

Identifikacija

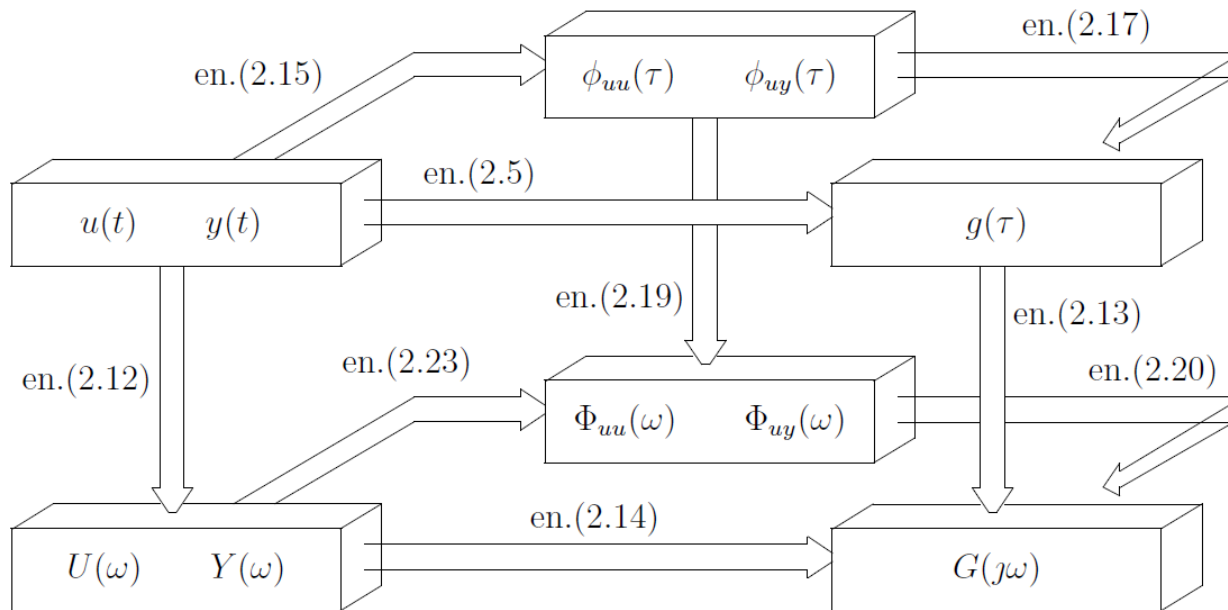
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko
Podiplomski študijski program 2. stopnje, 1. letnik
Izbirni predmet Modula A
Poletni semester 2012/2013
Sašo Blažič, Drago Matko





NEPARAMETRIČNE IDENTIFIKACIJSKE METODE

- Neparametrične identifikacijske metode temeljijo na sliki: Odnosi med vhodno-izhodnimi signali in neparametričnimi modeli v grafičnem prikazu





- Vsaka pot na sliki predstavlja eno metodo
- Obravnavali bomo le najbolj znane metode, to so:
 - Fourierovo analizo
 - Analizo frekvenčnega odziva, (direktno in s pomočjo korelacijskih funkcij)
 - Korelacijsko analizo in
 - Spektralno analizo
- Različne metode so bolj ali manj občutljive na motilni šum
- Pri identifikacijskih postopkih je zelo važen spekter vhodnega signala, s katerim sistem vzbujaemo

Neparametrične identifikacijske metode

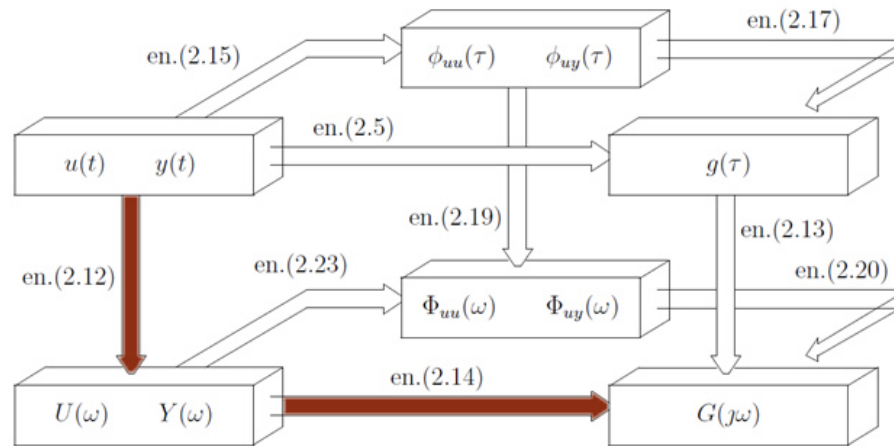


- Uporabljamo v glavnem tri vrste vhodnih signalov in sicer:
 - aperiodični signali
 - sinusni signali
 - naključni oziroma psevdonaključni šumni signali
- Obravnavali bomo posamezne identifikacijske postopke s posebnim poudarkom na analizi konvergence



FOURIEROVA ANALIZA

- Najbolj direktna neparametrična identifikacijska metoda je izračun Fourierovih transformacij vhodnega in izhodnega signala in njihovo deljenje



- Pri tej metodi najpogosteje uporabljamo aperiodične signale, to je pulze različnih dolžin (stopničasti signal je dolg pulz)



- Primer: Izračunajmo Fourierovo transformacijo pravokotnega, trikotnega in trapeznega impulza. Kako vpliva širina impulza na frekvenčni spekter? Kakšna je Fourierova transformacija točkovno simetričnega dvojnega pravokotnega impulza?
 - Trapezni impulz (T je trajanje impulza, T_1 čas vzpona in T_2 čas do začetka padanja):

$$U_{tr}(j\omega) = U_0 T_2 \left[\frac{\sin \frac{\omega T_1}{2}}{\frac{\omega T_1}{2}} \right] \left[\frac{\sin \frac{\omega T_2}{2}}{\frac{\omega T_2}{2}} \right] e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

Ničli spektra: $\frac{\omega T_1}{2} = n\pi$ in $\frac{\omega T_2}{2} = n\pi$ $n = 1, 2, 3 \dots$

oziroma: $f = \frac{n}{T_1}$ in $f = \frac{n}{T_2}$ $n = 1, 2, 3 \dots$



- Pravokotni impulz (T je trajanje impulza):

$$U_{pr}(j\omega) = U_0 T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right] e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

$$\text{Ničla spektra: } \frac{\omega T}{2} = \pi \quad \text{ozroma} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{\pi T} = \frac{1}{T}$$

- Izraz za pravokotni impulz dobimo iz izraza za trapezni impulz, če postavimo $T_1=0$, $T_2=T$
- Trikotni impulz (T je trajanje impulza):

$$U_{tri}(j\omega) = U_0 \frac{T}{2} \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right]^2 e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

$$\text{Ničla spektra (dvojna)} \quad \frac{\omega T}{4} = \pi \quad \text{ozroma} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi T} = \frac{2}{T}$$

- Izraz za trikotni impulz dobimo iz izraza za trapezni impulz, če postavimo $T_1 = T/2$ in $T_2 = T/2$



- Točkovno simetrični dvojni pravokotni impulz:

$$U_{sdpr}(j\omega) = \frac{U_0}{2} T \left[\frac{\sin^2 \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right] e^{-j\frac{\omega T - \pi}{2}}$$

- Ker je njegova srednja vrednost enaka nič, ne vzbuja enosmerne komponente, njegove ostale ničle pa so enake ničlam trikotnega signala.

Four_trans_signalov





- Potek identifikacijskega postopka je naslednji:
 - Ocenimo zanimivo frekvenčno območje vzbujanja, to je območje lastnih frekvenc vzbujanega procesa.
 - Pri tistih frekvencah, ki jih ne bomo vzbujali, oziroma, ki jih bomo slabo vzbujali, bodo napake ocene frekvenčnega odziva velike
 - Vzbujanje preširokega spektra frekvenc gre na škodo vzbujanja lastnih frekvenc procesa, saj je celotna moč vzbujevalnega signala običajno omejena
 - Prav tako moramo oceniti tudi trajanje meritve, ki je določeno z želeno frekvenčno resolucijo
 - Izvedemo meritve in posnamemo vhodni in izhodni signal
 - Izračunamo Fourierovo transformacijo vhodnega in izhodnega signala

$$- \quad Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$$



- Rezultat identifikacijskega postopka, to je frekvenčni odziv $G(j\omega)$ dobimo z deljenjem Fourierovih transformacij

$$G(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

- Verificiramo dobljeni model in po potrebi ponovimo postopek identifikacije

Primer 1



Primer 2



Primer 3



Primer 4





Analiza konvergence - šum

- Izhodni signal $y(t)$ je moten s šumom $n(t)$

$$y(t) = y_0(t) + n(t)$$

- Rezultirajoči frekvenčni odziv

$$G(j\omega) = \frac{F[y_0(t) + n(t)]}{F[u(t)]} = G_0(j\omega) + \Delta G_n(j\omega)$$

- Napaka frekvenčnega odziva

$$\Delta G_n(j\omega) = \frac{F[n(t)]}{F[u(t)]} = \frac{N(\omega)}{U(\omega)}$$



Pristranskost

- Če šum $n(t)$ ni koreliran z vhodnim signalom $u_0(t)$ in nemotenim izhodnim signalom $y_0(t)$ in če je njegova srednja vrednost enaka nič $E\{n(t)\} = 0$, je matematično upanje napake frekvenčnega odziva $\Delta G_n(j\omega)$ enako

$$E\{\Delta G_n(j\omega)\} = E\left\{\frac{F[n(t)]}{F[u(t)]}\right\} = \frac{E\{F[n(t)]\}}{E\{F[u(t)]\}} = \frac{F[E\{n(t)\}]}{F[E\{u(t)\}]} = \frac{0}{U(\omega)}$$

- Rezultirajoči frekvenčni odziv je nepristranski za vse vzbujeane frekvence ($U(\omega) \neq 0$)
- Ker je ocena frekvenčnega odziva nepristranska, je tudi konsistentna



Konsistenca v srednjekvadratični vrednosti

- Varianca napake frekvenčnega odziva $\Delta G_n(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad E\{|\Delta G_n(j\omega)|^2\} &= \frac{E\{F[n(t)]\overline{F[n(t)]}\}}{E\{F[u(t)]\overline{F[u(t)]}\}} = \frac{E\{\int_{-\infty}^{\infty} n(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)e^{+j\omega\tau} d\tau\}}{E\{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{+j\omega\tau} d\tau\}} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t)n(\tau)\}e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{u(t)u(\tau)\}e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{nn}(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau} = \\ &= \frac{\Phi_{nn}(\omega)}{\Phi_{uu}(\omega)} \approx \frac{\Phi_{nn}(\omega)T_A}{|U(\omega)|^2} \end{aligned}$$

- Oznaka prečno je uporabljena za označevanje konjugirano kompleksne vrednosti
- T_A je čas opazovanja odziva, ki mora biti dovolj velik, da vsebuje vso dinamiko signalov



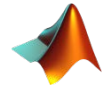
$$E\{|\Delta G_n(j\omega)|^2\} \approx \frac{\Phi_{nn}(\omega)T_A}{|U(\omega)|^2}$$

- Varianca napake frekvenčnega odziva je tem večja čim večja je spektralna močnostna gostota šuma in čim večji je interval opazovanja in tem manjša, čim večja je Fourierova transformacija vhodnega signala
- Varianca napake narašča z večanjem intervala opazovanja, zato ker podaljševanje intervala opazovanja ne prinaša nobene nove informacije o prehodnem pojavu (dinamiki procesa) oziroma ne povečuje spektra koristnega signala, medtem ko šum, ki ga v tem podaljšanem intervalu merimo povečuje spekter motilnega signala
- Prav tako lahko opazimo, da gre varianca frekvenčnega odziva pri tistih frekvencah, ki niso vzbujane ($|U(j\omega)| \rightarrow 0$) proti neskončnosti

Fourierova analiza - analiza konvergence



Primer 5

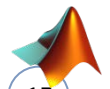


- Za beli šum postane varianca napake frekvenčnega odziva

$$E\{|\Delta G_v(j\omega)|^2\} = \frac{\Phi_0 T_A}{|U(\omega)|^2}$$

- Ocenjeni frekvenčni odziv je nepristranski. Frekvenčni odziv (Primer 5) pa izgleda pristranski.
- Ocenjeni frekvenčni odziv je pri visokih frekvencah zelo majhen, zato prevladuje šumna komponenta.
- Amplitudni odziv je absolutna vrednost frekvenčnega odziva (v logaritemskem merilu).
- Srednja vrednost absolutne vrednosti šuma pa seveda ni enaka 0, temveč $\int_{-\infty}^{\infty} |v|p(v)dv$, kjer je $p(v)$ distribucija šuma.
- Za Gaussov šum je ta vrednost 0,7979 njegove standardne deviacije

Primer 6



15



Analiza konvergence – ocena stacionarnih vrednosti signalov

- Signala $u(t)$ in $y(t)$ predstavljata le odklone absolutnih signalov $U(t)$ in $Y(t)$ od stacionarnih vrednosti U_{00} in Y_{00} (ki jih imenujemo tudi delovna točka).

$$u(t) = U(t) - U_{00}$$

$$y(t) = Y(t) - Y_{00}$$

- Stacionarno vrednost izhodnega signala Y_{00} ocenimo pred začetkom prehodnega pojava oziroma po izteku le-tega (obe vrednosti se lahko razlikujeta, če identificiramo integrirni proces in je srednja vrednost vhodnega signala različna od nič).
- Kot oceno stacionarne vrednosti izhodnega signala lahko uporabimo srednjo vrednost absolutnega izhodnega signala pred začetkom prehodnega pojava, oziroma po izteku le-tega ($\hat{Y}_{00} = E\{Y(t)\}$)



- Srednjo vrednost absolutnega izhodnega signala lahko dobimo s povprečenjem izhodnega signala na časovnem intervalu T_B

$$\hat{Y}_{00} = \frac{1}{T_B} \int_{-T_B}^0 Y(t) dt$$

- Matematično upanje napake ocene stacionarnega stanja

$$\Delta Y_{00} = \hat{Y}_{00} - Y_{00}$$

- je

$$\begin{aligned} E\{\Delta Y_{00}\} &= E \left\{ \frac{1}{T_B} \int_{-T_B}^0 [Y_{00} + y_0(t) + n(t)] dt - Y_{00} \right\} = \\ &= \frac{1}{T_B} \int_{-T_B}^0 E\{n(t)\} dt = 0 \end{aligned}$$

- Ocena je nepristranska če je srednja vrednost šuma anaka 0



- Varianca napake ocene je

$$\begin{aligned} E\{\Delta Y_{00}^2\} &= E\left\{\left[\frac{1}{T_B} \int_{-T_B}^0 n(t) dt\right]^2\right\} = \frac{1}{T_B^2} \int_{-T_B}^0 \int_{-T_B}^0 E\{n(t)n(\tau)\} dt d\tau = \\ &= \frac{1}{T_B^2} \int_{-T_B}^0 \int_{-T_B}^0 \phi_{nn}(t - \tau) dt d\tau \end{aligned}$$

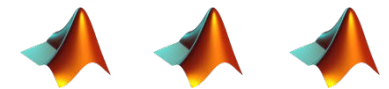
- Za beli šum ($n(t) = v(t)$) se ta izraz poenostavi v

$$E\{\Delta Y_{00}^2\} = \frac{\Phi_0}{T_B}$$

- Napake frekvenčnega odziva zaradi napačne ocene stacionarnega stanja lahko tolmačimo kot stopničasti motilni signal z jakostjo ΔY_{00} kot sledi

$$\Delta G_{\Delta Y}(j\omega) = \frac{\Delta Y_{00}}{j\omega U(\omega)}$$

Primer 7, 8, 9





- Varianco napake frekvenčnega odziva za beli šum dobimo z uporabo formule za napačno oceno stacionarnega stanja v naslednji obliki

$$E\{|\Delta G_{\Delta Y}(j\omega)|^2\} = \frac{\Phi_0}{\omega^2 |U(\omega)|^2 T_B}$$

- Če naredimo več (m) meritev (večkrat ponovimo postopek opisan v točkah 1-4, postane spektralna močnostna gostota vhodnega signala

$$m (|U(j\omega)|^2) / T_A$$

Če združimo vse možne vire napak, dobimo oceno variance napake frekvenčnega odziva za beli šum kot motilni signal v naslednji obliki:

$$E\{|\Delta G(j\omega)|^2\} = \frac{\Phi_0}{m |U(\omega)|^2} \left(T_A + \frac{1}{\omega^2 T_B} \right)$$



Ugodni preizkusni signali za Fourierovo analizo

- Kot ugodni preizkusni signali so označeni tisti signali, ki se dajo realizirati in ki imajo v določenem frekvenčnem območju največjo amplitudno gostoto pri podani višini preskusnega signala
- Ugodni preizkusni signali omogočajo najmanjšo napako frekvenčnega odziva
- Pri nizkih frekvencah so ugodni signali **stopnice**
- Pri srednjih in visokih frekvencah so ugodni signali **pravokotni impulzi**.
- Stopnice so v praksi seveda zelo dolgi pravokotni impulzi.



- Potrebna amplitudna gostota nekega preskusnega signala za nek naključno moten proces je (pri upoštevanju več - m meritev):

$$|U(j\omega)|_{pot} = \frac{\sqrt{\Phi_{nn}T_A}}{\sigma_G(\omega)\sqrt{m}}$$

- Tu je $\sigma_G(\omega)$ dopustna razpršitev napak frekvenčnega odziva
- Ta enačba kaže, da zavisi potrebna amplitudna gostota posebno od močnostne gostote motenj in od namena uporabe identificiranega modela, ki je izražen s $\sigma_G(\omega)$
- Splošni napotki za potrebno amplitudno gostoto so na ta način težavni in nemogoči brez natančnejšega poznavanja procesa
- Izračun primerov kaže, da mora biti za sintezo regulacij relativna napaka frekvenčnega odziva najmanjša pri srednjih frekvencah



- S tem je določen $|U(j\omega)|_{pot}$ v zanimivem frekvenčnem območju, to pa so kratki pravokotni impulzi
- Sedaj je očitno, da ne bomo uporabili le ene oblike preskusnega signala, ampak bomo sestavili za vsako frekvenčno območje ugodne preskusne signale v ugodno zaporedje preskusnih signalov kot sledi:
 - zaporedje nekaj stopnic (v praksi dolgih pravokotnih impulzov) za določitev frekvenčnega odziva pri nizkih frekvencah
 - zaporedje večih pravokotnih impulzov za določitev frekvenčnega odziva pri srednjih in visokih frekvencah
 - Kot smernica pri delitvi celotnega merilnega časa naj velja: 20-30% za odzive na stopnico, 80-70% za odzive na pravokotni impulz



- Trajanje T pravokotnega impulza določamo pri tem tako, da ležijo največje možne amplitudne gostote približno pri najvišjih zanimivih frekvencah ω_{max} , kar sledi iz dejstva, da pravokotni impulz zadovoljivo vzbuja le na frekvenčnem območju do frekvence, ki je enaka polovični frekvenci prve ničle frekvenčnega spektra pravokotnega signala
 - $T = \frac{\pi}{\omega_{max}}$
 - Opazimo podobnost med tako sestavljenimi preskusnimi signali in kasneje obravnavanimi binarnimi preskusnimi signali

Primer 10



Primer 11





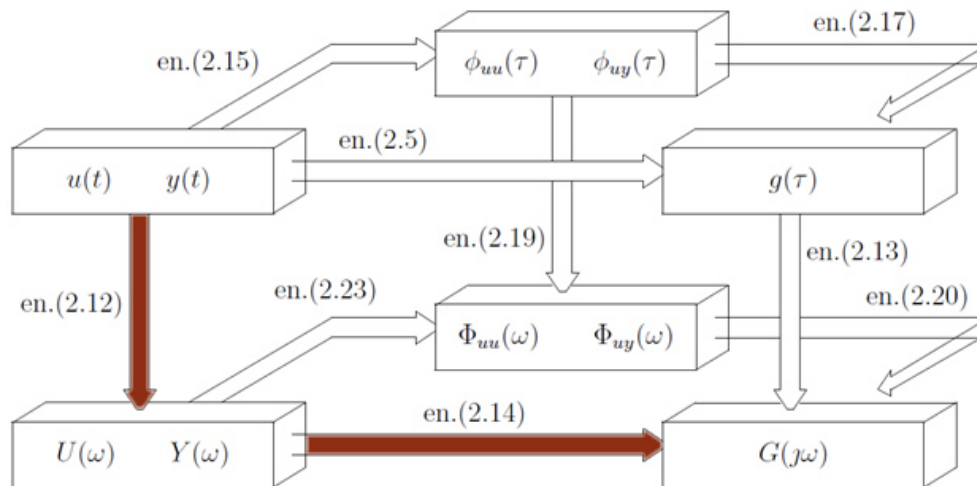
ANALIZA FREKVENČNEGA ODZIVA

- Frekvenčni odziv je sestavljen iz amplitudnega odziva (ki je razmerje amplitud izhodnega in vhodnega sinusnega/cosinusnega signala) in faznega odziva (ki je razlika faz obeh signalov)
- Frekvenčni odziv zato lahko merimo po njegovi definiciji, to se pravi, da damo na vhod sistema sinusni/cosinusni signal določene frekvence ω_0 in potem, ko prehodni pojav izzveni izmerimo razmerje amplitud oziroma razliko faz obeh signalov
- Če frekvenco ω_0 spreminjamo tako, da izvedemo meritve v večih točkah v vsem zanimivem frekvenčnem področju, dobimo potek frekvenčnega odziva kot funkcijo frekvence ω

Analiza frekvenčnega odziva



- Ta identifikacijska metoda je glede na teorijo signalov ekvivalentna metodi Fourierove analize, vendar z uporabo sinusnih vhodnih signalov



- Ker je uporabljen signal samo ene frekvence, ni potrebno izvesti Fourierove analize.



- Originalni postopek merjenja frekvenčnega odziva:
 - Meritev razmerja amplitud oz. razlike faz izvedemo direktno z zapisom na dvokanalnem pisalniku
 - oziroma s posebno napravo, imenovano kompenzator, ki daje na svojem izhodu dve sinusni nihanji, t.i. preskusno in primerjalno nihanje
 - Ta postopek je primeren le za sisteme z izredno majhnimi motnjami in pri relativno visokih frekvencah, saj je sicer poravnava težja
- Moderna možnost je vrednotenje frekvenčnega odziva z vzorčevalnikom, ki vzorči izhodni signal v dveh časovnih trenutkih
- Če uporabimo kot vhodni signal cosinusno nihanje

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$



- bo izhodni signal merjenega linearne procesa v stacionarnem stanju

$$y(t) = U_0 |G(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

- Če vzorčimo ta signal v dveh časovnih trenutkih

$$t_1 = nT = n \frac{2\pi}{\omega} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- in

$$t_2 = nT - \frac{T}{4} = \left(n - \frac{1}{4}\right) \frac{2\pi}{\omega} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- dobimo zaradi

$$\cos(\omega t_1 + \varphi) = \cos(2\pi n + \varphi) = \cos \varphi$$

- in

$$\cos(\omega t_2 + \varphi) = \cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin \varphi$$



- direktno realni in imaginarni del frekvenčnega odziva.

$$y(t_1) = U_0 |G(j\omega_0)| \cos\varphi = U_0 \Re[G(j\omega_0)]$$

$$y(t_2) = U_0 |G(j\omega_0)| \sin\varphi = U_0 \Im[G(j\omega_0)]$$

- Ker vzorčimo direktno izhodni signal, sta varianci napake realnega in imaginarnega dela frekvenčnega odziva enaki varianci motilnega šuma. Ker gre le za enkratno meritev pri vsaki frekvenci, nima smisla govoriti o konsistentnosti metode. Tudi ta metoda je primerna le za procese, ki so malo moteni

Primer1



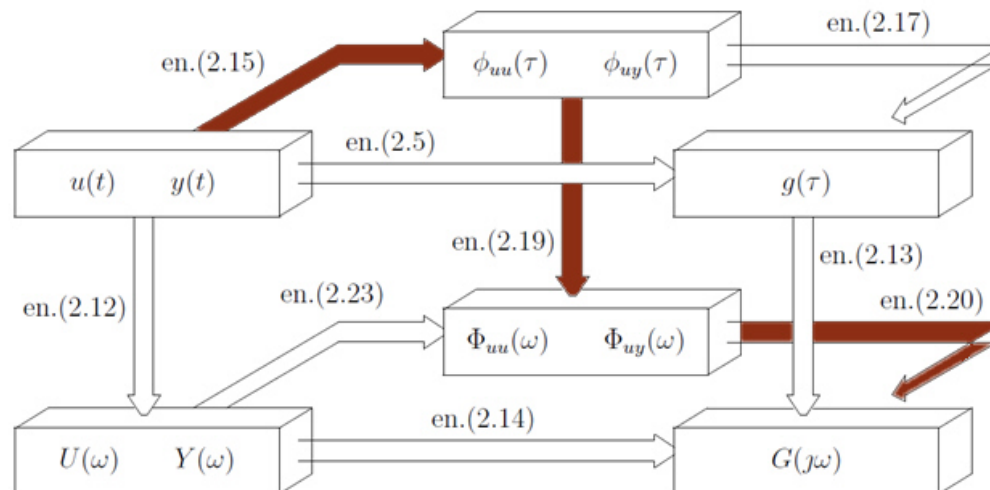
Primer2





METODA ORTOGONALNE KORELACIJE

- Če so signali zelo moteni s šumom, moramo uporabiti korelacijske metode.
- Metoda ortogonalne korelacije predstavlja na sliki 6 pot preko enačb (2.15), (2.19) in (2.20) z uporabo sinusnih/cosinusnih signalov. Ker imamo zopet opravka samo z eno frekvenco, ni potrebno izvesti Fourierove analize.





- Ne da bi izgubili na splošnosti, lahko uporabimo kot vhodni signal v sistem cosinusni signal

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$$

- Izhodni signal v stacionarnem stanju bo

$$y(t) = U_0 |G(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

- Ustrezni avto in križnokorelacijski funkciji sta

$$\phi_{uu}(\tau) = E\{u(t)u(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t + \tau) dt$$

$$\phi_{uy}(\tau) = E\{u(t)y(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)y(t + \tau) dt$$



- njihuni oceni pa

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{uu}(\tau) &= \frac{1}{nT_p} \int_0^{nT_p} u(t)u(t + \tau)dt = \frac{1}{nT_p} \int_0^{nT_p} U_0 \cos(\omega_0 t) U_0 \cos[\omega_0(t + \tau)]dt \\ &= \frac{U_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{uy}(\tau) &= \frac{1}{nT_p} \int_0^{nT_p} u(t)y(t + \tau)dt = \\ &= \frac{1}{nT_p} \int_0^{nT_p} U_0 \cos(\omega_0 t) U_0 |G(j\omega_0)| \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi(\omega_0)]dt \\ &= \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\omega_0)]\end{aligned}$$



- Oceno križnokorelacijske funkcije ovrednotimo v dveh točkah, to je za $\tau = 0$ in $\tau = -T/4 = -\pi/(2\omega_0)$ ter dobimo

$$\hat{\phi}_{uy}(0) = \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \cos[\varphi(\omega_0)] = \frac{U_0^2}{2} \Re[G(j\omega_0)]$$

- oziroma

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{uy}\left(\frac{-\pi}{2\omega_0}\right) &= \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \cos\left[-\frac{\pi}{2} + \varphi(\omega_0)\right] = \frac{U_0^2}{2} |G(j\omega_0)| \sin[\varphi(\omega_0)] \\ &= \frac{U_0^2}{2} \Im[G(j\omega_0)] \end{aligned}$$



- Realni in imaginarni del frekvenčnega odziva dobimo z upoštevanjem enačb za korelacijske funkcije

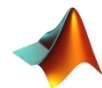
$$\Re[G(j\omega_0)] = \frac{2}{U_0^2 nT_p} \int_0^{nT_p} U_0 \cos(\omega_0 t) y(t) dt = \frac{2}{U_0 nT_p} \int_0^{nT_p} y(t) \cos(\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned} \Im[G(j\omega_0)] &= \frac{2}{U_0^2 nT_p} \int_0^{nT_p} U_0 \cos(\omega_0 t) y\left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right) dt \\ &= \frac{2}{U_0 nT_p} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{nT_p - \frac{\pi}{2\omega_0}} y(t) [-\sin(\omega_0 t)] dt \end{aligned}$$

- Zaradi periodičnosti vseh funkcij lahko zamenjamo meje integrala v tej enačbi z 0 in nT_p in dobimo

$$\Im[G(j\omega_0)] = \frac{-2}{U_0 nT_p} \int_0^{nT_p} y(t) \sin(\omega_0 t) dt$$

Primer1





- Če je izhodni signal moten s šumnim signalom $n(t)$

$$y(t) = y_0(t) + n(t)$$

- postane frekvenčni odziv

$$\Re[G(j\omega_0)] = \frac{2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} [y_0(t) + n(t)] \sin(\omega_0 t) dt = \Re[G_0(j\omega_0)] + \Delta\Re[G(j\omega_0)]$$

$$\Im[G(j\omega_0)] = \frac{2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} [y_0(t) + n(t)] \cos(\omega_0 t) dt = \Im[G_0(j\omega_0)] + \Delta\Im[G(j\omega_0)]$$

- kjer sta

$$\Delta\Re[G(j\omega_0)] = \frac{2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} n(t) \cos(\omega_0 t) dt$$

- in

$$\Delta\Im[G(j\omega_0)] = \frac{-2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} n(t) \sin(\omega_0 t) dt$$



- Če ima šum $n(t)$ srednjo vrednost nič ($E\{n(t)\} = 0$) in ni koreliran z vhodnim signalom, je pristanskost napake ocene frekvenčnega odziva:

$$\begin{aligned} E\{\Delta\Re[G(j\omega_0)]\} &= E\left\{\frac{2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} n(t) \cos(\omega_0 t) dt\right\} = \\ &= \frac{2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} E\{n(t)\} \cos(\omega_0 t) dt = 0 \end{aligned}$$

- in

$$\begin{aligned} E\{\Delta\Im[G(j\omega_0)]\} &= E\left\{\frac{-2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} n(t) \sin(\omega_0 t) dt\right\} = \\ &= \frac{-2}{U_0 n T_p} \int_0^{nT_p} E\{n(t)\} \sin(\omega_0 t) dt = 0 \end{aligned}$$

- Ocena frekvenčnega odziva je v tem primeru nepristranska



- Varianca napake ocene frekvenčnega odziva je:

$$E\{|\Delta G(j\omega_0)|^2\} = E\{\Delta\Re^2[G(j\omega_0)] + \Delta\Im^2[G(j\omega_0)]\}$$

- Izpeljava enačb je precej zahtevna, podani bodo le rezultati za tri vrste motenj in sicer za:
 - Visokofrekvenčni kvazistacionarni šum
 - Sinusno/cosinusno motnjo
 - Nizkofrekvenčne motnje (lezenje - s tujko drift)



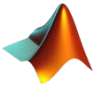
- Visokofrekvenčni kvazistacionarni šum

$$\sigma_{G_n}^2 = E\{|\Delta G(j\omega_0)|^2\} = \frac{4}{U_0^2 n T_p} \int_{-nT_p}^{nT_p} \phi_{nn}(\tau) \left[1 - \frac{|\tau|}{nT_p}\right] e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

- Za beli šum ($n(t) = v(t)$) s spektralno močnostno gostoto Φ_0 dobimo naslednjo varianco napake frekvenčnega odziva

$$\sigma_{G_v}^2 = \frac{4\Phi_0}{U_0^2 n T_p}$$

Primer2

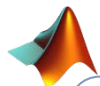
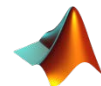


- Za širokopasovni šum in dolge merilne čase dobimo

$$\sigma_{G_n}^2 \approx \frac{4}{U_0^2 n T_p} \int_{-nT_p}^{nT_p} \phi_{nn}(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \approx \frac{4\Phi_{nn}(\omega_0)}{U_0^2 n T_p}$$

- Metoda je konsistentna v srednjekvadratični vrednosti, kajti varianca napake ocene gre z naraščajočim številom period opazovanja n proti nič

Primer 3,4





- Če upoštevamo še

- $$\Phi_{nn}(\omega) = |G_n(j\omega)|^2 \Phi_0 = \frac{\Phi_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

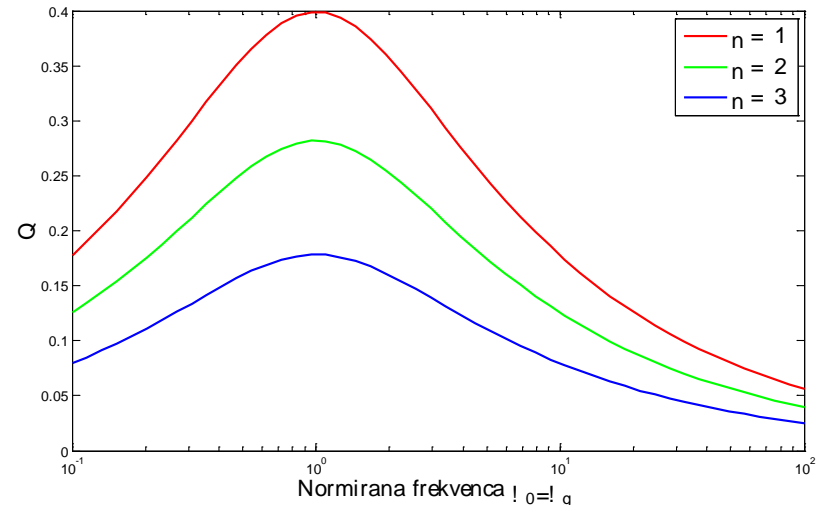
- dobimo

- $$\sigma_{G_n} = \frac{\sqrt{2\Phi_0\omega_g}}{U_0} Q$$

- kjer je

- $$Q = \frac{\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_g}}}{\sqrt{\pi[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_g}\right)^2]}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- Metoda je konsistentna v srednjekvadratični vrednosti, kajti varianca napake ocene gre z naraščajočim številom period opazovanja n proti nič

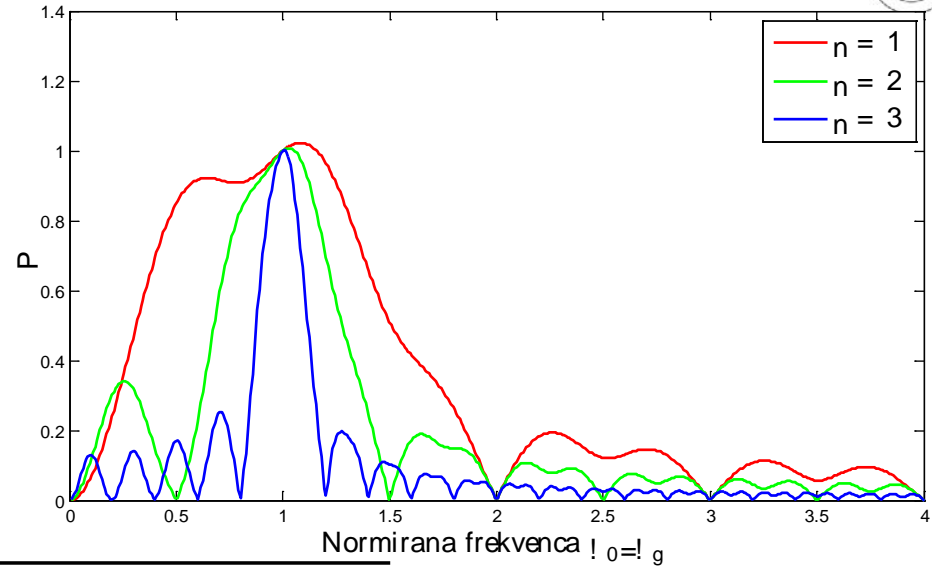




- Sinusna/cosinusna motnja

- $n(t) = N_0 \cos(\omega t)$

- $|\Delta G(j\omega_0)| = \sigma_{G_S} = \frac{N_0}{U_0} P$

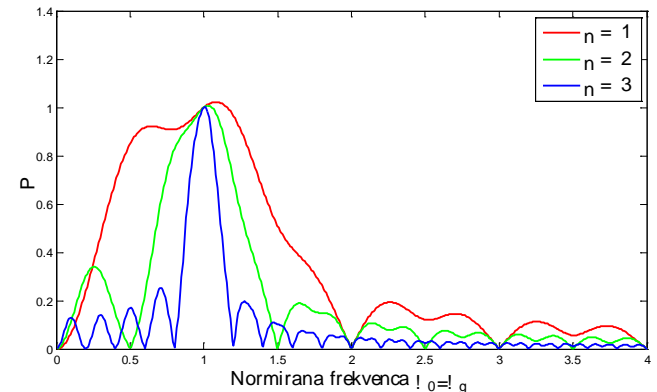


- $$P = \frac{2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} \frac{|\sin\left(\frac{\pi n \omega}{\omega_0}\right)|}{\frac{\pi n \omega}{\omega_0}} \sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \cos^2\left(\frac{\pi n \omega}{\omega_0}\right)}$$

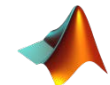
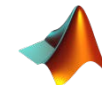
- Vidimo, da ima faktor P ničle pri $\omega/\omega_0 = 0, 2, 3, 4, \dots$, kar pomeni, da enosmerne motnje in motnje s frekvencami, ki so celoštevilčni mnogokratniki merilne frekvence ne povzročajo napake frekvenčnega odziva



- To velja tudi za končni merilni čas
- Periodične motnje z vsemi ostalimi frekvencami pa povzročajo pri končnem merilnem času nT_p napako frekvenčnega odziva, ki je proporcionalna faktorju P
- Največjo napako povzročajo signali, katerih frekvenca je blizu merilni frekvenci ω_0
- Standardna deviacija napake frekvenčnega odziva gre za dolge čase merjenja ($n \rightarrow \infty$) proti nič, ocena je torej konsistentna v srednjekvadratični vrednosti.



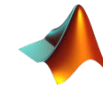
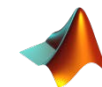
Primer 5,6





- Nizkofrekvenčne motnje (lezenje - s tujko drift)
- $n(t) = d(t)$
- $\sigma_{Gd} = \frac{4D_0}{U_0\omega_0}$
- Napaka frekvenčnega odziva, ki nastane zaradi linearnega lezenja ne pada z daljšanjem merilnega časa
- Metoda torej pri nizkofrekvenčni motnji (lezenju) ni konsistentna v srednje kvadratični vrednosti
- Metoda nepristranska le, če je srednja vrednost motenj (njihovo matematično upanje) enaka nič
- Pri tovrstnih motnjah je potrebno vnesti dodatne ukrepe (n.pr. filtriranje).

Primer 7,8





Vrednotenje frekvenčnega odziva s pravokotnimi in s trapeznimi preskusnimi signali

- V mnogih primerih je bistveno enostavneje vzbujati proces s pravokotnimi oz. s trapeznimi signali
- Realizacija sinusnih signalov je namreč običajno zelo zahtevna in zahteva precizne nastavitvene organe
- Vzbujanje v veliki meri odvisno od izvršnih členov
- Pravokotno nihanje z amplitudo U_0 in frekvenco ω_0 razvijemo v Fourierovo vrsto.

$$u(t) = \frac{4}{\pi} U_0 \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Izhodni signal linearnega procesa je potem

$$y(t) = \frac{4}{\pi} U_0 \left[|G(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] + \frac{1}{3} |G(3j\omega_0)| \sin[3\omega_0 t + \varphi(3\omega_0)] + \frac{1}{5} |G(5j\omega_0)| \sin[5\omega_0 t + \varphi(5\omega_0)] + \dots \right]$$

- Signali, ki so večkratniki merjene frekvence in so dodani izhodnemu signalu, pri vrednotenju frekvenčnega odziva z metodo ortogonalne korelacije, ne povzročajo nobene napake (seveda, če integriramo produkt izhodnega signala in sinusnega oz. cosinusnega signala na časovnem intervalu, ki je mnogokratnik periode osnovnega signala)
- O tem se lahko prepričamo na sliki dve prosojnici nazaj

Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Pri tem pogoju je vzbujanje s pravokotnim signalom z amplitudo U_0 ekvivalentno vzbujanju s sinusnim signalom iste frekvence z amplitudo $\frac{4}{\pi} U_0$
- Zato lahko za vrednotenje frekvenčnega odziva uporabimo kar formuli za sinusno vzbujanje, ki ju pomnožimo s $\frac{\pi}{4}$ in dobimo:

$$\Re[G(j\omega_0)] = \frac{\pi}{2U_0 nT_p} \int_0^{nT_p} y(t) \cos(\omega_0 t) dt$$

$$\Im[G(j\omega_0)] = \frac{-\pi}{2U_0 nT_p} \int_0^{nT_p} y(t) \sin(\omega_0 t) dt.$$

- Analiza napak merjenega frekvenčnega odziva je enaka kot pri čistem sinusnem vzbujanju; predpostaviti moramo, da vzbuja proces s sinusnim signalom z amplitudo $\frac{4}{\pi} U_0$

Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Prednosti tega merilnega postopka so naslednje:
 - Vzbujanje pravokotnega nihanja je enostavnejše kot vzbujanje sinusnega vhodnega nihanja - Izvršni člen moramo premikati le med dvema točkama sem ter tja.
 - Karakteristika izvršnega člena je lahko nelinearna.
 - V primerjavi z vsemi drugimi periodičnimi preskusnimi signali vsebuje pravokotno nihanje pri podani amplitudi U_0 osnovno harmonsko komponento z največjo amplitudo. Zato so tudi napake merjenega frekvenčnega odziva najmanjše

Primer 1 2



Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Pravokotni signal pa vsebuje seveda tudi višje harmonske komponente, ki bi jih seveda lahko tudi koristno uporabili pro ovrednotenju frekvenčnega odziva
- V tem primeru seveda opazujemo le tretjo oz. peto harmonsko komponento, osnovna harmonska komponenta in peta oz. tretja harmonska komponenta v izhodnem signalu pa predstavljata motnje.
- Ker pa ni možno doseči, da bi bila peta harmonska komponenta večkratnik tretje, napak ni možno popolnoma izločiti.
- Višje harmonske komponente lahko zato izrabljamo le pri višjih frekvencah, pri katerih je peta harmonska komponenta tako zadušena (vsi realni procesi močno dušijo visoke frekvence), da je napaka zanemarljiva.

Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Pri procesih z integrirnimi izvršnimi členi tudi pravokotnih vzbujevalnih signalov ni možno realizirati
- V takšnih primerih uporabimo *trapezne* vzbujevalne signale
- Postopek je podoben kot pri pravokotnih signalih, le da je za trapezni signal

$$y = \frac{U_0 t}{T_1} \quad \text{za} \quad 0 \leq t \leq T_1$$

$$y = U_0 \quad \text{za} \quad T_1 \leq t \leq T - T_1$$

$$y = \frac{U_0(T - t)}{T_1} \quad \text{za} \quad T - T_1 \leq t \leq T$$

Metoda ortogonalne korelacije – pravokotni in trapezni preskusnimi signali



- Fourierova vrsta enaka

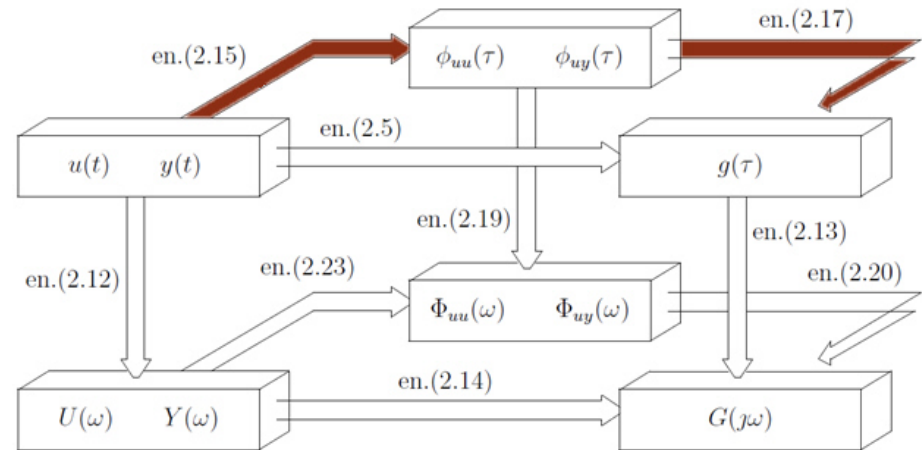
$$u = \frac{2U_0T}{\pi^2T_1} \left[\sin(\omega_0T_1)\sin(\omega_0t) + \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_0T_1)\sin(3\omega_0t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_0T_1)\sin(5\omega_0t) + \dots \right]$$

- Frekvenčni odziv, ki ga izračunamo po formulah za sinusno vzbujanje je v tem primeru potrebno pomnožiti z $\frac{\pi^2T_1}{2T\sin(\omega_0T_1)}$



METODA KORELACIJSKE ANALIZE

- Najbolj direktna pot od časovnih signalov do neparametričnih modelov je dekonvolucija (en. 2.5), ki je v praksi ne uporabljamo, ker je zelo občutljiva na šum
- Bolj uporabna metoda je korelacijska analiza, ki temelji na ovrednotenju korelacijskih funkcij (avtokorelaciji vhodnega signala in križni korelaciji vhodnega in izhodnega signala) in na njuni dekonvoluciji (en. 2.15, 2.17), , katere rezultat je impulzni odziv procesa
- Frekvenčni odziv dobimo s Fourierovo transformacijo impulznega odziva.



Metoda korelacijske analize (zvezno)



- Pri dekonvoluciji moramo določiti impulzni odziv $g(\tau)$ iz znane konvolucijske enačbe

$$\phi_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t)\phi_{uu}(\tau - t)dt$$

- kar je pri časovno zveznih signalih kompleksna matematična operacija, ki jo v praksi lahko le aproksimativno rešimo
- Druga možnost je uporaba časovno diskretnih signalov, kar bomo obravnavali kasneje
- Tretja možnost je uporaba belega šuma (zelo širokopasovnega šuma v praksi)
- Ker je avtokorelacija belega šuma s spektralno močnostno gostoto Φ_{u0} enaka delta impulzu

$$\phi_{uu}(\tau) = \Phi_{u0}\delta(\tau)$$

Metoda korelacijske analize (zvezno)



- preide konvolucijska enačba v

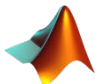
$$\phi_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} g(t)\Phi_{u0}\delta(\tau - t)dt = g(\tau)\Phi_{u0}$$

- iz česar sledi

$$g(\tau) = \frac{1}{\Phi_{u0}}\phi_{uy}(\tau)$$

- Identifikacijski postopek je tako zelo enostaven:
 - Beli (zelo širokopasovni) šum uporabimo kot vhodni signal v proces, izračunamo križnokorelacijsko funkcijo med vhodnim in izhodnim signalom in jo delimo s spektralno močnostno gostoto vhodnega signala (šuma)
 - Tako dobljen rezultat je impulzni odziv procesa, ki ga lahko s Fourierovo transformacijo pretvorimo v frekvenčni odziv.

ID_Korelacijska_analiza_Primer1.m





KONVERGENCA KORELACIJSKIH FUNKCIJ

- Križnokorelacijska funkcija dveh časovno zveznih naključnih signalov $u(t)$ in $y(t)$ je definirana kot sledi:
- $$\phi_{uy}(\tau) = E\{u(t)y(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)y(t + \tau)dt$$
- $$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t - \tau)y(t)dt$$
- V praksi seveda ne moremo opazovati signalov do neskončnosti, ker imamo na razpolago le končni čas opazovanja T
- Najprej si bomo ogledali vpliv končnega časa opazovanja T na določitev korelacijskih funkcij



- Predpostavimo:

- da sta podana signala $u(t)$ in $y(t)$ v časovnem intervalu

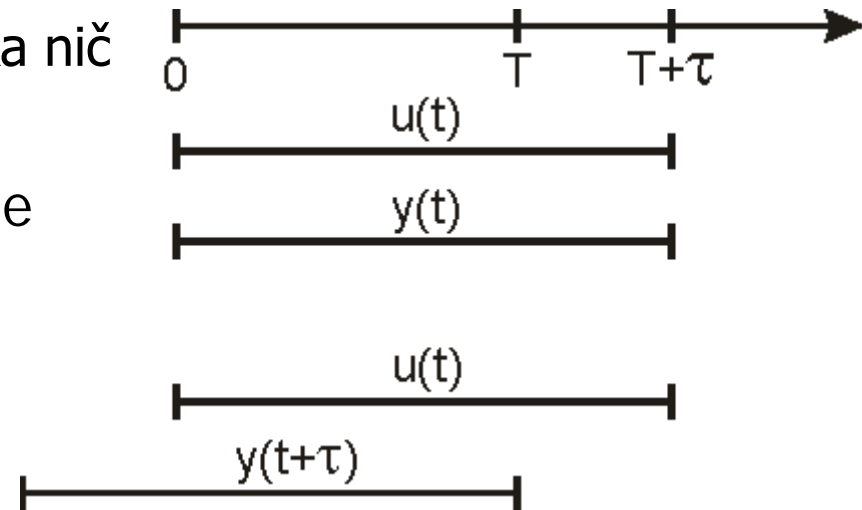
$$0 \leq t \leq T + \tau$$

- da je njuna srednja vrednost enaka nič

$$E\{u(t)\} = 0 \quad \text{in} \quad E\{y(t)\} = 0$$

- Ocena križnokorelacijske funkcije je

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{uy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t)y(t + \tau)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t - \tau)y(t)dt \end{aligned}$$



- Matematično upanje te ocene je

$$E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} = \frac{1}{T} \int_0^T E\{u(t)y(t + \tau)\}dt = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{uy}(\tau)dt = \phi_{uy}(\tau)$$

- Ocena je torej nepristranska že pri končnih časih opazovanja T



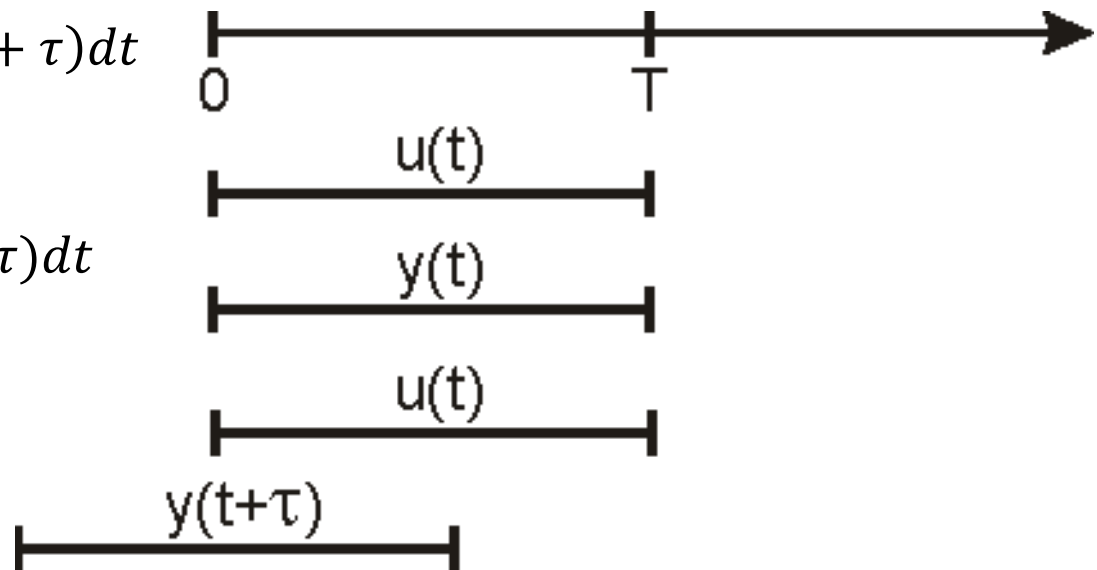
- Kaj pa, če srednja vrednost signalov $u(t)$ in $y(t)$ ni enaka nič in če sta definirana v časovnem intervalu $0 \leq t \leq T$?
- Če v tem primeru oba signala v področju, kjer nista definirana nadomestimo z nič, dobimo oceno križnokorelacijske funkcije

za $\tau \geq 0$

$$\hat{\Phi}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} u(t)y(t+\tau)dt$$

za $\tau \leq 0$

$$\hat{\Phi}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^T u(t)y(t+\tau)dt$$





- Matematično upanje ocene je

– za $\tau \geq 0$

$$E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} E\{u(t)y(t+\tau)\}dt = \frac{T-\tau}{T} \phi_{uy}(\tau)$$

– za $\tau \leq 0$

$$E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^T E\{u(t)y(t+\tau)\}dt = \frac{T+\tau}{T} \phi_{uy}(\tau)$$

- Obe zgornji enačbi lahko združimo v eno samo

- $$E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} = \left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right] \phi_{uy}(\tau)$$

- Metoda je v tem primeru pristranska
- Metoda je konsistentna, saj z naraščajočim časom opazovanja T pada in gre za $T \rightarrow \infty$ proti nič



- Če bi želeli nepristransko oceno, bi morali v enačbah (3.110) zamenjati imenovalec T z dejanskim časom integracije

- $$\hat{\phi}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} u(t)y(t+\tau)dt \quad \text{za} \quad \tau \geq 0$$

- $$\hat{\phi}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T+\tau} \int_{-\tau}^T u(t)y(t+\tau)dt \quad \text{za} \quad \tau \leq 0$$

- Matematično upanje te ocene je
- $E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} = \phi_{uy}(\tau)$
- Ocena je nepristranska
- Vendar:



- Dejansko sta gornji enačbi ekvivalentni prejšnjima za čas integracije $T - \tau$, kar pomeni, da je pri velikih premikih τ čas integracije zelo majhen.
- Kot bomo videli v nadaljevanju v tem primeru zelo naraste varianca napake ocene, zato zgornjih formul ne uporabljamo

Pristranskost_ocene_KK_F.m





- Varianca napake ocene korelacijskih funkcij:

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uy}(\tau) - \phi_{uy}] &= E\{[\hat{\phi}_{uy}(\tau) - \phi_{uy}]^2\} \\ &= E\{\hat{\phi}_{uy}^2 - 2\hat{\phi}_{uy}\phi_{uy} + \phi_{uy}^2\} = E\{\hat{\phi}_{uy}^2\} - \phi_{uy}^2 \end{aligned}$$

- Izpeljava enačb je precej zahtevna, podan bo le rezultat

$$\text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uy}(\tau)] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left[1 - \frac{|\xi|}{T}\right] [\phi_{uu}(\xi)\phi_{yy}(\xi) + \phi_{uy}(\xi + \tau)\phi_{yu}(\xi - \tau)] d\xi$$

- Če je vrednost integrala v tej enačbi končna, to je, če so korelacijske funkcije absolutno integrabilne, kar omogoča
 - ali $E\{u(t)\} = 0$
 - ali $E\{y(t)\} = 0$,

- potem velja $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uy}(\tau)] = 0$

- Ocena križnokorelacijske funkcije je v tem primeru konsistentna v srednjekvadratični vrednosti



$$\text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uy}(\tau)] = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left[1 - \frac{|\xi|}{T}\right] [\phi_{uu}(\xi)\phi_{yy}(\xi) + \phi_{uy}(\xi + \tau)\phi_{yu}(\xi - \tau)] d\xi$$

- Pod istim pogojem gre vrednost korelacijskih funkcij, pri velikih vrednostih argumenta proti nič
- Zato lahko za velike čase merjenja T zanemarimo člen $\frac{|\xi|}{T}$ v oglatem oklepaju izraza za varianco napake ocene
- Obravnavana varianca ocene križnokorelacijske funkcije je pogojena z naključno naravo obeh naključnih signalov in je v končnem času T ni možno povsem odpraviti, zato jo imenujemo *lastno (inherentno) statistično negotovost*.
- Varianca ocene križnokorelacijske funkcije je tem večja, čim večja je notranja tendenca vzdrževanja signalov $u(t)$ in $y(t)$, ki odseva v njunih avto in križnokorelacijskih funkcijah



- Poleg lastne negotovosti ocene korelacijskih funkcij pa nastopa tudi negotovosti zaradi naključnih motenj v signalih
- Predpostavimo sedaj, da sta tako signal $u(t)$ kakor tudi $y(t)$ motena s šumom

$$y(t) = y_0(t) + n(t)$$

- oziroma

$$u(t) = u_0(t) + n_u(t)$$

- Predpostavimo, da imata aditivni motnji srednjo vrednost nič

$$E\{n(t)\} = 0$$

- oziroma

$$E\{n_u(t)\} = 0$$



- in da sta statistično neodvisni od koristnih signalov

$$E\{u(t)n_u(t)\} = E\{u(t)n(t)\} = E\{y(t)n_u(t)\} = E\{y(t)n(t)\} = 0.$$

- V tem primeru je ocena križnokorelacijske funkcije

$$\hat{\phi}_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [u_0(t) + n_u(t)][y_0(t + \tau) + n(t + \tau)] dt$$

- njeno matematično upanje pa je

$$\begin{aligned} E\{\hat{\phi}_{uy}(\tau)\} &= \frac{1}{T} \int_0^T [E\{u_0(t)y_0(t + \tau)\} + E\{n_u(t)n(t + \tau)\}] dt \\ &= \phi_{u_0y_0}(\tau) + \phi_{n_un}(\tau) \end{aligned}$$

- Ocena je torej nepristranska le, če je $\phi_{n_un} = 0$, to je če sta motnji n_u in n nekorelirani in če je srednja vrednost ene izmed njiju enaka 0



- Varianca ocene križnokorelacijske motnje za primer, ko sta motena tako izhodni kakor tudi vhodni signal je

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uy}(\tau)] = & \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left[1 - \frac{|\xi|}{T} \right] [\phi_{u_0u_0}(\xi)\phi_{y_0y_0}(\xi) + \phi_{u_0u_0}(\xi)\phi_{nn}(\xi) + \\ & + \phi_{y_0y_0}(\xi)\phi_{n_u n_u}(\xi) + \phi_{n_u n_u}(\xi)\phi_{nn}(\xi) + \\ & + \phi_{u_0y_0}(\xi + \tau)\phi_{y_0u_0}(\xi - \tau) + \phi_{u_0y_0}(\xi + \tau)\phi_{nn_u}(\xi - \tau) + \\ & + \phi_{n_u n}(\xi + \tau)\phi_{y_0u_0}(\xi - \tau) + \phi_{n_u n}(\xi + \tau)\phi_{nn_u}(\xi - \tau)] d\xi \end{aligned}$$

- Če sta tako avtokorelacijski funkciji obeh šumov, kakor tudi njuna križnokorelacijska funkcija integrabilni, gre varianca ocene križnokorelacijske funkcije z naraščajočim T proti nič.
- V tem primeru (in če sta obe motnji nekorelirani) je ocena konsistentna v srednjekvadratični vrednosti



- Če bi namesto izrazov za računanje korelacijskih funkcij, ki dajejo pristransko, a konsistentno oceno (deljenje s $T-\tau$ namesto s T), uporabili izraza za nepristransko oceno, bi v enačbi na prejšnji strani namesto izraza $\frac{1}{T}$ dobili $\frac{1}{T-\tau}$.
- Varianca pogreška ocene korelacijske funkcije bi bila torej večja in bi za $\tau \rightarrow T$ šla celo proti neskončnosti. Zato računamo ocene korelacijskih funkcij raje s pomočjo izrazov ker delimo s T , čeprav dajeta pristransko oceno.

Pristranskost_ocene_KK_F_sumni_sig.m





- Matematične izraze za izračun ocene avtokorelacijske funkcije, njene pristranskosti ter konsistence dobimo iz izrazov za križnokorelacijske funkcije z upoštevanjem $y(t) = u(t)$
- Ocena avtokorelacijske funkcije je
- $$\hat{\phi}_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t + \tau)dt$$
- Ocena je nepristranska le, če signal $u(t)$ ni moten s šumom, kar vidimo iz enačbe
- $$E\{\hat{\phi}_{uu}(\tau)\} = \frac{1}{T} \int_0^T [E\{u_0(t)u_0(t + \tau)\} + E\{n_u(t)n_u(t + \tau)\}] = \phi_{u_0u_0}(\tau) + \phi_{n_un_u}(\tau)$$



- Varianca napake ocene je

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta\hat{\phi}_{uu}(\tau)] = & \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left[1 - \frac{|\xi|}{T} \right] [\phi_{u_0u_0}^2(\xi) + 2\phi_{u_0u_0}(\xi)\phi_{n_un_u}(\xi) + \phi_{n_un_u}^2(\xi) + \\ & + \phi_{u_0u_0}(\xi + \tau)\phi_{u_0u_0}(\xi - \tau) + \phi_{u_0u_0}(\xi + \tau)\phi_{n_un_u}(\xi - \tau) + \\ & + \phi_{n_un_u}(\xi + \tau)\phi_{u_0u_0}(\xi - \tau) + \phi_{n_un_u}(\xi + \tau)\phi_{n_un_u}(\xi - \tau)] d\xi \end{aligned}$$

- Ocena gre z naraščajočim T proti nič, če je avtokorelacijska funkcija $\phi_{uu}(\tau)$ integrabilna
- Pod tem pogojem je ocena avtokorelacijske funkcije konsistentna v srednjekvadratični vrednosti



KONSISTENCA OCENE UTEŽNE FUNKCIJE

- Ponovimo: metoda korelacijske analize, vhodni signal beli (zelo širokopasovni) šum s spektralno močnostno gostoto Φ_{u0}
- Rezultat je impulzni odziv

$$g(\tau) = \frac{1}{\Phi_{u0}} \phi_{uy}(\tau)$$

Pri uporabi standardnih formul za izračun križnokorelacijske funkcije je metoda pristranska, a konsistentna

- Varianca napake izračunane ocene utežne funkcije pri motnji (beli šum z varianco σ_n^2)

$$\sigma_g^2(\tau) = \text{var}[\Delta g(\tau)] = \frac{1}{T} \left[\int_0^\infty g^2(t) dt + \frac{\sigma_n^2}{\Phi_{u0}} \right]$$

- Metoda je konsistentna v srednjekvadratični vrednosti, če je impulzni odziv sistema integrabilen



ID_Korelacijska_analiza_Primer2.m



ID_Korelacijska_analiza_Primer3.m



ID_Korelacijska_analiza_Primer4.m



ID_Korelacijska_analiza_Primer5.m





KORELACIJSKA ANALIZA S ČASOVNO DISKRETNIMI SIGNALI

- Za razliko od časovno zveznih sistemov lahko pri časovno diskretnih sistemih zelo enostavno izvedemo dekonvolucijo
- Znana konvolucijska enačba, ki povezuje vhodni signal, impulzni odziv in izhodni signal se v časovno diskretnem prostoru glasi
- $$\phi_{uy}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\phi_{uu}(\tau - k)$$
- Z metodo dekonvolucije izračunamo utežno funkcijo $g(k)$ iz znane avtokorelacijske funkcije vhodnega signala $\phi_{uu}(\tau)$ in znane križnokorelacijske funkcije med vhomom in izhodom $\phi_{uy}(\tau)$
- Pri tem se moramo seveda zadovoljiti s končnim številom vrednosti utežne funkcije, zato je metoda teoretično primerna le za procese s končnim impulznim odzivom



- V praksi pa seveda lahko stabilne procese smatramo kot procese s končnim impulznim odzivom, saj lahko zanemarimo tiste vrednosti impulznega odziva, ki so zelo majhni (za velike k)
- Tako lahko napišemo konvolucijsko enačbo za toliko različnih τ , kolikor je neznanih vrednosti impulznega odziva in rešimo sistem enačb
- Seveda pa lahko vzamemo tudi več enačb in rešimo sistem enačb z metodo najmanjših kvadratov
- Če imamo znane korelacijske funkcije v intervalu $-N_1 \leq \tau \leq N_2$ in aproksimiramo impulzni odziv z $m + 1$ vrednostmi, lahko napišemo sistem enačb



$$\phi_{uy}(-N_1 + m) = \phi_{uu}(-N_1 + m)g(0) + \phi_{uu}(-N_1 + m - 1)g(1) + \dots + \phi_{uu}(-N_1)g(m)$$

$$\vdots$$

$$\phi_{uy}(-1) = \phi_{uu}(-1)g(0) + \phi_{uu}(-2)g(1) + \dots + \phi_{uu}(-1 - m)g(m)$$

$$\phi_{uy}(0) = \phi_{uu}(0)g(0) + \phi_{uu}(-1)g(1) + \dots + \phi_{uu}(-m)g(m)$$

$$\phi_{uy}(1) = \phi_{uu}(1)g(0) + \phi_{uu}(0)g(1) + \dots + \phi_{uu}(-m + 1)g(m)$$

$$\vdots$$

$$\phi_{uy}(N_2) = \phi_{uu}(N_2)g(0) + \phi_{uu}(N_2 - 1)g(1) \dots + \phi_{uu}(N_2 - m)g(m)$$

- oziroma v vektorsko matrični obliki
- $\Phi_{uy} = \Phi_{uu}g$



- kjer pomenijo

$$\Phi_{uy} = \begin{bmatrix} \phi_{uy}(-N_1 + m) \\ \vdots \\ \phi_{uy}(-1) \\ \phi_{uy}(0) \\ \phi_{uy}(1) \\ \vdots \\ \phi_{uy}(N_2) \end{bmatrix} \quad \Phi_{uy} = \Phi_{uu}g$$

$$g = \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{uu} = \begin{bmatrix} \phi_{uu}(-N_1 + m), \phi_{uu}(-N_1 + m - 1), \dots, \phi_{uu}(-N_1) \\ \vdots \\ \phi_{uu}(-1), \phi_{uu}(-2), \dots, \phi_{uu}(-1 - m) \\ \phi_{uu}(0), \phi_{uu}(-1), \dots, \phi_{uu}(-m) \\ \phi_{uu}(1), \phi_{uu}(0), \dots, \phi_{uu}(1 - m) \\ \phi_{uu}(N_2), \phi_{uu}(N_2 - 1), \dots, \phi_{uu}(N_2 - m) \end{bmatrix}$$



- Če izberemo

$$N_1 - m + N_2 + 1 = m + 1$$

- kar je ekvivalentno

$$N_1 + N_2 = 2m$$

- imamo toliko enačb kot je neznank in lahko izračunamo impulzni odziv z inverzijo matrike Φ_{uu}

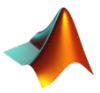
$$g = \Phi_{uu}^{-1} \Phi_{uy}$$

- Če pa izberemo več enačb kot je neznank

$$(N_1 + N_2 > 2m)$$

- dobimo impulzni odziv po metodi najmanjših kvadratov

$$g = [\Phi_{uu}^T \Phi_{uu}]^{-1} \Phi_{uu}^T \Phi_{uy}$$



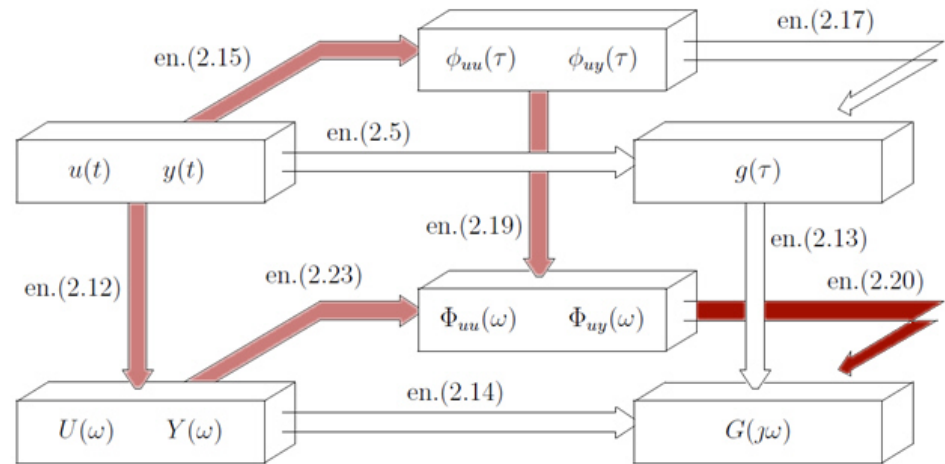


- Če uporabimo beli šum kot vhodni signal, je postopek enak kot pri zveznih sistemih
- Ker je avtokorelacija belega šuma s spektralno močnostno gostoto Φ_{u0}
- $$\phi_{uu}(\tau) = \Phi_{u0}\delta(\tau)$$
- Preide konvolucijska enačba v
- $$g(\tau) = \frac{1}{\Phi_{u0}}\phi_{uy}(\tau)$$
- Identifikacijski postopek je tako zelo enostaven:
 - Beli šum uporabimo kot vhodni signal v proces, izračunamo križnokorelacijsko funkcijo med vhodnim in izhodnim signalom in jo delimo s spektralno močnostno gostoto vhodnega signala (šuma)
 - Tako dobljen rezultat je impulzni odziv procesa, ki ga lahko s Fourierovo transformacijo pretvorimo v frekvenčni odziv



SPEKTRALNA ANALIZA

- Zadnja možnost za izračun frekvenčnega odziva je deljenje spektralnih močnostnih gostot glede na en. (2.20)
- Spektralni močnostni gostoti lahko dobimo s Fourierovo transformacijo avtokorelacijske funkcije vhodnega signala in križnokorelacijske funkcije med vhodnim in izhodnim signalom (en. 2.19) oz. iz Fourierovih transformacijah obeh signalov (en. 2.24).



ID_Spektralna_analiza_Primer_1





- Vendar pa vemo, da daje Fourierova analiza v prisotnosti šuma zelo slabe rezultate
- Prav tako je varianca ocene korelacijskih funkcij pri velikih premikih τ velika, pri Fourierovi transformaciji korelacijskih funkcij (katere rezultat sta spektralni močnostni gostoti) pa so upoštevane vse vrednosti z enako utežjo
- Rešitev obeh problemov sta glajenje (filtriranje) spektralnih močnostnih gostot obeh signalov, oziroma različno uteževanje korelacijskih funkcij (glede na premik τ)
- V nadaljevanju bomo obravnavali obe metodi in pokazal bom, da sta pravzaprav identični, zato ju imenujemo s skupnim imenom spektralna analiza.



- V primeru uteževanja korelacijskih funkcij izračunamo spektralno močnostno gostoto signalov in utežnih korelacijskih funkcij
- Modificirani enačbi (2.19) se v tem primeru glasita

$$\Phi_{uy}^W(\omega) = F[\phi_{uy}(\tau)w(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uy}(\tau)w(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\Phi_{uu}^W(\omega) = F[\phi_{uu}(\tau)w(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(\tau)w(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- kjer je $w(\tau)$ utežna funkcija, ki jo imenujemo tudi *časovno okno* (tudi drseče okno)
- Okno mora imeti vrednost 1 pri $\tau=0$, mora padati z naraščajočim premikom τ in mora biti 0 za velike τ .



- V literaturi je podanih veliko različnih oken, , vendar so najbolj znana:

- *Pravokotno*

- $$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq T_M \\ 0 & |\tau| > T_M \end{cases}$$

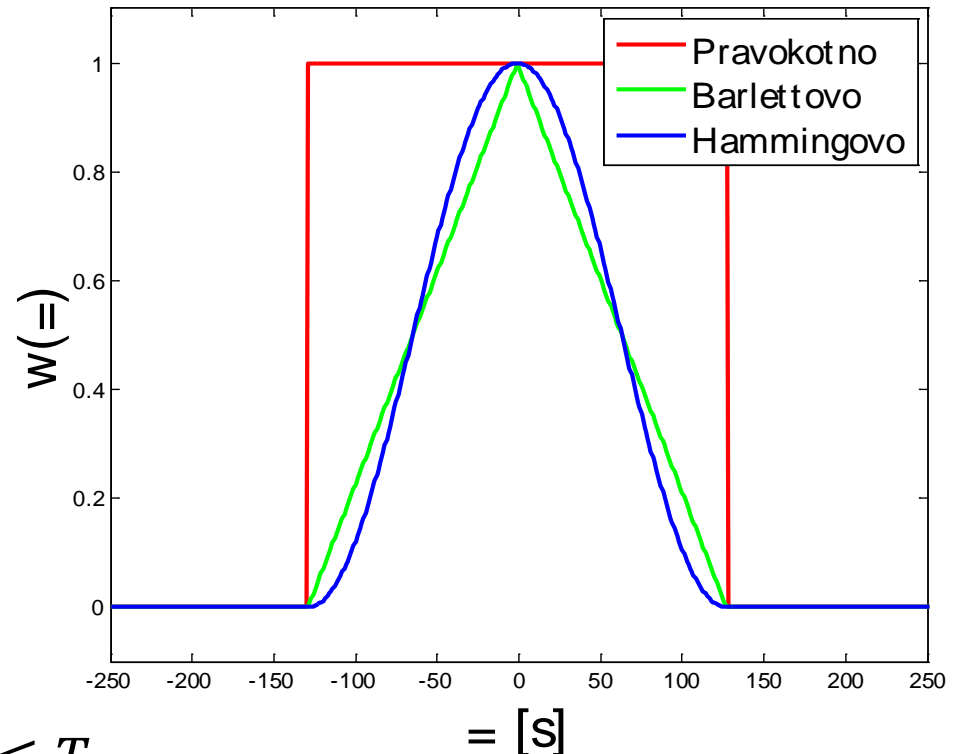
- *Barlettovo*

- $$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{T_M} & |\tau| \leq T_M \\ 0 & |\tau| > T_M \end{cases}$$

- *Hanningovo*

- $$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \tau}{T_M} \right) \right] & |\tau| \leq T_M \\ 0 & |\tau| > T_M \end{cases}$$

Časovno okno





- Enačbi za izračun Fourierove transformacije uteženih korelacijskih funkcij predstavljata Fourierovo transformacijo produkta korelacijske funkcije ϕ in okna $w(\tau)$
- Fourierov par produkta v časovnem prostoru pa je konvolucija v frekvenčnem prostoru, zato lahko zapišemo
- $$\Phi_{uy}^W(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uy}(\omega)W(\omega_0 - \omega)d\omega$$
- $$= \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega - \omega_0)\Phi_{uy}(\omega)d\omega$$
- in
- $$\Phi_{uu}^W(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{uu}(\omega)W(\omega_0 - \omega)d\omega$$
- $$= \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega - \omega_0)\Phi_{uu}(\omega)d\omega$$
- kjer je $W(\omega)$ Fourierov transform okna $w(\tau)$. $W(\omega)$ imenujemo *frekvenčno okno* in je simetrična funkcija frekvence ω



- Najbolj znana frekvenčna okna dobimo s Fourierovo transformacijo časovnih oken

- *Pravokotno*

- $$W_1(\omega) = 2T_M \frac{\sin(\omega T_M)}{\omega T_M}$$

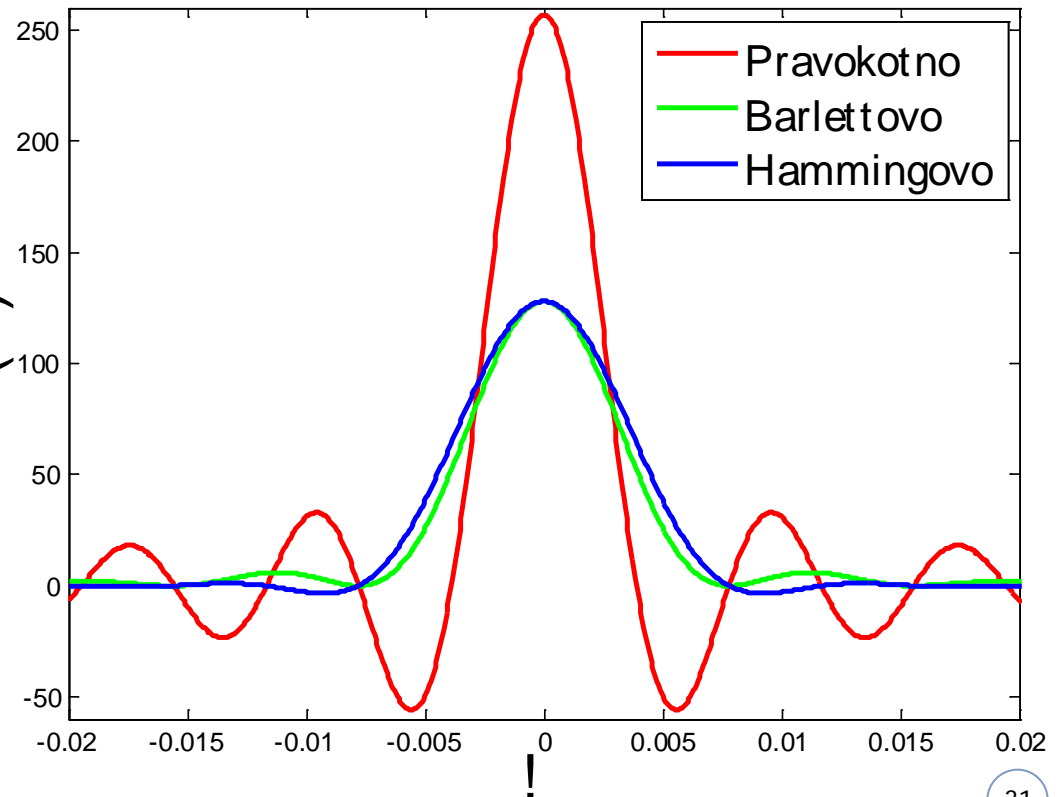
- *Barlettovo*

- $$W_2(\omega) = T_M \left(\frac{\sin \frac{\omega T_M}{2}}{\frac{\omega T_M}{2}} \right)^2$$

- *Hanningovo*

- $$W_3 = \frac{\pi \sin(\omega T_M)}{\omega(\pi^2 - \omega^2 T_M)}$$

Frekvenčno okno





- Konvolucijski enačbi (2 prosojnici nazaj) predstavljata pravzaprav izračun moči v frekvenčnem oknu
- Če premikamo frekvenčno okno po vsem frekvenčnem območju, dobimo zglajeno spektralno močnostno gostoto
- Odtod izvira tudi ime metode
- Originalna metoda spektralne močnostne gostote je bila prav filtriranje signalov s pasovnimi filtri in ovrednotenje moči v prepustnem območju filtra
- Vendar danes tega postopka ne uporabljamo več predvsem zaradi težav pri realizaciji ozkopasovnih filtrov

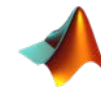


- Če je časovno okno široko, potem je frekvenčno okno ozko in spektralni močnostni gostoti sta le malo glajeni
- Velja tudi obratno: ozko časovno okno izfiltrira velik del korelacijskih funkcij oziroma ustrezno široko frekvenčno okno zelo zgladi spektralni močnostni gostoti
- Poudariti pa je potrebno, da vnaša glajenje spektralnih močnostnih gostot pristranskost in sicer v tistem delu, kjer le-ti nista konstantni



- Zato je izbira širine okna izredno pomembna in jo moramo izbrati v skladu z naslednjim napotkom:
 - Širina časovnega okna T_M mora biti majhna v primerjavi s časom opazovanja T , ker s tem zgladimo naključne motnje v spektralnih gostotah.
 - Širina časovnega okna T_M mora biti dovolj velika, da ohrani bistveno informacijo korelacijskih funkcij, torej $\phi(\tau) \ll \phi(0)$ za $\tau \geq T_M$.
- Uporaba oken je nujna za dosego sprejemljive natančnosti. Po drugi strani pa lahko s tem zabrišemo ostre konice v spektralnih močnostnih gostotah oziroma zmanjšamo frekvenčno resolucijo.

ID_Spektralna_analiza_Primer_2





IDENTIFIKABILNOST PROCESOV V ZAPRTI ZANKI

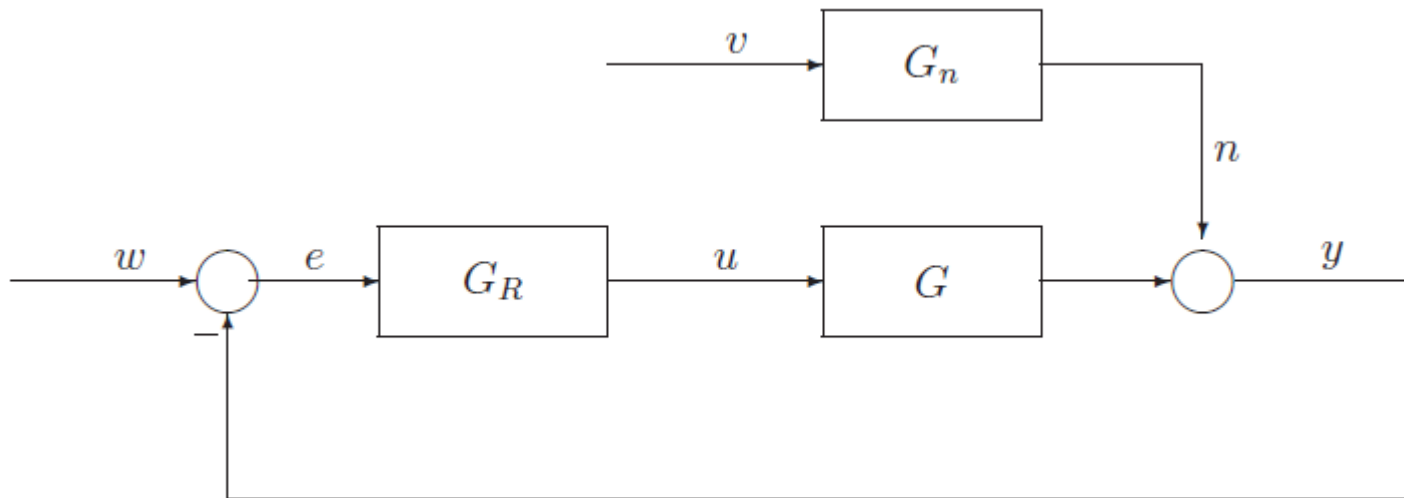
- Osnovno vprašanje, ki ga bomo obravnavali v tem poglavju je, ali je proces sploh možno identificirati, to se pravi, ali je možno določiti njegovo strukturo in vrednost parametrov
- To vprašanje je še posebej upravičeno, če obratuje proces v zaprti zanki, kajti takrat izhod procesa vpliva na njegov vhod
- Večina identifikacijskih metod zahteva nekoreliranost motnje in vhoda procesa, povratna zanka pa pripelje na vhod procesa prav njegov izhod in s tem tudi motnjo
- Po drugi strani pa se velikokrat povratni zanki ni možno izogniti, včasih (predvsem pri netehničnih aplikacijah) pa je povratna zanka inherentni del sistema, ki ga identificiramo



- Pri nestabilnih oziroma slabo dušenih procesih ni možno izvajati meritev v odprti zanki, saj bi bila ogrožena varnost delovanja, oziroma ogrožena kvaliteta proizvodnje
- Zaprtozančno delovanje je tudi nujno pri adaptivnih sistemih, ki sproti identificirajo spremembe parametrov procesa in temu ustrezno prilagajajo regulacijsko delovanje
- V tem poglavju bomo najprej obravnavali identifikabilnost **neparametričnih**, nato pa še **parametričnih** modelov
- Videli bomo, da v zahtevah glede identifikabilnosti med obema vrstama modelov pravzaprav ni nobene razlike
- Pri neparametričnih modelih bomo obravnavali zvezne, pri parametričnih pa diskretne modele
- Vzrok temu je nazornost predstavitve, ne pa razlika v rezultatu, to je v identifikabilnosti



Identifikabilnost neparametričnih modelov



- Struktura povratnozančnega sistema: dve vrsti vzbujanj in sicer referenčni signal w in motnja v



- Vhodni in izhodni signal lahko izrazimo v naslednji obliki

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{1+G_R(s)G(s)} [G_R(s)G(s)w + G_n(s)v] \\ &= \frac{1}{1+G_R(s)G(s)} [G(s)w' + \frac{1}{G_R(s)}v']\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{1+G_R(s)G(s)} [G_R(s)w - G_n(s)G_R(s)v] \\ &= \frac{1}{1+G_R(s)G(s)} [w' - v']\end{aligned}$$

- kjer pomenita

$$w' = G_R(s)w$$

$$v' = G_R(s)G_n(s)v$$



- Ker je v stohastični signal, moramo preiti na analizo s spektralnimi močnostnimi gostotami (referenčni signal w (in s tem w') ni koreliran z motnjo v (in s tem z v')):

$$\Phi_{uu}(\omega) = \left| \frac{1}{1+G_R(j\omega)G(j\omega)} \right|^2 [\Phi_{w'w'}(\omega) + \Phi_{v'v'}(\omega)]$$

$$\Phi_{uy}(\omega) = \left| \frac{1}{1+G_R(j\omega)G(j\omega)} \right|^2 \left[G(j\omega)\Phi_{w'w'}(\omega) - \frac{1}{G_R(j\omega)}\Phi_{v'v'}(\omega) \right]$$

- Oceno frekvenčnega odziva dobimo tako, da križno spektralno močnostno gostoto $\Phi_{uy}(\omega)$ delimo s spektralno močnostno gostoto vhodnega signala $\Phi_{uu}(\omega)$ ter dobimo

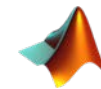
$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\Phi_{uy}(\omega)}{\Phi_{uu}(\omega)} = \frac{G(j\omega)\Phi_{w'w'}(\omega) - \frac{1}{G_R(j\omega)}\Phi_{v'v'}(\omega)}{\Phi_{w'w'}(\omega) + \Phi_{v'v'}(\omega)}$$



ponovno:
$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\Phi_{uy}(\omega)}{\Phi_{uu}(\omega)} = \frac{G(j\omega)\Phi_{w'w'}(\omega) - \frac{1}{G_R(j\omega)}\Phi_{v'v'}(\omega)}{\Phi_{w'w'}(\omega) + \Phi_{w'v'}(\omega)}$$

- V primeru, ko ni vzbujanja ($\Phi_{w'w'}(\omega) = 0$) je rezultat ocene enak $1/G_R(j\omega)$, to je inverznemu frekvenčnemu odzivu regulatorja
- Nepristransko oceno dobimo le, če je prisotno vzbujanje s pomočjo referenčnega signala ($\Phi_{w'w'}(\omega) > 0$) in če ni motenj ($\Phi_{v'v'}(\omega) = 0$)

Identifikabilnost_zaprte_zanke_Neparametricni





Identifikabilnost parametričnih modelov

- Tudi parametričnih modelov ni možno enoveljavno določiti v celoti (njihovo strukturo in parametre), če ni vzbujanja
- To trditev dokažemo z enostavnim primerom:
- Proces

$$y = G(z)u + G_n(z)v = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} u + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v$$

- vključimo v povratno zanko z regulatorjem

$$u = G_R e = G_R (w - y) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} (w - y)$$



- Predpostavimo, da ni vzbujanja preko re ferenčnega signala ($w = 0$), zato lahko zapišemo

$$y = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} \left(-\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} y \right) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} v$$

- oziroma

$$\left[A(z^{-1}) + B(z^{-1}) z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y = D(z^{-1}) v$$

- Tej enačbi prištejemo in odštejemo poljuben polinom $S(z^{-1}) z^{-d}$ in dobimo

$$\left[A(z^{-1}) + S(z^{-1}) z^{-d} + B(z^{-1}) z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} - S(z^{-1}) z^{-d} \right] y = D(z^{-1}) v$$

- oziroma



- $$\left[A(z^{-1}) + S(z^{-1})z^{-d} + \left(B(z^{-1}) - \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} S(z^{-1}) \right) z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y = D(z^{-1})v$$

- ter

$$\begin{aligned} & \{ Q(z^{-1})[A(z^{-1}) + S(z^{-1})z^{-d}] + [Q(z^{-1})B(z^{-1}) - P(z^{-1})S(z^{-1})]z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \} y \\ & = Q(z^{-1})D(z^{-1})v \end{aligned}$$

- Če označimo

$$A^*(z^{-1}) = Q(z^{-1})[A(z^{-1}) + S(z^{-1})z^{-d}]$$

$$B^*(z^{-1}) = Q(z^{-1})B(z^{-1}) - P(z^{-1})S(z^{-1})$$

$$D^*(z^{-1}) = Q(z^{-1})D(z^{-1}) \quad (6.13)$$

- lahko zgornjo enačbo zapišemo tudi v naslednji obliki

$$\left[A^*(z^{-1}) + B^*(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y = D^*(z^{-1})v$$



- Primerjajmo:

$$\left[A(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y = D(z^{-1})v$$

$$\left[A^*(z^{-1}) + B^*(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y = D^*(z^{-1})v$$

- Vidimo, da ima v primeru, ko ni vzbujanja ($w = 0$) zaprtozančni sistem s procesom $\frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}z^{-d}$ in šumnim filtrom $\frac{D^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$ enak odziv na šum v kot zaprtozančni sistem s procesom $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}z^{-d}$ in šumnim filtrom $\frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}$



- Razširjeni proces je višjega reda kakor originalni proces, vendar ta višji red ni posledica skupnih korenov števca in imenovalca, ki bi se skrajšali!
- Zato ni možno enoveljavno določiti strukture (reda) prenosne funkcije procesa
- Razširjena prenosna funkcija ima najnižji možni red tedaj, ko je polinom $S(z^{-1})$ enak nič, ko je torej razširjena prenosna funkcija enaka originalni
- Zato je v primeru, ko ni vzbujanja preko reference, poznavanje reda prenosne funkcije procesa potreben pogoj za njegovo identifikacijo



- Poglejmo sedaj, pod kakšnimi pogoji je možno oceniti parametre procesa, če ni vzbujanja preko reference
- V tem primeru je edini signal, ki vzbuja proces šum v , za katerega smo predpostavili, da je bel
- Zato predstavlja povratnozančna shema ekvivalent nekega novega šumnega filtra.

- $$G'_n(z^{-1}) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{G_n(z)}{1+G_R(z)G(z)}$$

- ki ga lahko ob upoštevanju neznanih prenosnih funkcij procesa

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}} z^{-d}$$



- in šumnega filtra

- $$G_n(z) = \frac{1+d_1z^{-1}+\dots+d_{n_d}z^{-n_d}}{1+a_1z^{-1}+\dots+a_{n_a}z^{-n_a}}$$

- ter znane prenosne funkcije regulatorja

- $$G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+\dots+q_\nu z^{-\nu}}{1+p_1z^{-1}+\dots+p_\mu z^{-\mu}}$$

- zapišemo tudi v naslednji obliki

$$\begin{aligned} G'_n &= \frac{G_n(z)}{1+G_R(z)G(z)} = \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1})+B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})} \\ &= \frac{1+\delta_1z^{-1}+\dots+\delta_rz^{-r}}{1+\alpha_1z^{-1}+\dots+\alpha_\ell z^{-\ell}} = \frac{\mathcal{D}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} \end{aligned}$$

- Pozor: v gornjih enačbah so redi števcov in imenovalcev vseh prenosnih funkcij (tudi prenosne funkcije neznanega procesa) različni



- Za identifikacijo šumnega filtra $G'_n(z)$ lahko uporabimo metodo razširjenih najmanjših kvadratov, kjer ocenjujemo le šumni filter, ne pa tudi samega procesa G') (predpostavimo, da so vsi koeficienti števnice prenosne funkcije enaki 0 in ustrezno zmanjšamo vektor ψ oziroma matriko Ψ (ki v tem primeru ne vsebujeta vhodnih signalov u))
- Rezultat ocenjevanja parametrov je šumni filter $G'_n(z)$, to so koeficienti $\alpha_1 \dots \alpha_\ell$ in $\delta_1 \dots \delta_r$. Ker je prenosna funkcija regulatorja (koeficienti $q_0 \dots q_\nu$ ter $p_1 \dots p_\mu$ znana, lahko s primerjavo koeficientov števnice in imenovalcev v zgornjem izrazu

$$D(z^{-1})P(z^{-1}) = \mathcal{D}(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1}) = \mathcal{A}(z^{-1})$$



- določimo neznan prenosno funkcijo $G(z)$ (koeficiente $b_1, \dots, b_{n_b}, a_1, \dots, a_{n_a}$ ter d_1, \dots, d_{n_d})
- Neznane koeficiente pa je možno določiti le, če je enačb za določitev vsaj toliko, kot je neznank
- Enačb je toliko, kolikor je red zgornjih polinomov, neznank pa je toliko, kolikor je neznanih koeficientov
- Očitno z računanjem koeficientov polinoma $D(z^{-1})$ iz $\mathcal{D}(z^{-1})$ ni problemov, saj je število enačb ($r = n_d + \mu$) vedno večje od števila neznank (n_d)

$$D(z^{-1})P(z^{-1}) = \mathcal{D}(z^{-1})$$

- Temu pa ni tako pri računanju koeficientov a_i in b_i iz polinoma $\mathcal{A}(z^{-1})$

$$A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1}) = \mathcal{A}(z^{-1})$$



- V tem primeru je enačb toliko, kolikor je red polinoma $A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})$, to je $\max\{n_a + \mu, n_b + d + \mu\}$, neznank pa je $n_a + n_b$
- Parametre a_i in b_i je možno enoveljavno oceniti le, če velja $\max\{n_a + \mu, n_b + d + \nu\} \geq n_a + n_b$
- oziroma
$$\max\{\mu - n_b, \nu + d - n_a\} \geq 0$$
- To je pogoj identifikabilnosti parametrov pri znanem redu neznanne prenosne funkcije procesa v zaprti zanki brez vzbujanja referenčnega signala
- Ta metoda ocenjevanja parametrov je pravzaprav indirektna metoda



- Najprej ocenimo parametre zaprtozančnega procesa pravzaprav nekega novega šumnega filtra $G'_n(z)$ in nato izračunamo neznane parametre prenosne funkcije procesa

Direktna metoda:

- Oglejmo si sedaj še primer, ko direktno ocenjujemo parametre prenosne funkcije procesa s pomočjo meritev vhoda procesa u in njegovega izhoda y
- Zopet naj bo edino vzbujanje zaprtozančnega sistema šum v
- Zato lahko izrazimo regulirni signal v naslednji obliki

$$\begin{aligned}u(k) &= q_0 e(k) + \dots + q_v e(k - v) - p_1 u(k - 1) - \dots - p_\mu u(k - \mu) \\ &= -q_0 y(k) - \dots - q_v y(k - v) - p_1 u(k - 1) - \dots - p_\mu u(k - \mu)\end{aligned}$$



- Vektor

$$\psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), \\ u(k-d-1), \dots, u(k-d-n_b), \\ e(k-1), \dots, e(k-n_d)]$$

- vsebuje vhodni signal $u(k-d-1)$, ki ga s pomočjo prejšnje enačbe izrazimo v naslednji obliki

$$u(k-d-1) = -q_0 y(k-d-1) - \dots - q_\nu y(k-d_\nu-1) - \\ - p_1 u(k-d-1) \dots - p_\mu u(k-d-\mu-1)$$

- Ta vektor ne sme biti linearno odvisen od ostalih komponent vektorja ψ saj bi v nasprotnem primeru matrika Ψ , ki je sestavljena iz vektorjev ψ imela rang manjši od $n_a + n_b + n_d$ in bi bila matrika $\Psi^T \Psi$ singularna, kar bi onemogočalo izračun ocene parametrov Θ



- Regulirni signal $u(k - d - 1)$ je linearno neodvisen od ostalih elementov vektorja ψ tedaj in le tedaj, če je red števca regularja ν tako velik, da vpliva na $u(k - d - 1)$ v prejšnji enačbi vsaj signal $y(k - n_a - 1)$, saj je najstarejši vhodni signal v vektorju ψ signal $y(k - n_a)$
- Veljati mora torej:
$$k - d - \nu - 1 \leq k - n_a - 1$$
- Druga možnost za linearno neodvisnost signala $u(k - d - 1)$ od ostalih komponent vektorja ψ pa je ta, da mora biti red imenovalca regulatorja μ tako velik, da vpliva na $u(k - d - 1)$ vsaj signal $u(k - d - n_b - 1)$, saj je najstarejši vhodni signal v vektorju ψ signal $u(k - d - n_b)$
- Veljati mora torej
$$k - d - \mu - 1 \leq k - d - n_b - 1$$



- Če povzamemo zgornji trditvi, mora veljati ali

$$v + d - n_a \geq 0$$

- ali

$$\mu - n_b \geq 0$$

- kar je ekvivalentno pogoju

$$\max\{\mu - n_b, v + d - n_a\} \geq 0$$

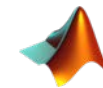
- ki je ekvivalenten pogoju, ki smo ga že izpeljali
- V primeru, ko je prisotno vzbujanje in je to vzbujanje dovolj frekvenčno bogato (vsebovati mora vsaj toliko frekvenc, kot je parametrov, ki jih ocenjujemo) ne more priti do linearne odvisnosti komponent vektorja ψ in s tem do singularnosti matrike $\Psi^T \Psi$



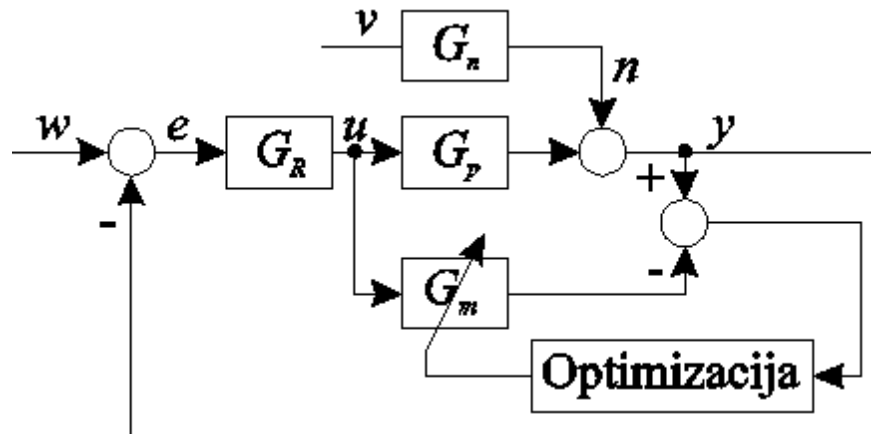
- Vendar pa pogoji za nepristransko oceno ostajajo, to je nekoreliranost vhodnega signala in motilnega šuma
- Ocena procesa v zaprti zanki je nepristranska če
- ali ni motilnega signala ($v = 0$)
- ali ni vzbujanja reference ($w = 0$) in je izpolnjen pogoj
$$\max\{\mu - n_b, v + d - n_a\} \geq 0$$
- Osnovni pogoj nepristranske ocene je konvergenca pogreška proti belemu šumu, ker ima ta najmanjšo varianco
- Če namreč filtriramo beli šum na šumnem filtru, je varianca izhoda enaka

$$\sigma_n^2 = \sigma_v^2 (h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + \dots)$$

kjer je h impulzni odziv filtra



- Isti pogoj velja tudi pri identifikaciji s prilagajanjem modela
 - Prilagajanje v odprti zanki



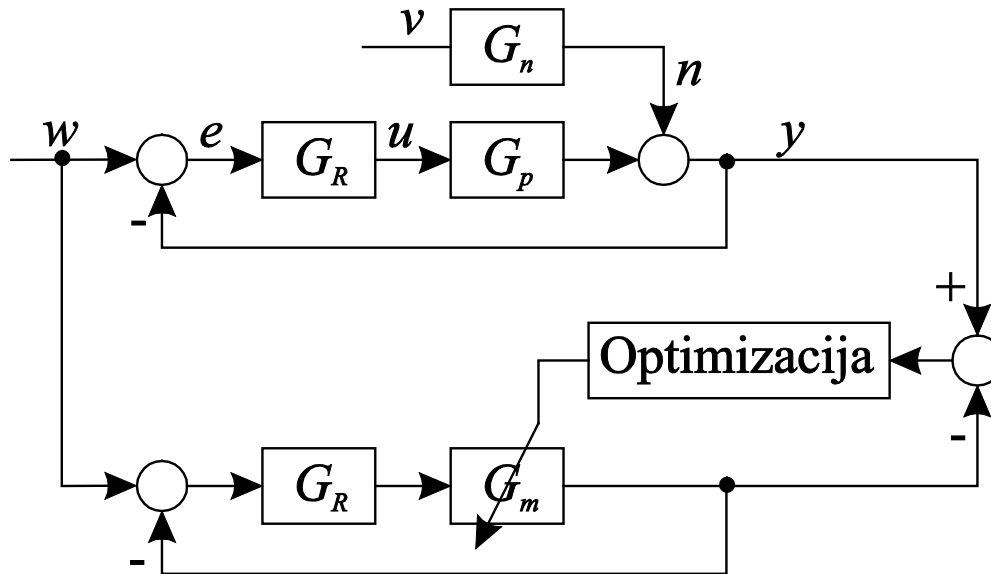
Identifikabilnost_zaprte_zanke_Prilagajanje_OL_CL



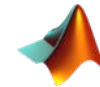
Referenca\suma	Brez suma	1/A	1
w=0	-	ne	da
w=prbs	da	ne	ne
w=randn	da	ne	ne



- Prilagajanje v zaprti zanki



Identifikabilnost_zaprte_zanke_Prilagajanje_OL_CL



Referenca\sum	Brez suma	1/A	1
W=0	-	ne	ne
W=prbs	da	ne	Ne (malo)
W=randn	da	Ne(a malo)	Ne (malo)