoči lastni vektorji pa:

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\vartheta}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\vartheta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Tukaj je potrebno omeniti, da pri postopku gradnje matrike  $\mathbf{T}$  ni potrebno normirati dolžin lastnih vektorjev, s čimer si običajno poenostavimo računanje. Matriki  $\mathbf{T}$  in  $\mathbf{T}^{-1}$  v danem primeru sta:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Če sistem transformiramo v obliko (7.12), dobimo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(k) + \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \boldsymbol{\xi}(0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -4 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Velja omeniti, da pretvorba multivariabilnega sistema ni nič zahtevnejša kot pretvorba univariabilnega sistema. V splošnem je obravnava multivariabilnih sistemov v prostoru stanj dokaj podobna obravnavi univariabilnih sistemov. ■

## 7.2 Odziv sistema na začetno stanje in odziv sistema na vzbujanje

Zapis sistema v prostoru stanj (7.3) podaja vektor stanj rekurzivno. Če enačbo izvajamo koračno, pridemo do eksplicitne rešitve:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{b} u(j) + d u(k) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Iz enačbe (7.20) vidimo, da je odziv vektorja stanj sestavljen iz odziva na začetno stanje  $\mathbf{x}(0)$  in odziva na vzbujanje  $u(k)$ . Najprej se omejimo na računanje odziva homogenega sistema, pri katerem igra glavno vlogo matrika  $\mathbf{A}^k$ , ki jo imenujemo diskretna matrika prehajanja stanj. Matrike seveda ni potrebno računati z ročnim množenjem matrik  $\mathbf{A}$ , pač pa jo lahko dobimo z  $z$ -transformacijo enačbe:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) \Rightarrow z \mathbf{X}(z) - z \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \mathbf{x}(0) \quad (7.21)$$

Če izvedemo inverzno  $z$ -transformacijo desne enačbe v (7.21) in rezultat primerjamo z enačbo (7.20), dobimo:

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \} \quad (7.22)$$

**Primer 7.4** Določite odziv stanja homogenega diskretnega sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Najprej moramo izračunati matriko  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{4}{25} & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Izračunati moramo inverzno z-transformacijo matrike  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z$ :

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{3}(\frac{1}{5})^k & \frac{5}{3}(\frac{4}{5})^k - \frac{5}{3}(\frac{1}{5})^k \\ -\frac{4}{15}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{15}(\frac{1}{5})^k & \frac{4}{3}(\frac{4}{5})^k - \frac{1}{3}(\frac{1}{5})^k \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Rešitev je torej:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{3}(\frac{1}{5})^k \\ -\frac{4}{15}(\frac{4}{5})^k + \frac{4}{15}(\frac{1}{5})^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0 \quad (7.26)$$

■

Če nas zanima le odziv na vzbujanje, ga poiščemo s pomočjo z-transformacije enačbe stanj:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \Rightarrow \mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z) \quad (7.27)$$

Ker iščemo le vsiljeni odziv sistema, smo upoštevali  $\mathbf{x}(0) = 0$ . Spet torej potrebujemo matriko  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , ki jo množimo z vektorjem  $\mathbf{b}$  in z-transformacijo vzbujalnega signala, nakar produkt z inverzno z-transformacijo pretvorimo v časovni prostor, s čimer pridemo do iskanega odziva  $\mathbf{x}(k)$ .

**Primer 7.5** Določite odziv stanja diskretnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Matriko  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  smo izračunali že v prejšnji nalogi:

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Vzbujalni signal je enotina stopnica, torej:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1} \quad (7.30)$$

Z-transformacija vektorja stanj je:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}U(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z - 1} = \\ &= \frac{z}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \begin{bmatrix} z \\ z - \frac{4}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \\ \frac{z(z - \frac{4}{25})}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})(z - 1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Z inverzno z-transformacijo prejšnje enačbe pridemo do končnega rezultata:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{5}{12}(\frac{1}{5})^k + \frac{25}{4} \\ -\frac{16}{3}(\frac{4}{5})^k + \frac{1}{12}(\frac{1}{5})^k + \frac{21}{4} \end{bmatrix}, \quad k \geq 0 \quad (7.32)$$

■

Kadar nas zanima odziv sistema, kjer je prisotno tako zunanje vzbujanje kot tudi od nič različno začetno stanje, lahko posebej izračunamo oba odziva. Ker obravnavamo linearne sisteme, velja princip superpozicije in končni odziv je vsota prispevkov obeh posamičnih odzivov. Druga možnost pa je, da enačbo stanj

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \quad (7.33)$$

obravnavamo kot običajno diferenčno enačbo, ki jo rešimo s pomočjo pretvorbe v  $z$ -prostor:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}U(z) \quad (7.34)$$

Iz enačbe (7.34) izpeljemo  $\mathbf{X}(z)$ , nad katerim izvršimo inverzno z-transformacijo, s čimer pridemo do odziva vektorja stanj na začetno stanje in zunanje vzbujanje:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ \mathbf{X}(z) \} = \mathcal{Z}^{-1} \{ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}U(z)] \} \quad (7.35)$$

### 7.3 Povezava zapisa v prostoru stanj z zapisom s prenosno funkcijo

Kot smo že omenili, pretvorba sistema, ki je opisan s prenosno funkcijo, v zapis v prostoru stanj ni enolična. Obstaja precej kanoničnih oblik, ki olajšajo določene analitične ali načrtovalske operacije nad sistemom. Obratna transformacija pa je enolična in jo izpeljemo z upoštevanjem izhodne enačbe in odziva vektorja stanj na vzbujanje, ki smo ga določili v prejšnjem razdelku. Prenosno funkcijo izračunamo kot količnik z-transformacij izhodnega in vhodnega signala, pri čemer upoštevamo, da so začetni pogoji enak 0:

$$G(z) = \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{\text{z.p. enaki } 0} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (7.36)$$

**Primer 7.6** Določite impulzni odziv diskretnega sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{25} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + 2u(k) \end{aligned} \quad (7.37)$$

Najprej izračunamo prenosno funkcijo sistema:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{c}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \begin{bmatrix} z - 1 & 1 \\ -\frac{4}{25} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 = \\ &= \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} + 2 \end{aligned} \quad (7.38)$$

Oba člena prenosne funkcije bi lahko združili v en člen, vendar je nadaljevanje naloge računsko nekoliko manj zahtevno, če tega ne storimo. Impulzni odziv je enak inverzni z-transformaciji prenosne funkcije, torej:

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{4}{5})} \right\} + 2\delta(k) = \frac{33}{4}\delta(k) + \frac{25}{12}\left(\frac{4}{5}\right)^k - \frac{25}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^k \quad (7.39)$$

■

## 7.4 Diskretizacija sistema

V prejšnjih poglavjih smo obravnavali pretvorbo zvezne prenosne funkcije v diskretni prostor. Možno je pretvoriti tudi zapis zveznega sistema v prostoru stanj v zapis diskretnega sistema v prostoru stanj. Pretvorba tudi tokrat ni enolična, ker pri njej zgublamo informacijo. Zopet je potrebno privzeti določene predpostavke, s čimer pridemo do enačb za transformacijo. Tokrat se bomo ukvarjali le z metodo stopničaste invariance. Privzeli bomo torej, da je na vhodu zveznega sistema zadrževalnik ničtega reda, ki povzroči, da je zvezni signal na vhodu v proces med dvema trenutkoma vzorčenja konstanten. Seveda nas zanima le vrednost izhoda procesa v trenutkih vzorčenja.

Izhajamo torej iz zveznega sistema, zapisanega v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \mathbf{A}_z \mathbf{x}_z(t) + \mathbf{b}_z u_z(t) \\ y_z(t) &= \mathbf{c}_z^T \mathbf{x}_z(t) + d_z u_z(t)\end{aligned}\quad (7.40)$$

Iz teorije zveznih sistemov poznamo odziv stanja takšnega sistema za  $t \geq t_0$ :

$$\mathbf{x}_z(t) = e^{\mathbf{A}_z(t-t_0)} \mathbf{x}_z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_z(t-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(\tau) d\tau \quad (7.41)$$

Če v zgornji enačbi  $t_0$  nadomestimo s  $kT$ ,  $t$  pa s  $kT + T$  ter upoštevamo, da je  $u_z(\tau)$  enak  $u_z(kT)$  za  $kT \leq \tau < kT + T$ , dobimo:

$$\mathbf{x}_z(kT + T) = e^{\mathbf{A}_z T} \mathbf{x}_z(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z u_z(kT) d\tau \quad (7.42)$$

Zanima nas le vrednost signalov v trenutkih vzorčenja, torej:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_z(kT), \quad u(k) = u_z(kT) \quad \text{in} \quad y(k) = y_z(kT) \quad (7.43)$$

Če upoštevamo enačbo (7.43), iz enačbe (7.42) sledi:

$$\mathbf{x}(k+1) = [e^{\mathbf{A}_z T}] \mathbf{x}(k) + \left[ \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}_z(kT+T-\tau)} \mathbf{b}_z d\tau \right] u(k) \quad (7.44)$$

Če primerjamo enačbo (7.44) z enačbo stanj diskretnega sistema, ugotovimo, da sta veličini v oglatih oklepajih matriki  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{b}$  zapisa sistema v prostoru stanj. Izraz za  $\mathbf{b}$  lahko nadalje poenostavimo, če v enačbi zamenjamo integracijsko spremenljivko  $\tau$  s  $t = kT + T - \tau$ , s čimer pridemo do končne formule za obe matriki:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} \quad \mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_z t} \mathbf{b}_z dt \quad (7.45)$$

Če je matrika  $\mathbf{A}_z$  nesingularna, lahko formulo za vektor  $\mathbf{b}$  poenostavimo:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{b}_z \quad (7.46)$$

Težavo pri zgornjih enačbah predstavlja računanje eksponentne funkcije za matrični argument. Če smo zadovoljni le s približkom rešitve, ki pa velja le za kratke čase vzorčenja (precej krajše kot so časovne konstante zveznega sistema), lahko eksponentno funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto, pri kateri upoštevamo le člena ničtega in prvega reda:

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{I} + \mathbf{A}_z T \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}_z^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{b}_z \doteq T\mathbf{b}_z \quad (7.47)$$

kjer smo zopet predpostavili, da je matrika  $\mathbf{A}_z$  nesingularna.

Kadar nas zanima eksaktna transformacija zapisa zveznega sistema v prostoru stanj v zapis diskretnega sistema v prostoru stanj po metodi stopničaste invariance, je potrebno izračunati  $e^{\mathbf{A}_z T}$ . Pri tem si pomagamo z zvezno matriko prehajanja stanj:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_z T} = e^{\mathbf{A}_z t} \Big|_{t=T} = \left[ \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} \right\} \right]_{t=T} \quad (7.48)$$

Diskretizacija izhodne enačbe ni problematična, saj enačbo opazujemo le v trenutkih vzorčenja, torej sta obe matriki v izhodni enačbi nespremenjeni:

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{c}_z^T \quad d = d_z \quad (7.49)$$

**Primer 7.7** Pretvorite naslednji zvezni sistem v diskretni prostor. Transformirani diskretni sistem zapišite v prostoru stanj, pri čemer naj bodo diskretna stanja dobljena z vzorčenjem zveznih stanj ob predpostavki prisotnosti zadrževalnika ničtega reda na vходу v zvezni proces. Model zveznega procesa, zapisan v prostoru stanj, se glasi:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z(t) \\ y_z(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_z(t) \end{aligned} \quad (7.50)$$

Za izračun sistemske matrike diskretnega sistema uporabimo enačbo (7.48). Najprej izračunamo  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1}$ :

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Nad matriko v enačbi (7.51) izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo in v rezultatu nadomestimo  $t$  s  $T$ , s čimer pridemo do sistemske matrike diskretnega sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

Ker je matrika  $\mathbf{A}_z$  singularna, je potrebno vektor  $\mathbf{b}$  izračunati iz enačbe (7.45):

$$\mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{A}_z t} \mathbf{b}_z dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T}-1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

Diskretizirani sistem se torej glasi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T}-1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (7.54)$$

■

## 7.5 Vodljivost, spoznavnost

Vodljivost sistema bomo ugotavljali z analizo vodljivostne matrike:

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

Sistem je vodljiv, če je vodljivostna matrika nesingularna. Ta pogoj je izpolnjen natanko takrat, ko je determinanta matrike različna od 0, kar je ekvivalentna zahteva, kot pogoj, da je rang matrike poln (torej enak  $n$ ).

Spoznavnost sistema določimo na podoben način z analizo spoznavnostne matrike:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.56)$$



**Primer 7.8** Podan je diskretni sistem:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (7.57)$$

*Ali je sistem vodljiv? Ali je spoznaven?*

Vodljivostna matrika je:

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_v = -6 \neq 0 \quad (7.58)$$

Sistem je torej vodljiv. Spoznavnostna matrika je:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_s = 3 \neq 0 \quad (7.59)$$

Sistem je tudi spoznaven. ■

**Primer 7.9** Podan je diskretni sistem iz primera 7.8, ki vključuje tudi povratno zanko:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u(k) &= w(k) - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)\end{aligned}\quad (7.60)$$

*Ali je sistem vodljiv z vhoda  $w(k)$ ? Ali je sistem spoznaven?*

Če vstavimo enačbo regulatorja v enačbo stanj, dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( w(k) - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \right) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & 1-k_2 \\ -2-k_1 & -3-k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{pz}} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w(k)\end{aligned}\quad (7.61)$$

Vodljivostna matrika povratnozančnega sistema je:

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}_{pz}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 - k_1 - k_2 \\ 1 & -5 - k_1 - k_2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_v = -6 \neq 0 \quad (7.62)$$

kjer je  $\mathbf{A}_{pz}$  sistemska matrika povratnozančnega sistema. Sistem je torej vodljiv tudi z vhoda  $w(k)$ . Spoznavnostna matrika je:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 - 3k_1 & -5 - 3k_2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{Q}_s = 3 + 6k_1 - 3k_2 \quad (7.63)$$

Sistem ni spoznaven za parametre regulatorja, ki izpolnjujejo naslednjo enačbo:

$$3 + 6k_1 - 3k_2 = 0 \quad (7.64)$$

Za ostale vrednosti parametrov regulatorja je sistem spoznaven. ■

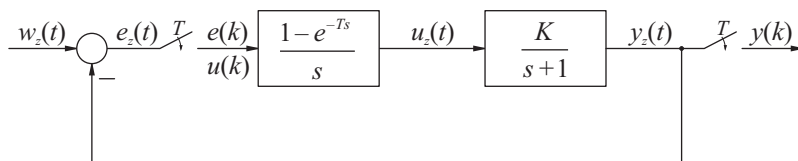
## Poglavje 8

# Stabilnost diskretnega sistema

Linearni časovno nespremenljivi diskretni sistem je stabilen, če vsi poli ležijo znotraj kroga enote. Če ima sistem poleg polov znotraj kroga enote tudi enostavne pole na enotini krožnici, pravimo, da je mejno stabilen. Diskretni sistem, ki ima vsaj en pol zunaj kroga enote ali vsaj en večkratni pol na enotini krožnici, je nestabilen.

Če je sistem zapisan v obliki prenosne funkcije, so poli enaki korenom imenovalca prenosne funkcije. Če je sistem zapisan v prostoru stanj, so poli enaki lastnim vrednostim sistemske matrike  $\mathbf{A}$ .

**Primer 8.1** *Obravnavali bomo stabilnost sistema, katerega shema je prikazana na sliki 8.1. Katere pogoje morata izpolnjevati  $T$  in  $K$ , da je sistem stabilen? To področje prikažite tudi v ravnini  $(T, K)$ .*



Slika 8.1: Bločna shema diskretnega sistema za primer 8.1

Ta sistem smo analizirali v primeru 6.5, kjer smo ugotovili, da je pol diskretnega sistema:

$$\pi_1 = (K + 1)e^{-T} - K \quad (8.1)$$

Sistem je stabilen, če je izpolnjen pogoj  $|\pi_1| < 1$ . Ker je  $T$  pozitivno realno število,  $K$  pa poljubno realno število, je tudi  $\pi_1$  realno število. Pogoj  $|\pi_1| < 1$  se torej prevede v naslednja dva pogoja:

$$\begin{aligned}(K + 1)e^{-T} - K &< 1 \\ (K + 1)e^{-T} - K &> -1\end{aligned}\tag{8.2}$$

Prvi pogoj v (8.2) je ekvivalenten pogoj:

$$(1 - e^{-T})(K + 1) > 0\tag{8.3}$$

Ker je  $T > 0$ , je prvi faktor na levi strani neenačbe (8.3) vedno pozitiven, kar pomeni, da mora biti za izpolnjenost pogoja (8.3) tudi drugi faktor pozitiven, od koder sledi prvi pogoj za stabilnost celotnega sistema:

$$K > -1\tag{8.4}$$

Drugi pogoj v (8.2) je ekvivalenten pogoj:

$$K(1 - e^{-T}) < 1 + e^{-T}\tag{8.5}$$

Ker je  $1 - e^{-T} > 0$ , nadalje sledi:

$$K < \frac{1 + e^{-T}}{1 - e^{-T}}\tag{8.6}$$

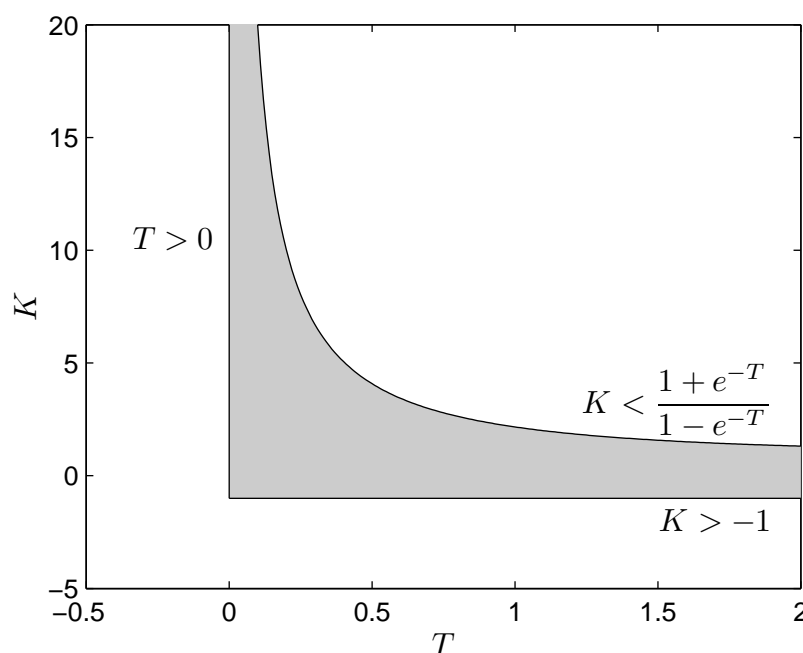
kar je drugi pogoj za stabilnost sistema. Pri poljubno izbranem času vzorčenja  $T > 0$  je sistem stabilen, če je izpolnjen naslednji pogoj:

$$-1 < K < \frac{1 + e^{-T}}{1 - e^{-T}}\tag{8.7}$$

Področje stabilnosti je prikazano na sliki 8.2. Ker je izraz  $\frac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}}$  vedno večji od 1, je sistem v področju  $-1 < K < 1$  stabilen ne glede na dolžino periode vzorčenja. ■

## 8.1 Modificirani Routhov kriterij

Če poznamo karakteristični polinom diskretnega sistema (enak je polinomu v imenovalcu prenosne funkcije oz. funkciji  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ), lahko preverimo, če vsi poli res ležijo v notranjosti kroga enote tudi tako, da sestavimo Routhovo shemo.



Slika 8.2: Področje stabilnosti v parametrični ravnini  $(T, K)$  za primer 8.1

Ker je le-ta namenjena analizi prisotnosti korenov polinoma v levi polravnini, je potrebno uporabiti preslikavo:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \text{ oz. } z = \frac{1+w}{1-w} \quad (8.8)$$

Če vsi poli karakterističnega polinoma diskretnega sistema ležijo znotraj kroga enote (v kompleksni ravnini  $z$ ), potem vsi poli v ravnini  $w$  ležijo v levi polravnini, kar lahko potrdimo, če zgradimo Routhovo shemo za polinom funkcije  $w$ .

**Primer 8.2** Karakteristična enačba diskretnega sistema je:

$$27z^3 + 27z^2 + 9z + 1 = 0 \quad (8.9)$$

*Ali je sistem stabilen?*

V enačbo (8.9) vpeljemo novo spremenljivko:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (8.10)$$

Po krajši izpeljavi pridemo do karakteristične enačbe

$$w^3 + 6w^2 + 12w + 8 = 0 \quad (8.11)$$

Sedaj sestavimo Routhovo tabelo za polinom iz enačbe (8.11):

$$\begin{array}{c|cc}
 w^3 & 1 & 12 \\
 w^2 & 6 & 8 \\
 w^1 & \frac{64}{6} & \\
 w^0 & 8 & 
 \end{array} \quad (8.12)$$

Ker so vsa števila v prvem stolpcu Routhove tabele istega predznaka, vsi korni karakteristične enačbe (8.11) ležijo v levi polravnini. Torej vsi korni karakteristične enačbe (8.9) ležijo znotraj kroga enote, kar pomeni, da je diskretni sistem stabilen. ■

## 8.2 Juryjev stabilnostni kriterij

Če je podana karakteristična enačba diskretnega linearnega časovno nespremenljivega sistema

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (8.13)$$

potem Juryjev stabilnostni kriterij podaja potrebne in zadostne pogoje, da vsi korni enačbe (8.13) ležijo znotraj kroga enote. Juryjev stabilnostni kriterij temelji na analizi Juryjeve tabele:

vrsta	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$\dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\dots$	$c_0$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$2n - 5$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$			
$2n - 4$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$			
$2n - 3$	$q_0$	$q_1$	$q_2$				

V prvo vrsto torej napišemo koeficiente karakteristične enačbe, v drugi vrsti pa jih napišemo v obratnem vrstnem redu. Elemente tretje vrste računamo s pomočjo

enačbe:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.14)$$

Četrto vrsto zopet zapišemo v obratnem vrstnem redu kot tretjo, elemente pete pa izračunamo kot:

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (8.15)$$

Postopek ponavljamo, dokler ne ostanejo v vrstici le tri elementi, ki jih izračunamo s pomočjo naslednjih enačb:

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix} \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix} \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \quad (8.16)$$

Vsi koreni enačbe (8.13) ležijo znotraj kroga enote natanko takrat, ko so izpolnjeni naslednji pogoji:

$$\begin{aligned} Q(1) &> 0 \\ (-1)^n Q(-1) &> 0 \\ |a_0| &< a_n \\ |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \\ &\vdots \\ |q_0| &> |q_2| \end{aligned} \quad (8.17)$$

Če prva dva pogoja nista izpolnjena, lahko zaključimo, da vsaj en od korenov karakteristične enačbe ne leži znotraj kroga enote, ne da bi bilo potrebno graditi Juryjevo tabelo.

**Primer 8.3** *Z Juryjevim stabilnostnim kriterijem bomo analizirali stabilnost štirih diskretnih sistemov, katerih karakteristične enačbe so:*

$$\begin{aligned} Q_1(z) &= 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0 \\ Q_2(z) &= 3z^4 + 3z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0 \\ Q_3(z) &= 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0 \\ Q_4(z) &= z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Najprej analiziramo izpolnjenost prvih dveh pogojev v (8.17):

$$\begin{aligned}
 Q_1(1) &= 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 9 > 0 \\
 (-1)^4 Q_1(-1) &= 2 - 2 + 3 - 1 + 1 = 3 > 0 \\
 Q_2(1) &= 3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11 > 0 \\
 (-1)^4 Q_2(-1) &= 3 - 3 + 1 - 2 + 2 = 1 > 0 \\
 Q_3(1) &= 2 + 2 + 3 + 3 + 1 = 11 > 0 \\
 (-1)^4 Q_3(-1) &= 2 - 2 + 3 - 3 + 1 = 1 > 0 \\
 Q_4(1) &= 1 + 2 + 1 + 1 = 5 > 0 \\
 (-1)^3 Q_4(-1) &= -(-1 + 2 - 1 + 1) = -1 \not> 0
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Ker  $Q_4(z)$  ne izpolnjuje drugega pogoja, pripadajoč sistem ni stabilen. Ker sta oba pogoja izpolnjena pri vseh preostalih karakterističnih polinomih, nadaljujemo z gradnjo treh Juryjevih tabel:

v.	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$	v.	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$	v.	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1	1	1	3	2	2	1	2	2	1	3	3	1	1	3	3	2	2
2	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	2	2	2	2	3	3	1
3	-3	-3	-3	0		3	-5	-5	-1	0		3	-3	-1	-3	-4	
4	0	-3	-3	-3		4	0	-1	-5	-5		4	-4	-3	-1	-3	
5	9	9	9			5	25	25	5			5	-7	-9	5		

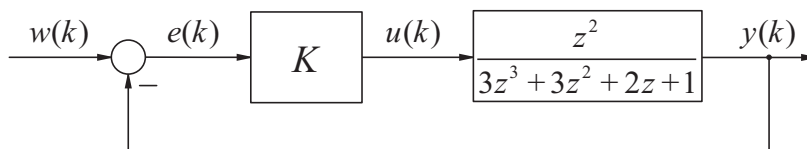
Pogoji, ki jih moramo testirati:

$$\begin{array}{lll}
 |a_0| = 1 < 2 = a_n & |a_0| = 2 < 3 = a_n & |a_0| = 1 < 2 = a_n \\
 |b_0| = 3 > 0 = |b_{n-1}| & |b_0| = 5 > 0 = |b_{n-1}| & |b_0| = 3 \not> 4 = |b_{n-1}| \\
 |c_0| = 9 \not> 9 = |c_{n-2}| & |c_0| = 25 > 5 = |c_{n-2}| & |c_0| = 7 > 5 = |c_{n-2}|
 \end{array}$$

Polinom  $Q_2(z)$  izpolnjuje vse pogoje, zato je drugi sistem stabilen. Ker tretji sistem ne izpolnjuje enega pogoja, je nestabilen. Polinom  $Q_1(z)$  ne izpolnjuje zadnjega pogoja, zato sistem nima vseh polov znotraj kroga enote. Edini pogoj, ki ni izpolnjen, je na meji, zato vsi poli sistema ležijo znotraj enotinega kroga ali na enotini krožnici. Ker s postopkom ne moremo določiti, če so poli na enotini krožnici enostavni, ne moremo določiti, če je sistem mejno stabilen ali nestabilen. ■



**Primer 8.4** Za katere vrednosti konstante  $K$  je sistem na sliki 8.3 stabilen?



Slika 8.3: Bločna shema diskretnega sistema za primer 8.4

Karakteristična enačba povratnozančnega sistema na sliki 8.3 je:

$$1 + K \frac{z^2}{3z^3 + 3z^2 + 2z + 1} = 0 \quad (8.20)$$

oziroma

$$Q(z) = 3z^3 + (K + 3)z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (8.21)$$

Sestavimo Juryjevo tabelo:

v.	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
1	1	2	$K + 3$	3
2	3	$K + 3$	2	1
3	-8	$-7 - 3K$	$K - 3$	

Pogoji sta stabilnost so:

$$\begin{aligned} Q(1) &= 3 + (K + 3) + 2 + 1 = K + 9 > 0 \\ (-1)^3 Q(-1) &= -(-3 + (K + 3) - 2 + 1) = 1 - K > 0 \\ |a_0| &= 1 < 3 = a_n \\ |b_0| &= |-8| = 8 > |K - 3| = |b_{n-1}| \end{aligned} \quad (8.22)$$

Tretji pogoj je izpolnjen, iz ostalih pa dobimo naslednje neenačbe za  $K$ :

$$\begin{aligned} K &> -9 \\ K &< 1 \\ K - 3 &< 8 \Rightarrow K < 11 \\ K - 3 &> -8 \Rightarrow K > -5 \end{aligned} \quad (8.23)$$

Presek vseh štirih pogojev je neenačba  $-5 < K < 1$ . Če želimo, da je povratnozančni sistem stabilen, mora konstanta  $K$  ležati na intervalu  $K \in (-5, 1)$ . ■

### 8.3 Direktna metoda Ljapunova

Direktna metoda Ljapunova (včasih jo imenujemo tudi druga metoda Ljapunova) je orodje za analizo stabilnosti, asimptotične stabilnosti in nestabilnosti homogenega sistema, ki ga opisuje naslednja diferenčna enačba:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), k) \quad (8.24)$$

Metoda je torej primerna predvsem za analizo stabilnosti nelinearnih in časovno spremenljivih sistemov, četudi je mogoče obravnavati tudi linearne sisteme (v večini primerov se stabilnost linearnih časovno nespremenljivih sistemov lažje določi z analizo polov, modificiranim Routhovim ali Juryjevim stabilnostnim kriterijem). Mi se bomo omejili na obravnavo nelinearnih časovno nespremenljivih sistemov naslednje oblike:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \quad (8.25)$$

Direktna metoda Ljapunova obravnava stabilnost sistema (8.25) v okolici ravnovesnih točk, za katere velja:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (8.26)$$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da je  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  ravnovesna točka obravnavanega sistema (če temu ni tako, uvedemo novo spremenljivko, za katero to velja). Zelo stroga matematična definicija Ljapunovih funkcij je zelo teoretično zahtevna [6], tako da bomo tu podali nekoliko poenostavljene definicije:

**Definicija 1.** Funkcija  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  pripada razredu  $\mathcal{K}$ , če je zvezna, strogo naraščajoča in  $\alpha(0) = 0$  ( $\mathbb{R}_+$  označuje množico pozitivnih realnih števil, ki vključuje tudi ničlo).

Funkcija  $\alpha(\xi)$  se torej v celoti nahaja v prvem kvadrantu ravnine  $(\xi, \alpha)$ , obvezno pa mora vsebovati tudi koordinatno izhodišče. Pomembno je tudi, da je funkcija na svojem definicijskem območju  $[0, \infty)$  zvezna in strogo naraščajoča. Definicija razreda  $\mathcal{K}$  je pomembna, ker mora biti Ljapunova funkcija navzdol omejena s poljubno funkcijo tega razreda:

**Definicija 2.** Skalarna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je pozitivno definitna funkcija, če izpolnjuje naslednja pogoja:

- $V(\mathbf{0}) = 0$ ,
- $V(\mathbf{x}) \geq \alpha(|\mathbf{x}|)$ , kjer je  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$ .

Funkcijo  $V(\mathbf{x})$  v okviru direktne metode Ljapunova imenujemo Ljapunova funkcija, njena vrednost je torej vedno (razen pri  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) pozitivna. Ni sicer nujno, da z oddaljevanjem od koordinatnega izhodišča ( $|\mathbf{x}|$  je namreč evklidska razdalja od koordinatnega izhodišča) vrednost funkcije narašča, je pa potrebno, da je funkcija navzdol omejena s funkcijo  $\alpha(|\mathbf{x}|)$ , ki z oddaljevanjem od koordinatnega izhodišča strogo narašča, ker pripada razredu  $\mathcal{K}$  (glej definicijo 1). Včasih imamo opravka s funkcijami, ki izpolnjujejo pogoje za pozitivno definitno funkcijo le v okolici ravnovesne točke sistema, zato definirajmo lokalno pozitivno definitne funkcije:

**Definicija 3.** Skalarna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je lokalno pozitivno definitna funkcija, če izpolnjuje naslednja pogoja:

- $V(\mathbf{0}) = 0$ ,
- obstaja  $r > 0$ , da velja:

$$|\mathbf{x}| < r \Rightarrow V(\mathbf{x}) \geq \alpha(|\mathbf{x}|), \alpha(\cdot) \in \mathcal{K} \quad (8.27)$$

Poenostavljeno povedano, funkcija je lokalno pozitivno definitna funkcija, če obstaja neka okolica koordinatnega izhodišča, v kateri je izpolnjen pogoj pozitivne definitnosti. Če je funkcija  $V$  pozitivno definitna, je funkcija  $-V$  negativno definitna. Na podlagi predhodnih definicij podajmo izrek o stabilnosti po Ljapunovu:

**Izrek 1.** Ravnovesna točka  $\mathbf{0}$  sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (8.25) je stabilna, če obstajata lokalno pozitivno definitna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in konstanta  $s > 0$ , za kateri velja:

$$\Delta V(k, \mathbf{x}(0)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall |\mathbf{x}(0)| < s \quad (8.28)$$

Če funkcija  $\Delta V$  izpolnjuje pogoj (8.28), pravimo tudi, da je funkcija  $\Delta V$  negativno semidefinitna. Če torej obstaja lokalno pozitivno definitna funkcija, katere sprememba je v vsakem koraku negativna ali pa se ne spremeni in to velja za vse začetne pogoje v neki okolici (hiperkrogli) koordinatnega izhodišča (ravnovesne točke), je sistem stabilen v smislu Ljapunova, kar pomeni, da tirnica sistema ostane v neki končni okolici ravnovesne točke (radij te druge hiperkrogel je sicer lahko večji, pomembno pa je, da je končen). Pogosto si želimo, da tirnice konvergirajo k ravnovesni točki, kar je strožja zahteva kot le omejenost tirnic:

**Izrek 2.** Ravnovesna točka  $\mathbf{0}$  sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (8.25) je asimptotično stabilna, če obstaja lokalno pozitivno definitna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , katere  $-\Delta V$  je lokalno pozitivno definitna funkcija.

Sistem je torej asimptotično stabilen v smislu Ljapunova, če obstajata lokalno pozitivno definitna funkcija  $V$  in pozitivna konstanta  $s$ , za kateri velja:

$$\Delta V(k, \mathbf{x}(0)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \leq -\alpha(|\mathbf{x}(0)|), \forall k \geq 0, \forall |\mathbf{x}(0)| < s, \alpha(\cdot) \in \mathcal{K} \quad (8.29)$$

Najpomembnejša razlika med stabilnostjo in asimptotično stabilnostjo je torej, zahteva, da mora biti pri slednji sprememba Ljapunove funkcije strogo negativna (razen pri  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ), medtem ko pri prvi dopuščamo, da se vrednost Ljapunove funkcije pri določenih časih in določenih začetnih pogojih ne spreminja. Zelo pomembna pa je velikost področja, kjer je funkcija asimptotično stabilna. Zato definirajmo še globalno asimptotično stabilnost:

**Izrek 3.** *Ravnovesna točka  $\mathbf{0}$  sistema, ki ga opisuje diferenčna enačba (8.25) je globalno asimptotično stabilna, če obstaja pozitivno definitna funkcija  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , katere  $-\Delta V$  je pozitivno definitna funkcija, velja pa še:*

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (8.30)$$

Če izpostavimo razlike med asimptotično in globalno asimptotično stabilnostjo, lahko rečemo, da pri slednji zahtevamo pozitivno definitnost Ljapunove funkcije in njene difference (pri asimptotični stabilnosti smo zahtevali le lokalno pozitivno definitnost), poleg tega pa zahtevamo, da gre vrednost Ljapunove funkcije proti neskončno, ko gre razdalja od koordinatnega izhodišča proti neskončno.

**Primer 8.5** *Mogoče ste se že kdaj igrali s kalkulatorjem starejšega datuma in pritiskali isto funkcijsko tipko, dokler se število na prikazovalniku ni več spreminjalo. Za primer odprite aplikacijo Calculator v operacijskem sistemu Windows, izberite pogled Scientific in nastavite kote v radianih. Če zaporedoma pritiskamo kosinusno tipko, dobimo zaporedje, ki konvergira k desetiški vrednosti 0,73908513321516064165531208767387. Sedaj formulirajte vprašanje, ki je bolj v skladu s snovjo, ki jo obravnavamo. Diskretni sistem opisuje naslednji zapis v prostoru stanj:*

$$x(k+1) = \cos(x(k)) \quad (8.31)$$

*Eno ravnovesno točko smo že določili in empirično pokazali, da je sistem stabilen v okolici te ravnovesne točke. Poiskali bomo vse ravnovesne točke sistema, analizirali stabilnost sistema v okolici ravnovesnih točk in področje stabilnosti (kakšen mora biti začetni pogoj  $x(0)$ , da zaporedje konvergira).*

Za ravnovesne točke velja  $x(k+1) = x(k)$ . Označimo jih z  $\bar{x}$ . Torej velja:

$$\bar{x} = \cos(\bar{x}) \quad (8.32)$$

Poiskati moramo rešitve enačbe:

$$f(x) = x - \cos(x) = 0 \quad (8.33)$$

Eno rešitev že poznamo ( $\bar{x} \doteq 0,739$ ). Vprašanje je, če je ta rešitev edina. Izračunajmo odvod funkcije  $f(x)$ :

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 + \sin(x) \geq 0 \quad (8.34)$$

Funkcija  $f(x)$  je torej monoton nepadajoča funkcija. Velja pa še:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} > 0 \Rightarrow f(x) \begin{cases} < 0 & x < \bar{x} \\ = 0 & x = \bar{x} \\ > 0 & x > \bar{x} \end{cases} \quad (8.35)$$

Pokazali smo, da je  $\bar{x} \doteq 0,739$  edina ravnovesna točka diskretnega sistema (8.31). Sedaj bomo analizirali še stabilnost sistema v okolici ravnovesne točke. V ta namen bomo definirali novo spremenljivko

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x} \quad (8.36)$$

in Ljapunovo funkcijo

$$V(\tilde{x}(k)) = \tilde{x}^2(k) \quad (8.37)$$

Ta funkcija je pozitivno definitna funkcija, izpolnjuje pa tudi pogoj (8.30). Če pokažemo, da je sprememba funkcije  $\Delta V$  negativno definitna (oz. je  $-\Delta V$  pozitivno definitna), je sistem globalno asimptotično stabilen (glej izrek 3). Sprememba Ljapunove funkcije je:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(\tilde{x}(k+1)) - V(\tilde{x}(k)) = \tilde{x}^2(k+1) - \tilde{x}^2(k) = \\ &= (\cos(x(k)) - \bar{x})^2 - (x(k) - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (8.38)$$

V nadaljevanju bomo zaradi večje preglednosti opuščali eksplicitno odvisnost  $x$  od  $k$ , tako da bomo namesto  $x(k)$  pisali kar  $x$ :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \cos^2 x - 2\bar{x} \cos x - x^2 + 2\bar{x}x = \\ &= (\cos x - x)(\cos x + x) - 2\bar{x}(\cos x - x) = \\ &= \underbrace{(\cos x - x)}_{-f(x)} \cdot \underbrace{(\cos x + x - 2\bar{x})}_{g(x)} = -f(x)g(x) \end{aligned} \quad (8.39)$$

Če hočemo dokazati stabilnost (asimptotično stabilnost), moramo pokazati, da je funkcija  $\Delta V$  negativno semidefinitna (negativno definitna). Enačba (8.35) je pokazala, kako je s predznakom funkcije  $f(x)$ , potrebno je analizirati še  $g(x)$ . Zaradi (8.32) velja:

$$g(\bar{x}) = 0 \quad (8.40)$$

Predznak funkcije  $g(x)$  lahko analiziramo podobno kot predznak funkcije  $f(x)$ :

$$(g(\bar{x}) = 0) \wedge \left( \frac{dg(x)}{dx} = 1 - \sin(x) \geq 0 \right) \wedge \left( \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} > 0 \right) \Rightarrow g(x) \begin{cases} < 0 & x < \bar{x} \\ = 0 & x = \bar{x} \\ > 0 & x > \bar{x} \end{cases} \quad (8.41)$$

Če upoštevamo ugotovitvi (8.35) in (8.41) lahko sklenemo:

$$\Delta V \begin{cases} < 0 & x \neq \bar{x} \text{ oz. } \tilde{x} \neq 0 \\ = 0 & x = \bar{x} \text{ oz. } \tilde{x} = 0 \end{cases} \quad (8.42)$$

Neenačba (8.42) pomeni, da je funkcija  $\Delta V$  negativno definitna, torej je sistem, ki ga analiziramo, asimptotično stabilen. Ker velja še  $\lim_{|\bar{x}| \rightarrow \infty} V \rightarrow \infty$ , je sistem globalno asimptotično stabilen, kar z drugimi besedami pomeni, da z našim postopkom pritiskanja kosinusne tipke vedno skonvergiramo k poprej določeni ravnovesni točki. Konvergenca je asimptotična in ni odvisna od začetnega stanja (prve vrednosti, ki smo jo vnesli v kalkulator). ■

**Primer 8.6** *Diskretni sistem opisuje naslednja enačba:*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= -y(k)\sqrt{x^2(k) + y^2(k)} \\ y(k+1) &= x(k)\sqrt{x^2(k) + y^2(k)} \end{aligned} \quad (8.43)$$

*Poiščite ravnovesna stanja sistema in analizirajte stabilnost v okolici ravnovesnih točk.*

Najprej poiščimo ravnovesne točke:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\bar{y}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \\ \bar{y} &= \bar{x}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (8.44)$$

Če delimo enačbi v (8.44), dobimo:

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0, \bar{y} = 0 \quad (8.45)$$

Koordinatno izhodišče je torej edina ravnovesna točka sistema. Za analizo stabilnosti bomo uporabili Ljapunovo funkcijo

$$V(x(k), y(k)) = x^2(k) + y^2(k) \quad (8.46)$$

katere diferenca je

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x(k+1), y(k+1)) - V(x(k), y(k)) = \\ &= \left(-y(k)\sqrt{x^2(k) + y^2(k)}\right)^2 + \\ &+ \left(x(k)\sqrt{x^2(k) + y^2(k)}\right) - x^2(k) - y^2(k) = \\ &= (x^2(k) + y^2(k)) (x^2(k) + y^2(k) - 1) \end{aligned} \quad (8.47)$$

Ta funkcija sicer ni negativno definitna (ali negativno semidefinitna) funkcija, je pa res, da za področje  $x^2 + y^2 < 1$  (notranjost enotnega kroga) to velja, saj je takrat prvi faktor v zadnji vrstici enačbe (8.47) pozitiven, drugi pa negativen. Funkcija je torej lokalno negativno definitna funkcija. Če je diferenca pozitivno definitne Ljapunove funkcije lokalno negativno definitna, je sistem lokalno asimptotično stabilen v okolici ravnovesne točke. Izkaže se, da sistem iz poljubnega začetnega stanja znotraj enotnega kroga konvergira k koordinatnemu izhodišču; vse tirnice, ki se začnejo na enotini krožnici, na njej ostanejo za zmeraj; tirnice zunaj kroga enote pa divergirajo. ■

## 8.4 Ljapunov stabilnostni teorem za linearne diskretne sisteme

Analizirali bomo stabilnost linearnega časovno nespremenljivega sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (8.48)$$

Če uporabimo Ljapunovo teorijo, ki smo jo predstavili v prejšnjem razdelku, se v primeru linearnega časovno nespremenljivega sistema ta teorija poenostavi v naslednji izrek:

**Izrek 4.** *Ravnotežno stanje  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sistema (8.48) je asimptotično stabilno tedaj, in le tedaj, če za katerokoli pozitivno definitno realno simetrično matriko  $\mathbf{Q}$  obstaja pozitivno definitna realna simetrična matrika  $\mathbf{P}$ , tako da velja:*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (8.49)$$

**Primer 8.7** Poiščite ravnovesne točke naslednjega sistema:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k) - x_2(k) - 5 \\x_2(k+1) &= x_1(k) - x_2(k) - 6\end{aligned}\tag{8.50}$$

*Ali je zgornji sistem linearen? Če ni, ga ustrezno preoblikujte, tako da je mogoče s pomočjo Ljapunovega stabilnostnega teorema za linearne diskretne sisteme analizirati tudi stabilnost sistema v okolici ravnovesnih točk.*

V ravnovesnih točkah velja  $x_1(k+1) = x_1(k) = \bar{x}_1$  in  $x_2(k+1) = x_2(k) = \bar{x}_2$ , torej:

$$\left. \begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{2}\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 5 \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1 = -2, \bar{x}_2 = -4\tag{8.51}$$

Ravnovesna točka sistema je torej  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -4)$ .

Sistem (8.50) ni linearen, ker preslikava  $(x_1(k), x_2(k)) \rightarrow (x_1(k+1), x_2(k+1))$  ni linearna. Ne izpolnjuje namreč niti pogoja aditivnosti ( $f(u+v) = f(u) + f(v)$ ) niti pogoja homogenosti ( $f(ku) = kf(u)$ ). (Preverite ti dve trditvi.) Zelo hitro opazimo, da bi sistem bil linearen, če na desni strani obeh enačb v (8.50) ne bi bilo tretjih členov. To lahko dosežemo s premikom koordinatnega sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - \bar{x}_2\end{aligned}\tag{8.52}$$

Če nove spremenljivke (8.52) upoštevamo v izhodiščnem sistemu (8.50), dobimo:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(k+1) - 2 &= \frac{1}{2}(\tilde{x}_1(k) - 2) - (\tilde{x}_2(k) - 4) - 5 \\ \tilde{x}_2(k+1) - 4 &= (\tilde{x}_1(k) - 2) - (\tilde{x}_2(k) - 4) - 6 \\ &\Downarrow \\ \tilde{x}_1(k+1) &= \frac{1}{2}\tilde{x}_1(k) - \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_2(k+1) &= \tilde{x}_1(k) - \tilde{x}_2(k)\end{aligned}\tag{8.53}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sistem s koordinatama  $\tilde{x}_1$  in  $\tilde{x}_2$  je torej linearen in časovno nespremenljiv. Ker se s premikom koordinatnega izhodišča ne spremeni stabilnost sistema v okolici ravnovesne točke, lahko torej uporabimo Ljapunov stabilnostni teorem za linearne



diskretne sisteme. Izberemo poljubno pozitivno definitno matriko  $\mathbf{Q}$ . Najenostavnejša izbira je enotina matrika:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

Iščemo matriko  $\mathbf{P}$ , ki mora biti realna in simetrična:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

Sedaj moramo rešiti enačbo (8.49):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\frac{3p_{11}}{4} + p_{12} + p_{22} & -\frac{p_{11}}{2} - \frac{5p_{12}}{2} - p_{22} \\ -\frac{p_{11}}{2} - \frac{5p_{12}}{2} - p_{22} & p_{11} + 2p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Rešiti moramo sistem 4 enačb s 3 neznankami. Izkaže se, da je sistem enolično rešljiv, saj sta enačbi za izvendiagonalna elementa enaki. Rešitev je:

$$p_{11} = \frac{7}{2}, \quad p_{12} = -\frac{9}{4}, \quad p_{22} = \frac{31}{8} \quad \text{oz.} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

Preveriti moramo še, če je matrika  $\mathbf{P}$  pozitivno definitna. Simetrična matrika je pozitivno definitna natanko takrat, ko so vse lastne vrednosti matrike pozitivne. Lastni vrednosti matrike  $\mathbf{P}$  sta  $\frac{59}{16} \pm \frac{3}{16}\sqrt{145}$  oz. 1,4297 in 5,9453. Ker sta obe lastni vrednosti pozitivni, je matrika  $\mathbf{P}$  pozitivno definitna, izhodiščni sistem pa je asimptotično stabilen v okolici ravnovesne točke  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (-2, -4)$ . ■



# Dodatek A

## Tabela z-transformacije

$x_z(t)$	$x(k) = x_z(kT)$	$\mathcal{L}\{x_z(t)\}$	$\mathcal{Z}\{x(k)\}$
	$\delta(k)$		1
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$kT$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$t^2$	$k^2T^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
$t^3$	$k^3T^3$	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$t^n$	$k^nT^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$
$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$t^2e^{-at}$	$k^2T^2e^{-akT}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T^2ze^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
$t^n e^{at}$	$k^n T^n e^{akT}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{z}{z-e^{aT}}$
$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$at - 1 + e^{-at}$	$akT - 1 + e^{-akT}$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(aT-1+e^{-aT})z^2+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\sin \omega_0 t$	$\sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$\cos \omega_0 t$	$\cos \omega_0 kT$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{z(z-\cos \omega_0 T)}{z^2-2z \cos \omega_0 T+1}$
$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$e^{-akT} \sin \omega_0 kT$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$e^{-akT} \cos \omega_0 kT$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2-2ze^{-aT} \cos \omega_0 T+e^{-2aT}}$



# Literatura

- [1] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems, Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1990.
- [2] D. Matko. *Diskretni regulacijski sistemi*. ZAFER, Ljubljana, 1991.
- [3] D. Matko, S. Strmčnik, B. Zupančič, and G. Mušič. *Računalniško vodenje procesov*. Založba FER, Ljubljana, 1996.
- [4] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design, Third Edition*. Prentice Hall, 1996.
- [5] R. Svečko. *Diskretni regulacijski sistemi*. Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, 2003.
- [6] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis, Second Edition*. SIAM, Philadelphia, 2002.
- [7] B. Zupančič. *Zvezni regulacijski sistemi, II. del (2. izdaja)*. ZAFER, Ljubljana, 1995.