

---

# Mikroelektronski sistemi

## 1. Uvodna poglavja

D. Strle

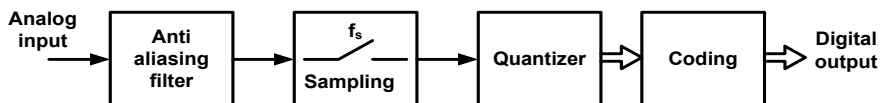
---

### Pregled uvodnih vsebin:

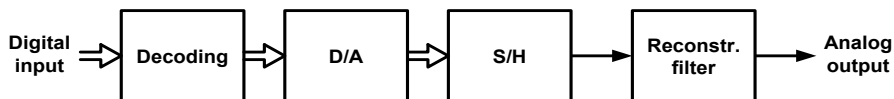
1. Idealni AD in DA pretvorniki
2. vzorčenje in z transformacija, aliasing in rekonstrukcija
3. Jitter
4. Kvantizacija in kvantizacijski šum,
5. Termični in  $kT/C$  šum,
6. Vzorčenje in šum
7. Diskretna Fourierjeva transformacija, oknjenje,
8. Kodirne sheme
9. Primeri in domače naloge

## Idealni AD in DA pretvorniki

### AD converter:



### DA converter:

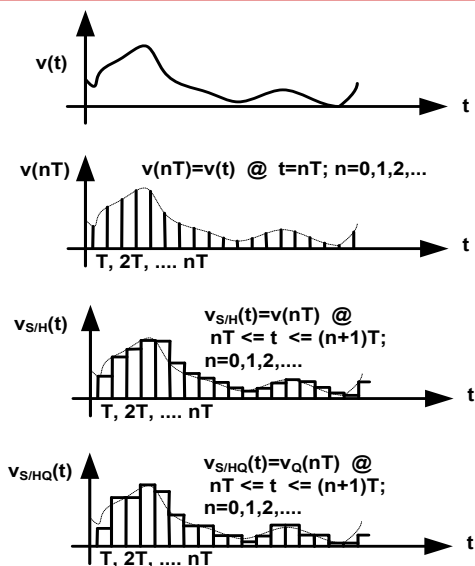


2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

3

## Vzorčenje



### • Časovno zvezni signali in sistemi: značilnosti

- Sistemi linearnih diferencialnih enačb
- Laplacova in Fourierjeva transformacija
- Sistem linearnih diferencialnih enačb

sistem linearnih algebraičnih enačb.

### • Časovno diskretni signali in sistemi: značilnosti

- Sistemi linearnih diferenčnih enačb
- Z transformacija:
- sistem diferenčnih enačb

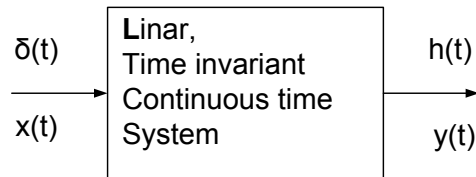
sistem algebraičnih enačb

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

4

## Linearni, časovno zvezni, časovno invariantni sistem



$$x(t) = 0 \quad \text{za } t < 0; \quad y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

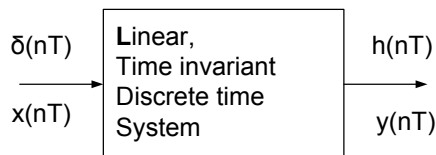
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

5

## Linearni, časovno diskretni - invariantni sistem



$$\delta(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$y(nT) = h(nT) = 0; \quad \text{za } n < 0$$

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) = \sum_{k=0}^{k=\infty} h(kT)x(nT-kT)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

6

## Laplacova transformacija:

---

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \qquad F(s)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \qquad sF(s) - f(0)$$

$$\int f(\tau) d\tau \qquad \frac{1}{s} F(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \qquad F_1(s) F_2(s)$$

$$f_1(t-a)u(t-a), a > 0 \qquad e^{-as} F(s)$$

$$t f(t) \qquad - \frac{dF(s)}{ds}$$

$$e^{at} f(t) \qquad F(s-a)$$

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \qquad k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

7

## Tabela nekaterih pomembnih Laplacovih transformacij:

---

$$f(t) \qquad F(s)$$

$$ku(t) \qquad \frac{k}{s}$$

$$\delta(t) \qquad 1$$

$$t^n \qquad \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$e^{at} \qquad \frac{1}{(s-a)}$$

$$e^{at} \cos(bt) \qquad \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$e^{at} \sin(bt) \qquad \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$$

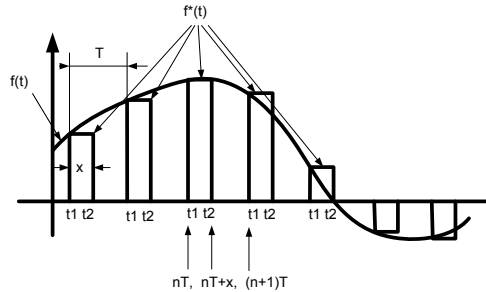
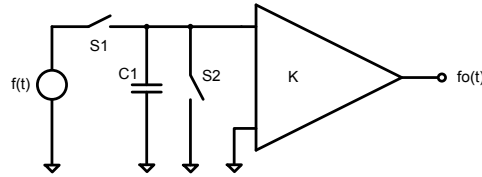
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

8

## Vzorčenje in z-transformacija:

$$f(t) = 0 \quad \text{za } t < 0$$



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

9

## Vzorčenje in z-transformacija:

$$f_o(t) = k \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(nt) = k \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) [u(t-nT) - u(t-nT-x)]$$

$$F_o(s) = k \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) \left[ \frac{1}{s} e^{-snT} - \frac{1}{s} e^{-s(nT+x)} \right]$$

$$F_o(s) = k \frac{1 - e^{-sx}}{s} \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-snT}$$

$$x \rightarrow 0; \quad kx \rightarrow 1; \quad e^p = (1 + p)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( k \frac{1 - e^{-sx}}{s} \right) \cong k \frac{1 - (1 - sx)}{s} = kx \rightarrow 1$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

10

## Vzorčenje in z-transformacija:

z-transformacija:

$$F_0(s) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-snT}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) \cdot z^{-n}; \quad z = e^{sT}$$

Enostranska z transformacija  
sekvenca vzorcev  $f(nT)$  je enaka kot  
2 stranska z-transformacija  
sekvenca  $f(nT)u(nT)$

Območje konvergence!

Inverzna z-transformacija:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint$$

## Vzorčenje in z-transformacija: S/H signal:

- Odstranimo  $S_2$  in dobimo  $f_{SH}$ ;  $x \rightarrow T$ ;  $k \rightarrow 1$

$$f_{sh}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) [u(t-nT) - u(t-nT-T)]$$

$$F_{sh}(s) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) \left[ \frac{1}{s} e^{-snT} - \frac{1}{s} e^{-s(nT+T)} \right]$$

$$F_{sh}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-snT}$$

$$F_{sh}(s) = H_{sh}(s) F(z)$$

## Vzorčenje in z-transformacija: tabela osnovnih z transformacij

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$	$f(nT)$	$F(z)$
	$f(nT - kT), k = 0, 1, 2, \dots$	$z^{-k}F(z)$
	$f(nT + kT), k = 1, 2, \dots$	$z^k F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f(mT)z^{-m}$
	$\sum_{m=0}^{n-1} f(mT)$	$(z-1)^{-1}F(z)$
	$a^{-n}f(nT)$	$F(az)$
	$nf(nT)$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$
	$f(-nT)$	$F\left(\frac{1}{z}\right)$
	$\sum_{k=0}^n f_1(kT)f_2(nT - kT)$	$F_1(z)F_2(z)$
	$k_1f_1(nT) + k_2f_2(nT)$	$k_1F_1(z) + k_2F_2(z)$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

13

## Vzorčenje in z-transformacija: Tabela pomembnih z-transf.

$f(nT)$	$F(z)$
$\delta(nT)$	1
$ku(nT)$	$\frac{kz}{z-1}$
$a^{nT}$	$\frac{z}{z-a^T}$
$a^{nT} \sin(n\omega_0 T)$	$\frac{a^T \sin(\omega_0 T) z}{z^2 - (2a^T \cos(\omega_0 T))z + a^{2T}}$
$a^{nT} \cos(n\omega_0 T)$	$\frac{z(z - a^T \cos(\omega_0 T))}{z^2 - (2a^T \cos(\omega_0 T))z + a^{2T}}$
$nT a^{nT-T}$	$\frac{zT}{(z - a^T)^2}$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

14

## Vzorčenje in z-transformacija: Podvzorčenje (ALIASING)

$$F(s) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-snT}; \quad s = j\omega; \quad z = e^{j\omega T}$$

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-jn\omega T} = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-jn\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)T}$$

$$F(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} F\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}\right)$$

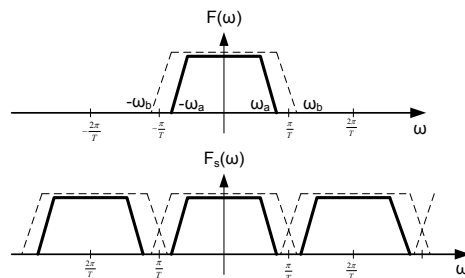
$F(j\omega)$  je period. funkcija s periodo  $\frac{2\pi}{T}$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

15

## Vzorčenje in z-transformacija: Podvzorčenje (ALIASING)



for  $\omega_a < \frac{\pi}{T}$ ; spektri se ne prekrivajo  $\Rightarrow$  rekonstrukcija je mogoca

for  $\omega_a \geq \frac{\pi}{T}$ ; spektri se prekrivajo  $\Rightarrow$  rekonstrukcija ni mogoca

$f_s > 2f_a$

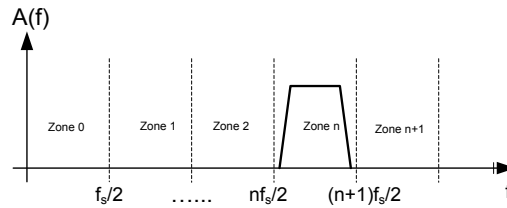
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

16



## Vzorčenje in z-transformacija: Splošno pravilo vzorčenja



$$f_L > \frac{nf_s}{2}; \quad f_H < \frac{(n+1)f_s}{2}$$

$$\frac{2f_L}{n} > f_s > \frac{2f_H}{(n+1)}$$

$$f_s > \frac{2f_H}{1}; \quad \text{za } n=0; \quad \text{Nyquistovo pravilo}$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

17

## Vzorčenje in z-transformacija: Posledice vzorčenja

1. Na vhodu: aliasing:

2. Na izhodu:

- D/A pretvornik (S/H) ima spekter:

$$F_{sh}(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-jn\omega T} = H_{sh}(\omega) F(e^{j\omega})$$

$$H_{sh}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega \frac{T}{2}} = \frac{T}{2} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

$$F_{sh}(j\omega) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} F\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}\right)$$

$e^{-j\omega \frac{T}{2}}$  fazni zasuk

$\frac{\sin(x)}{x}$  prevajalna funkcija S&H stopnje 0/tega reda

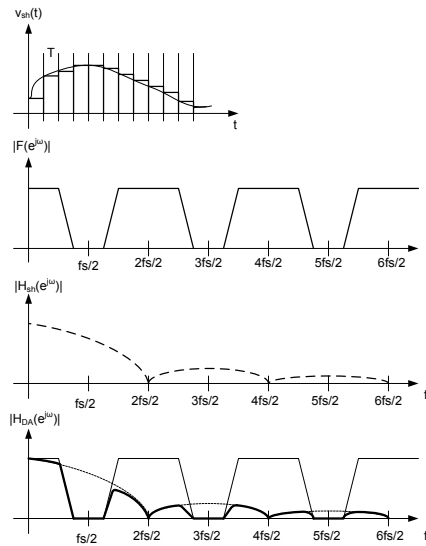
$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T}\right)$ : spekter signala po idealnem vzorčenju

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

18

## Vzorčenje in z-transformacija: Spekter SH0



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

19

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

1. Izračunajte enostransko z-transformacijo sekvence:

$$x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + 1z^{-5};$$

$$x_2(n) = \delta(n)$$

$$X_2(z) = 1;$$

$$x_3(n) = \delta(n+k); \quad k > 0$$

$$X_3(z) = z^k; \text{ for } k > 0; \text{ konvergenčno področje v celotnem } Z \text{ prostoru}$$

2. Izračunajte Z transformacijo iz definicije:

$$f(t) = e^{-at} u(t) \text{ vzorcimo z } f_s = \frac{1}{T}$$

$$f(nT) = \begin{cases} e^{-anT} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\text{Geometrična vrsta konvergira za } |z| > |e^{-aT}|$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

20

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

3. Izračunajte z-transformacijo diferencialne enačbe in njeno prevajalno funkcijo v z ravnini:

$$y(n) = x(n-1); \quad Y(z) = z^{-1}X(z); \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1}$$

4. Izračunajte z-transformacijo vhodne in izhodne sekvence in H(z):

$$x(n) = \begin{cases} |n| & -3 < n < 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad y(n) = y(n-1) + x(n)$$

$$X(z) =$$

$$H(z) =$$

5. Izračunajte z-transformacijo sekvence

$$y(nT) = u(nT)(2 + 3e^{-2nT})$$

$$Y(z) =$$

6. Izračunajte inverzno z-transformacijo:

$$Y(z) = \frac{3}{2z-1}; \quad y(n) =$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

21

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

7. Izračunajte odziv na enotino stopnico in z transformacijo odziva ter H(z)

$$y(nT) = a_1y(nT-T) + a_2y(nT-2T) + bx(nT)$$

$$u(nT) =$$

$$U(z) =$$

$$Y(z) =$$

$$H(z) =$$

8. Izračunajte inverzno z-transformacijo:

$$F(z) = \frac{8z^3 - 30z^2 + 19z}{(z-1)^2(z-4)}$$

$$\text{Solution: } f(n) = (5+n+3 \cdot 4^n)u(n)$$

9. Izračunajte odziv na enotino stopnico v časovnem prostoru

$$Y(z) = \frac{2z^3}{(z-1)(z^2 - z + 0.5)}$$

$$y(n) =$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

22

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

10. Kaj je rezultat vzorčenja dveh kosinusnih signalov s frekvencama  $f_1=10\text{Hz}$  in  $f_2=50\text{Hz}$  ter amplitudo 1, če ju vzorčimo z  $f_s=40\text{Hz}$ .

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t); \quad x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t); \quad f_s = 40\text{Hz}; \quad t = nT = \frac{n}{f_s}$$

$$x_1(nT) = \cos\left(2\pi 10 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right); \quad x_2(nT) = \cos\left(2\pi 50 \frac{n}{40}\right) = \cos\left(n \frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi n + n \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_1(nT) = x_2(nT)$$

11. Signal s frekvenco  $f$  vzorčimo z  $f_s$ . Kaj je rezultat?

$$x_o(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad f_s = \frac{1}{T}; \quad x_o(nT) = x(n) = A \cos\left(2\pi n \frac{f}{f_s} + \varphi\right)$$

12. Signal  $x_a(t)$  vzorčimo z  $f_s$ . Kaj je rezultat?

$$x_a(t) = A \cos(2\pi f_k t + \varphi); \quad f_k = f_o + kf_s; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

for  $k = 0$  se signal nahaja v coni 0, za  $k = 1$  se signal nahaja v coni 1 itd.

$$x(nT) = A \cos\left(2\pi \frac{f_o + kf_s}{f_s} n + \varphi\right) = A \cos\left(2\pi n \frac{f_o}{f_s} + \varphi + 2\pi kn\right) = A \cos\left(2\pi n \frac{f_o}{f_s} + \varphi\right)$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

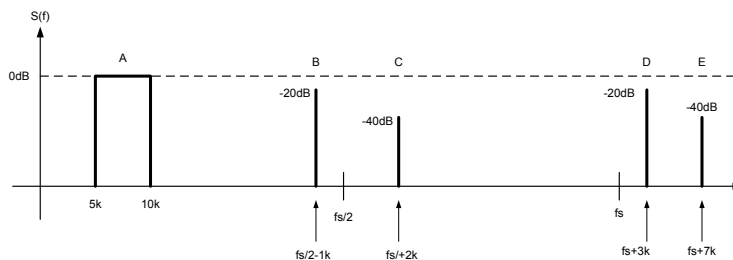
23

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

Določite približno pol frekvenco in najmanjši možni red anti-aliasing filtra s strmino  $S = N \cdot 20\text{dB/dek}$  ( $N$  je red filtra). Dovoljeno razmerje signal šum po vzorčenju je:  $(S/N) \geq 100\text{dB}$ . Ostali podatki so:

- $f_s = 1\text{MHz}$ .
- Zanimiva pasovna širina po vzorčenju je od  $5\text{kHz}$  do  $10\text{kHz}$
- vse komponente ki po vzorčenju padejo izven tega pasu lahko odstranimo z digitalnim filtriranjem

Spekter predvzorčenjem prikazuje spodnja slika.



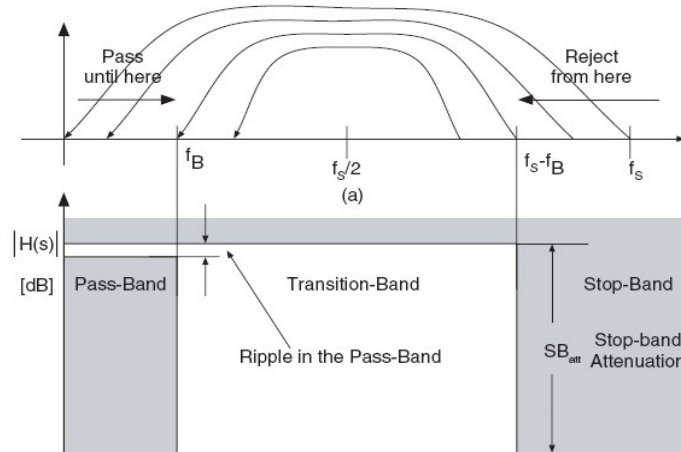
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

24

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

Specifikacije anti-aliasing filtra:



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

25

## Vzorčenje in z-transformacija : Primeri

### 2. Rekonstrukcijski filter:

12 bitni D/A pretvornik pretvarja digitalni sinusni signal z  $f_0=100\text{kHz}$  v analogni sinusni signal z vzorčno frekvenco  $f_s=1\text{MHz}$  in amplitudo  $A=1\text{V}$ .

- Narišite spekter signala na izhodu DA pretvornika v področju 0 to  $3f_s$ ,
- Izračunajte red in pol frekvenco  $f_p$  gladilnega filtra ( $S=-N*20\text{dB/decade}$ ) če je dovoljeno razmerje (S/N) v pasu 0 do  $2f_s$  boljše kot 40dB (sinx/x efekt)
- Kakšno korekcijo potrebuje spekter za  $f=f_s/10$  zaradi sinx/x efekta.

### 3. Splošno pravilo vzorčenja:

Spekter signala pred vzorčenjem se nahaja v področju od  $f_l=10.21\text{ MHz}$  do  $f_h=10.39\text{ MHz}$ . Izračunajte najmanjšo možno vzorčevalno frekvenco in cono v kateri se nahaja signal pred vzorčenjem.

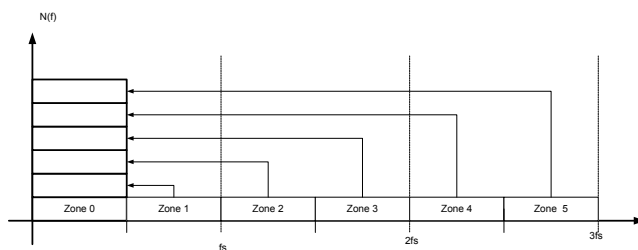
Narišite spekter pred in po vzorčenju

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

26

## Vzorčenje in šum:



Vzorčenje belega šuma z enakomerno spektralno gostoto v pasu  $B_{n,1}$  od 0Hz do  $3 \cdot f_s = 600\text{kHz}$  z  $f_s = 200\text{kHz}$  povzroči aliasing šuma. Šumna moč pred vzorčenjem je  $P_{n,1} = 10\text{mW}$  v pasu  $B_{n,1}$ . Zaradi vzorčenja se zgodi aliasing. Šumna moč ostane enaka, gostota šumne moči v coni 0 (0 do  $f_s/2$ ) se poveča za faktor  $(2 \cdot B_{n,1})/f_s$ .

Pred vzorčenjem:

$$P_{n,1} = 10\text{mW}, \quad B_{n,1} = 600\text{kHz}; \quad f_s = 200\text{kHz}; \quad P_{nd,1} = \frac{P_{n,1}}{B_{n,1}} = 1.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

Po vzorčenju:

$$P_{n,2} = P_{n,1}; \quad B_{n,2} = f_s/2$$

$$P_{nd,2} = \frac{1}{(f_s/2)} \sum_{n=0}^{n=5} \left( \frac{P_{n,1}}{6} \right) = \frac{B_{n,1}}{(f_s/2)} P_{nd,1} = \frac{0.6\text{MHz}}{100\text{kHz}} 1.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} = 100 \cdot 10^{-9} \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$$

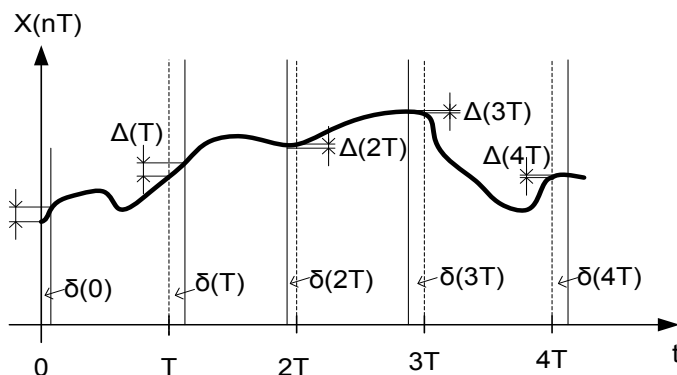
$$P_{n,2} = P_{nd,2} B_{n,2} = 100 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{W}$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

27

## JITTER



$\Delta(T)$  je odvisen od:

- $\delta(T)$
- $d(X(nT))/dt$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

28

## JITTER

---

Za sinusni vhodni signal :  $X(t) = A \cdot \sin(\omega_m t)$ ;

$$\Delta X(nT) \cong \left[ \frac{d}{dt}(X(t)) \Big|_{t=nT} \right] * \delta(nT) = A \cdot \omega_m \cdot \cos(\omega_m \cdot nT) \cdot \delta(nT)$$

Če je jitter naključen okrog tipicne vrednosti, s spektrom z enakomerno gostoto, potem je napaka vzorčenja enaka vzorčenju  $\delta ji(t)$ :

$$\delta(nT) = \text{samp}(\delta_{ji}(t));$$

$\Delta X(nT)$  is sampling of  $x_{ji}(t) = \delta_{ji}(t) \omega_m X_{in}(t)$  (cosine/sine is not important)

Če je spekter  $\delta ji(t)$  beli, potem je spekter  $x_{ji}(t)$  tudi beli, saj modulacija s sinusnim signalom ne spremeni spektra.

$$\text{Moč napake zaradi jitra je: } \langle (x_{ji}(t))^2 \rangle = \langle [A \omega_m \cos(\omega_m nT)]^2 \rangle \langle \delta_{ji}(t)^2 \rangle = \frac{A^2 \omega_m^2}{2} \langle \delta_{ji}(t)^2 \rangle$$

Razmerje SnR je:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{ji, dB} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{(A^2/2)}{(A^2 \omega_m^2 / 2) \cdot \langle \delta_{ji}(t)^2 \rangle} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{\omega_m^2 \cdot \langle \delta_{ji}(t)^2 \rangle} \right) = -20 \log_{10} [\omega_m \cdot \langle \delta_{ji}(t)^2 \rangle]$$

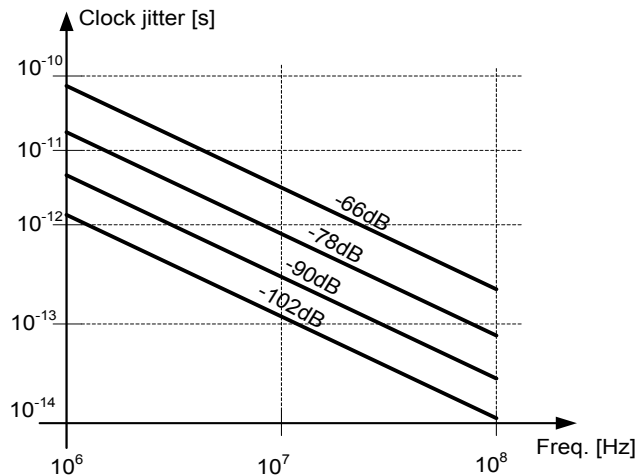
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

29

## JITTER

---



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

30

## JITTER

### Primer 1:

Imamo vzorčevalni sistem s spodnjimi podatki. Jitter je edini vir, ki zmanjšuje razmerje signal šum. Izračunajte  $\delta_{ji}$ .

Podatki:  $SnR=90dB$ ,  $f_s=1GHz$ ,  $f_{in}=100MHz$ ,  $A_{in}=1$

### Rešitev:

$$\delta_{ji}(t) = \frac{1}{2\pi f_{in}} 10^{-\frac{SnR_{ji}}{20}} \cong 50 * 10^{-15} s$$

## JITTER

### Primer 2:

Imamo vzorčevalni sistem s spodnjimi podatki, kjer je zahtevan  $SnR$  po vzorčenju boljši kot 80dB. Po vzorčenju z  $f_s$  dobimo  $SnR(f_{in\_1})$ . Kaj se zgodi, če z enakim vzorčevalnikom vzorčimo signal s frekvenco  $f_{in\_2}$ .

### Podatki:

$$V_{fs} = 1V$$

$$f_s = 100MHz$$

$$SnR(f_{in\_1}) = 80dB$$

$$f_{in\_1} = 20MHz$$

$$f_{in\_2} = 120MHz$$

$$P_{N_{ji}} = 0.2 * N_{tot}$$

$$SnR(f_{in\_2}) = ?$$

### Resitev:

$$SnR = 10 \log_{10} (P_s / P_N)$$

$$P_{N_{tot}} = P_s 10^{-\frac{SnR}{10}} = \frac{1}{2} 10^{-8} [V^2]$$

$$P_{N_{ji}}(f_{in\_1}) = 0.2 * P_{N_{tot}} = 0.1 10^{-8} [V^2]$$

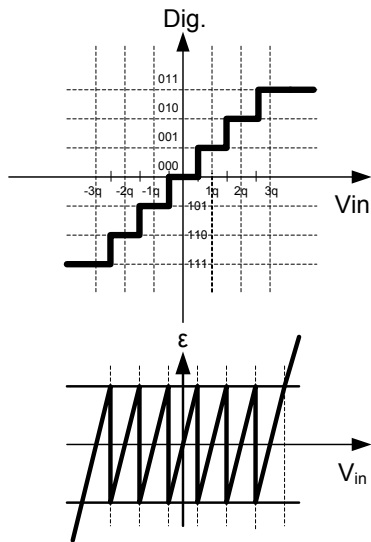
$$\delta_{ji}(t) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{P_{N_{ji}}(f_{in\_1})}}{A \omega_{in}} = 3.6 10^{-13}$$

$$SnR(f_{in\_2}) = -20 \log_{10} (\delta_{ji}(t) \omega_{in}) = -71dB$$

Tak vzorčevalnik ni primeren za podvzorčenje



## Kvantizacija



$$\varepsilon = V_{in} - qD; \quad \text{for } -\frac{q}{2} < v_{in} < \frac{q}{2} \dots\dots$$

$$q = \frac{V_{in_{max}}}{2^N};$$

$$v_{\varepsilon} = \frac{q t}{T} \left[ \begin{matrix} +T/2 \\ -T/2 \end{matrix} \right]$$

$q$  kvantizacijski korak

$\varepsilon$  kvantizacijska napaka

$V_{in}$  vhodna napetost

$V_{in_{max}}$  največja vhodna napetost

$N$  št bitov

$D$  digitalni izhod

## Kvantizacija:

$$v_{\varepsilon_{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left( \frac{q t}{T} \right)^2 dt = \left[ \frac{1}{T} \frac{q^2 t^3}{3} \right]_{-T/2}^{+T/2} = \frac{q^2}{12} \quad \left( \text{v pasu } 0 \text{ to } \frac{f_s}{2} \right)$$

$$v_{\varepsilon_{rms}} = \frac{q}{\sqrt{12}}$$

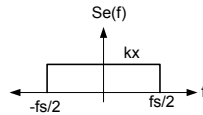
$$v_{in\_rms\_max} = \frac{2^N q}{2\sqrt{2}}$$

$$\left( \frac{S}{N} \right) = 20 \log_{10} \left[ \frac{v_{in\_rms\_max}}{v_{\varepsilon_{rms}}} \right] = 20 \log_{10} \left[ \frac{2^N q}{2\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{3}}{q} \right] = 20 \log_{10} \left[ \frac{2^N \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\boxed{\left( \frac{S}{N} \right) \cong N * 6.02 + 1.76}$$

## Kvantizacija:

Če je signal  $v_{in}$  zelo aktiven, potem lahko napako  $\epsilon(n)$  aproksimiramo z neodvisnim, naključno distribuiranim šumom, ki je enakomerno porazdeljen med independent random number  $\pm q/2$  ( $q$  je kvantizacijski korak oziroma razlika dveh sosednjih kvantizacijskih nivojev). Šumna moč, ki jo povzroča tak kvantizator je enaka  $q^2/12$  in je neodvisna od vzorčevalne frekvence; celotna moč kvantizacijskega šuma se pojavi kot šum z enakomerno spektralno gostoto  $S_e(f)$  v frekvenčnem področju 0 do  $f_s/2$  (oziroma  $\pm f_s/2$ )



$$\int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_e^2(f) df = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} k_x^2 df = k_x^2 f_s = \frac{q^2}{12}$$

$$\Rightarrow k_x = \left( \frac{q}{\sqrt{12}} \right) \sqrt{\frac{1}{f_s}}$$

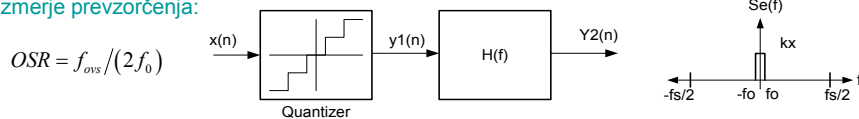
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

35

## Prevzorčenje: OSR

- Prevzorčenje dobimo, ko je zanimivo frekvenčno področje frekvenčno omejeno na področje 0 do  $f_0$ , medtem ko je vzorčna frekvenca  $f_s$  višja:  $f_s > 2f_0$ .
- Razmerje prevzorčenja:



Redukcija  $P_e$  zaradi filtra  $H(f)$  in prevzorčenja:

$$P_e = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} S_e^2(f) |H(f)|^2 df = \frac{q^2}{12} \frac{1}{OSR}$$

Razmerje  $(S/N)$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{\max} = 6.02 * N + 1.76 + 10 \log_{10}(OSR)$$

Podvojitve OSR povzroči 3 dB (oziroma 0.5 bitov) boljši SNR.

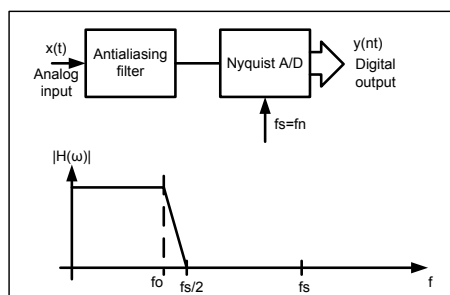
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

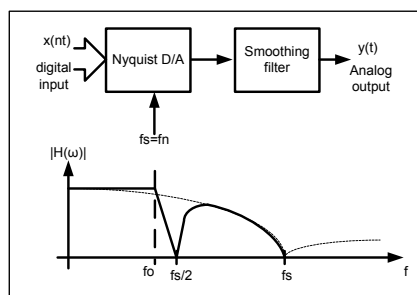
36

## Nyquistovi AD in DA pretvorniki

### Nyquistov A/D pretvornik



### Nyquistov D/A pretvornik



**Problemi:**

- Kompliciran drag antialiasing in gladilni filter
- Točnost pasivnih komponent je lahko problem

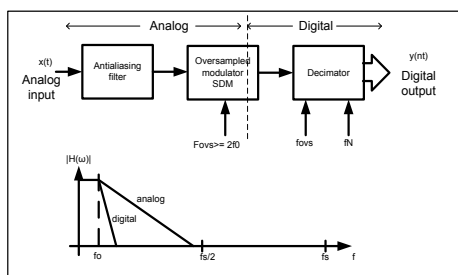
2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

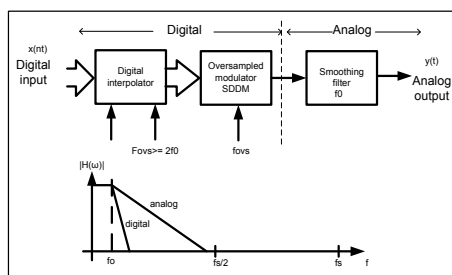
37

## AD in DA pretvorniki s prevzorčenjem

### A/D pretvornik s prevzorčenjem:



### D/A pretvornik s prevzorčenjem:



**Problemi, primerjava:**

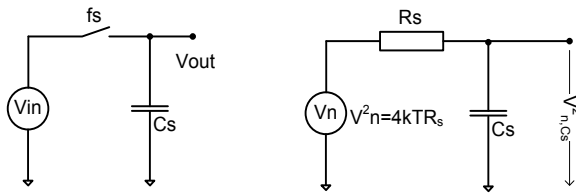
- Enostavnejši antialiasing in gladilni filteri
- Manjše zahteve za točnost pasivnih komponent

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

38

## kT/C šum



$$v_{n,Cs}^2 = \frac{4kTR_s}{1 + (\omega R_s C_s)^2}$$

$$P_{n,Cs} = \int_0^{\infty} v_{n,out}^2(f) df = 4kTR_s \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (2\pi f R_s C_s)^2} = \frac{kT}{C}$$

Ta šumna moč se po vzorčenju nahaja v pasu od 0 do  $f_s/2$ . Odvisna je le od velikosti vzorčnega kondenzatorja in temperature.

## kT/C šum

### Primer:

Določi najmanjši možni vzorčni kondenzator, ki omogoča ločljivost boljšo kot 12 bitov za vzorčevalnik s podatki:

$$V_{fs} = 1V$$

$$f_{in} = 5MHz$$

$$\delta_{ji} = 1ps$$

### Rešitev:

$$v_{n,budget}^2 = \frac{V_{FS}^2}{2 \cdot 12 \cdot 2^{2 \cdot 12}} = 2.48 \cdot 10^{-9} [V^2]$$

$$v_{n,ji}^2 = \left( \frac{V_{FS}}{\sqrt{2}} \omega \delta_{ji} \right)^2 = 4.9298 \cdot 10^{-10} [V^2]$$

$$v_{n,kT/C}^2 = v_{n,budget}^2 - v_{n,ji}^2 = 1.99 \cdot 10^{-9} [V^2]$$

$$C_s = \frac{kT}{v_{n,kT/C}^2} = \frac{1.38e^{-23} [J/K] 300}{1.99 \cdot 10^{-9} [V^2]} = 12.08 pF$$

## DFT in FFT

Spekter vzorčenih signalov je:

$$L\{x^*(nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)e^{-nsT}$$

$$F\{x^*(nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}$$

Zahteva neskončno število vzorcev, ki niso na razpolago.

Dostopnih je N vzorcev pri časih 0T do (N-1)T

Algoritem DFT predpostavlja, da se vzorci periodično ponavljajo :  $x((i+kN)T)=x(iT)$  za  $0 < i < (N-1)$  za vsak k

Periodično nadaljevanje vodi do N spektralnih črt pri frekvencah:

$$f_k = k/(T(N-1)) \text{ for } 0 < k < (N-1)$$

Amplitudo spektralnih črt DFT izračuna z:

$$X(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi kn/(N)}$$

## DFT in FFT

**Definicija:** Imamo realen časovno diskretni signal s končno dolžino trajanja  $x(nT)$ . Formiramo ustrezni periodični signal  $x_p(nT)$

$$x_p(nT) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x(nT + rNT); \quad N \text{ je perioda}$$

$$\text{DFT: } X_p(jk\Omega) = \sum_{n=0}^{n=N-1} x_p(nT)W^{-kn} = \text{DFT}\{x_p(nT)\}$$

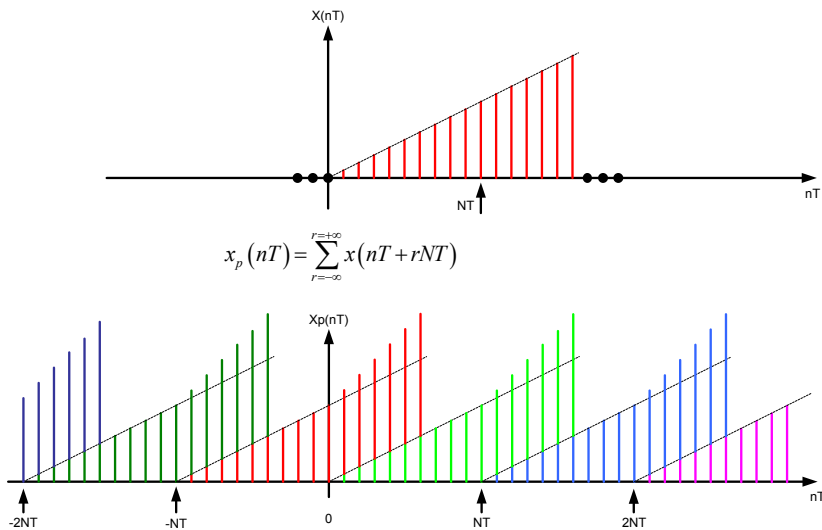
kjer je:

$$W = e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad \Omega = \frac{\omega_s}{N} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_p(jk\Omega) = A(k\Omega)e^{j\phi(k\Omega)} \text{ ker je kompleksen}$$

$$\text{IDFT: } x_p(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} X_p(jk\Omega)W^{kn}$$

## DFT in FFT



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

43

## DFT in FFT

Lastnosti:

- Linearnost:  $DFT[ax_p(nT) + by_p(nT)] = DFT[ax_p(nT)] + DFT[by_p(nT)]$
- Periodičnost:  $X_p[j(k + rN)\Omega] = X_p[jk\Omega]$
- Simetrija:  $X_p[j(N - k)\Omega] = X_p^*(jk\Omega)$

Primer 1: Poišči DFT sekvence xp(nT):

$$x_p(nT) = \begin{cases} 1 & 2 \leq n \leq 6 \\ 0 & n = 0, 1, 7, 8, 9 \end{cases}; \quad N = 10$$

Rešitev:

$$X_p(jk\Omega) = \sum_{n=2}^{n=6} W^{-kn} = W^{-2k} - W^{-3k} - W^{-4k} - W^{-5k} - W^{-6k} = \frac{W^{-2k} - W^{-7k}}{1 - W^k}$$

$$X_p(jk\Omega) = \frac{e^{-j\frac{4k\pi}{N}} - e^{-j\frac{14k\pi}{N}}}{1 - e^{-j\frac{2k\pi}{N}}} = \frac{e^{-j\frac{4k\pi}{N}} \left( 1 - e^{-j\frac{10k\pi}{N}} \right)}{1 - e^{-j\frac{2k\pi}{N}}} = \left[ \frac{e^{-j\frac{4k\pi}{N}} e^{-j\frac{5k\pi}{N}}}{e^{-j\frac{k\pi}{N}}} \right] \left[ \frac{e^{j\frac{5k\pi}{N}} - e^{-j\frac{5k\pi}{N}}}{e^{j\frac{k\pi}{N}} - e^{-j\frac{k\pi}{N}}} \right]$$

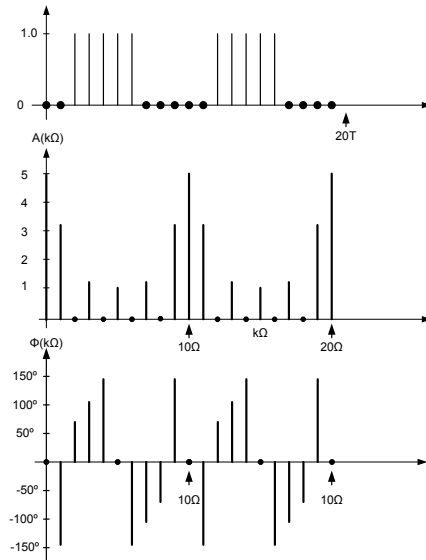
$$X_p(jk\Omega) = e^{-j\frac{4k\pi}{5}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{10}\right)}$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

44

## DFT in FFT



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

45

## DFT in FFT

- Direktni izračun DFT zahteva  $N$  kompleksnih množenj in  $N-1$  kompleksnih seštevanj za vsako spektralno komponento  $X(k)$ . Takih komponent je  $N$ , potrebujemo torej:
  - $N^2$  množenj
  - $N(N-1)$  seštevanj
- ⇒ Za velik  $N$  potrebujemo ogromno število izračunov
- ⇒ **FFT algoritem**: je algoritem za izračun DFT sekvence, ki je mnogo bolj učinkovit kot direktni izračun. (podrobna razlaga presega okvir tega predmeta).
- Literatura.: J.G.Proakis, D.G.Manolakis, "Digital Signal Processing", Macmillian Publishing Company 1992

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

46

## DFT in FFT

---

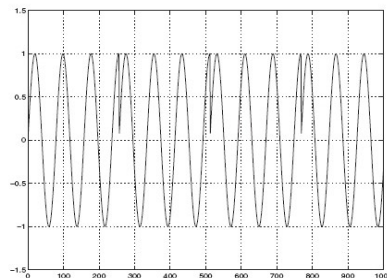
DFT in FFT : "spektralno prekrivanje":

- DFT poizkuša opisati časovni potek vzorčenega signala s setom kompleksnih sinusoid z diskretnimi frekvencami
- Če je število sinusoid enako številu vzorcev časovnega zapisa potem je takšna preslikava možna in enoumna
- V realnem svetu je zelo težko zadostiti temu pogoju zato ena ali več vhodnih spektralnih komponent nima točno enake frekvence kot ena od kompleksnih sinusoid
- Posledica je pojav "Spektralno prekrivanje" (Spectral leakage) in ima za posledico spremembo amplitud spektralnih črt saj algoritem poizkuša čim bolj izenačiti originalni in izračunani časovni odziv.

## DFT in FFT

---

- Pri izračunu DFT (FFT) predpostavljamo da je:
  - Vhodni signal periodičen
  - Vhodni signal vsebuje le komponente ki so celoštevilčni mnogokratnik vzorčne frekvence deljene z  $N$  ( $N$  je število vzorcev v sekvenci)
- Realni signali :
  - Niso nikoli periodični z zahtevano periodo,
  - Ker predpostavljamo, da so periode signalov mnogokratnik  $N$  vzorčnih period kar pa ponavadi ni res to privede do diskontinuitete med (glej sliko). Ta fenomen povzroči da se del energije prenese (porazdeli) na druge spektralne črte (bins).





## DFT and FFT

---

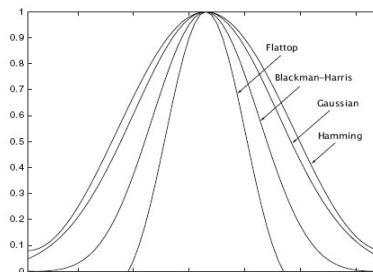
Problem rešujejo okenske funkcije:

- Množijo vzorce vhodnih signalov z eno od okenskih funkcij in tako zmanjšajo vpliv "Spektralnega prekrivanja".
- V uporabi je mnogo okenskih funkcij z različnimi lastnostmi:
- Primeri: pravokotna, Hammingova, Hanningova, Blackmann/Harrisova

$$x_w(nT) = x(nT)W(n)$$

$$W_n = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{Pravokotno okno} \\ \sum_{i=0}^m \left( a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{n} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right) & \text{za ostale} \end{array} \right\}$$

	Hamming	Hanning	Blackmann/Harris
m	1	1	3
a <sub>0</sub>	0.543478	0.5	0.35875
a <sub>1</sub>	0.456522	0.5	0.348829
a <sub>2</sub>			0.14128
a <sub>3</sub>			0.01168
Najmanjše slab	43dB	32dB	94dB



2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

49

## DFT and FFT

---

Da se izognemo spektralnemu lezenju lahko uporabimo koherentno vzorčenje, kjer so frekvence določene z:

$$f_{in} = \frac{k}{2^N} f_s; \quad k \text{ je prastevilo}$$

Procesno ojačanje FFT algoritma:

$$x_{noise}^2 [dB] = P_{sig} - 1.76 - 6.02 * N - 10 * \log_{10} \frac{N}{2}$$

2013/2014

Mikroelektronski sistemi: 2. Uvodna poglavja

50

## Kodirne sheme AD in DA pretvornikov:

---

- Unipolarno binarno (Unipolar Straight Binary (USB)):
  - $V_{in} < -V_{ref}/2$  -> 0000...0 to  $V_{in} > V_{ref} - 1/2$ LSB -> 1111...1
- Komplementarno USB (Complementary Straight Binary (CSB)):
  - Inverziran USB
- Bipolarno binarno z ničelno napetostjo (Bipolar Offset Binary (BOB)):
  - MSB = sign bit ( 1 -> pozitivno; 0 -> negativno )
  - 000...0 full negative input;  $V_{in}=0$  -> 0111...11; 111...11 full positive input
- Komplementarno bipolarno binarno z ničelno napetostjo (Complementary Offset Binary (COB)):
  - MSB = sign bit ( 0 -> positive; 1 -> negative )
  - 1111...1 najmanjši negativni vhod;  $V_{in}=+max.$  -> 011...11 največji pozitivni vhod
- Binarno z dvojiškim komplementom (2's complement (BTC)):
  - $V_{in}=0$  -> 000...000;  $V_{in} < -V_{ref}/2$  -> 10000...00;  $V_{in} > V_{ref} - 1/2$ LSB -> 01111...11
- Komplementarno BTC (Complementary Binary 2's complement (CTC)):
  - Nasprotno od BTC

## Primeri in domače naloge

---

1. Pasovna širina vhodnega signala je 22kHz. Določi masko Butterworthovega anti-aliasing filtra (pol frekvenco in red) tako, da bo slabljenje nevarnih komponent najmanj 80dB, pri vzorčni frekvenci  $f_s=1$  MHz.
2. Pasovna širina vhodnega signala je od 41MHz do 42MHz. Določi vse možne načine vzorčenja, ki preselijo ta pas v pas med 2MHz in 3MHz, pri tem morajo biti spektri obrnjeni v enako smer.
3. Določi spekter kvantizacijskega šuma na izhodu 2 bitnega kvantizatorja. Vhodni signal je sinusni signal s frekvenco  $64/2048 \cdot f_s$  in amplitudo  $0.38 V_{FS}$ . Pojasni izvor nekaterih spektralnih črt (tonov).
4. S/H vzorči in zadrži vzorce sinusnega signala amplitude  $0.46 V$  in frekvence  $39/2048 \cdot f_s$ . Rezultat pretvarja kvantizator z 10-bitno ločljivostjo (resolution). Uporabi programsko paket Matlab za določitev izhodnega signala in prikaži spekter z uporabo FFT rutine.

## Primeri in domače naloge

---

5. Kako velik je dovoljen časovni jitter, ki omogoča razmerje  $S_nR=92\text{dB}$ ? Kako velik je ta jitter pri vzorčenju sibusnega signala s frekvenco  $100\text{ MHz}$ ? Kakšna je specifikacija jitrta če je  $S_nR$  zmanjšan na  $80\text{dB}$ ?
6. Kvantizator ima 10 bitno ločljivost. Določi USB kodiranje za signal  $0.367\text{ VFS}$  ter BOB in BTC kodiranje za  $-0.763\text{ VFS}$ .
7. Sinusni signal s frekvenco  $f=0.23456\text{ MHz}$  in amplitudo  $V=0.67\text{ VFS}$  vzorčimo z  $f_s1=1\text{ MHz}$ . Zadržimo vzorec celotno periodo vzorčenja in ponovno vzorčimo z  $f_s2=10\text{ MHz}$ . Skicirajte spekter po drugem vzorčevalniku.
8. Kakšna je šumna gostota če v S-C vzorčevalniku uporabimo vzorčni kondenzator s kapacitivnostjo  $3\text{ pF}$ .  $F_s=58\text{ MHz}$ . Kakšen je upornost relanega upora, ki povzroči anko šumno gostoto?
9. Določi zahtevano povečano ojačanje v dB pri frekvenci  $0.36*f_s$  za S/H vezje in potrebno slabljenje za oslabitev zrcalne komponente pri  $1,5*f_s$  do  $75\text{ dB}$ !
10. Generiraj sliko z računalniško simulacijo, ki pokaže ekvivalentno število bitov kot funkcijo jitrta vzorčne frekvence. Ločljivost naj bo 15-bitov in 16-bitov; Signal na vhodu ima frekvenco  $f_s1=50\text{ MHz}$  in  $f_s2=100\text{ MHz}$ . Preveri območje jitrta:  $0.01\text{ ps}$ .

## Primeri in domače naloge

---

12. Izračunajte procesno ojačanje FFT algoritma z  $2^{14}$  točk . Če spektralna črta predstavlja sinusni signal z amplitudo  $1\text{ Vp}$  , ki smo ga kvantizirali z 10 bitnim kvantizatorjem. Kakšna je najmanjša možna amplituda harmoničnih komponent, ki jih še lahko vidimo?
13. Specifikacije zahtevajo zelo majhno harmonično popačenje. Najvišja harmonska komponenta je lahko  $98\text{ dB}$  manjša kot osnovna harmonska komponenta. Ocenite potrebno dolžino FFT sekvence da bo šumni nivo manjši kot  $-105\text{ dBFS}$ . Predpostavljajte 10 bitni in 12 bitni kvantizacijo.
14. Kakšna popačenja povzroča S/H stopnja za vhodni signal, ki ima pasovno širino enako  $0.34*$  Nyquistovega intervala?  
Kakšen je fazni zasuk na zgornji meji pasovne širine na vhodu?

## Primeri in domače naloge

---

15. Določite velikost vzorčnega kondenzatorja in dovoljeni jitter za 14-bit, 65 MHz AD pretvornik z  $V_{fs}=1V$ . The ENB =13.5-bit.

16. Izračunaj z transformacijo izrazov:

$$y1(nT)=a x(nT)+ b x(nT +2T) - x(nT);$$

$$y2(nT)=x(nT-T) - x(nT).$$

17. Izračunajte prevajalno funkcijo  $Y(z)/X(z)$ , ki jo določa zveza

$$y(nT+T) = y(nT)+ x(nT)$$