Testiranje hipotez

a.) **Normalno porazdeljena slučajna spremenljivka $X \sim N(\mu, \sigma)$, hipoteza o povprečni vrednosti μ, če poznamo standardni odklon σ.**

Preverjamo hipotezo

$$H_0 \colon \mu = \mu_0$$

ob stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α. Če je hipoteza H_0 pravilna, vemo, da je spremenljivka $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ standardno normalno porazdeljena, in velja na primer

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha,$$

kjer je $z_{\alpha/2}$ zgornji $\alpha/2$ kvantil standardne normalne porazdelitve. Za dan vzorec velikosti n in z vzorčnim povprečjem $\bar{x}$ izračunamo vzorčno testno statistiko

$$z_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Sedaj sklepamo takole:

- dvostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu \neq \mu_0$:
  - * če je $z_0 < -z_{\alpha/2}$ ali $z_0 > z_{\alpha/2}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $-z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{\alpha/2}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- zgornja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu > \mu_0$:
  - * če je $z_0 > z_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $z_0 \leq z_\alpha$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- spodnja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu < \mu_0$:
  - * če je $z_0 < -z_\alpha$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $z_0 \geq -z_\alpha$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti.

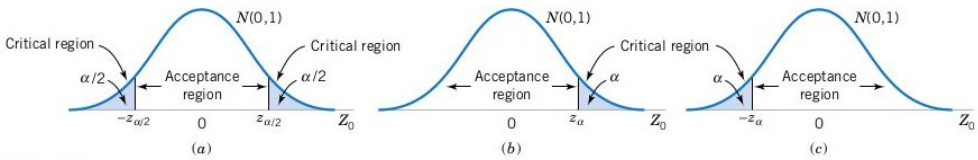

Figure 9-6 The distribution of Z_0 when H_0: $\mu = \mu_0$ is true, with critical region for (a) the two-sided alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$, (b) the one-sided alternative $H_1 : \mu > \mu_0$, and (c) the one-sided alternative $H_1 : \mu < \mu_0$.

b.) **Normalno porazdeljena slučajna spremenljivka $X \sim N(\mu, \sigma)$, hipoteza o povprečni vrednosti μ, če ne poznamo standardnega odklona σ.**

Preverjamo hipotezo

$$H_0 \colon \mu = \mu_0$$

ob stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α.

Dan je majhen vzorec ($n < 40$)

Če je hipoteza H_0 pravilna, vemo, da je $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ Studentova t-porazdeljena slučajna spremenljivka z $n-1$ stopnjami prostosti, in velja na primer

$$P\left[-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha,$$

kjer je $t_{\alpha/2,n-1}$ zgornji $\alpha/2$ kvantil Studentove t-porazdelitve z $n-1$ stopnjami prostosti. Za dan vzorec velikosti n z vzorčnim povprečjem $\bar{x}$ in kvadratom vzorčnega standardnega odklona

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

izračunamo vzorčno testno statistiko

$$t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Sedaj sklepamo takole:

- dvostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu \neq \mu_0$:
  - * če je $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$ ali $t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $-t_{\alpha/2,n-1} \leq t_0 \leq t_{\alpha/2,n-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- zgornja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu > \mu_0$:
  - * če je $t_0 > t_{\alpha,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $t_0 \leq t_\alpha, n-1$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- spodnja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \mu < \mu_0$:
  - * če je $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $t_0 \geq -t_{\alpha,n-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti.

V programskem paketu R lahko za en vzorec in ničelno hipotezo $H_0 : \mu = \mu_0$ uporabimo vgrajen ukaz `t.test(x, mu =` μ_0`)`, za dva neodvisna vzorca in ničelno hipotezo $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = a$ pa ukaz `t.test(x1, x2, mu = a)`. Z ukazom `t.test(...)` bomo kasneje delali tudi parni t-test.

Dan je velik vzorec ($n \geq 40$)

Ko se število prostostnih stopenj veča, se t-porazdelitev približuje standardni normalni porazdelitvi. Če je hipoteza H_0 pravilna, je zato spremenljivka $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ približno standardno normalno porazdeljena in velja na primer

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha,$$

kjer je $z_{\alpha/2}$ zgornji $\alpha/2$ kvantil standardne normalne porazdelitve. Za dan vzorec velikosti n z vzorčnim povprečjem $\bar{x}$ in vzorčnim standardnim odklonom s (kot zgoraj) izračunamo vzorčno testno statistiko

$$z_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Glede zavrnitve hipoteze sklepamo v skladu s standardno normalno porazdelitvijo.

c.) **Normalno porazdeljena slučajna spremenljivka $X \sim N(\mu, \sigma)$, hipoteza o standardnem odklonu σ oziroma varianci σ^2.**

Preverjamo hipotezo

$$H_0 \colon \sigma^2 = \sigma_0^2$$

ob stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α. Če je hipoteza H_0 pravilna, vemo, da je spremenljivka $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ χ^2-porazdeljena slučajna spremenljivka z $n-1$ prostostnimi stopnjami, in velja na primer

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha,$$

kjer sta $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ in $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ zgornji in spodnji $\alpha/2$ kvantil χ^2-porazdelitve. Za dan vzorec velikosti n z vzorčnim povprečjem $\bar{x}$ in vzorčnim standardnim odklonom s (kot zgoraj) izračunamo vzorčno testno statistiko

$$x_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Sedaj sklepamo takole:

- dvostranska alternativna hipoteza $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$:
  - * če je $x_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ ali $x_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq x_0^2 \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- zgornja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$:
  - * če je $x_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $x_0^2 \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,
- spodnja enostranska alternativna hipoteza $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$:
  - * če je $x_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
  - * če pa je $x_0^2 \geq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti.

d.) **Binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka $X \sim Binom(n, p)$, hipoteza o deležu populacije p z določeno lastnostjo.**

Preverjamo hipotezo

$$H_0 \colon p = p_0$$

ob stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α. Če je hipoteza H_0 pravilna, vemo, da je spremenljivka $Z = \frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ za dovolj velik n približno standardno normalno porazdeljena, in velja na primer

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha,$$

kjer je $z_{\alpha/2}$ zgornji $\alpha/2$ kvantil standardne normalne porazdelitve. Za dan vzorec velikosti n z vzorčnim povprečjem $\bar{x}$ in vzorčnim deležem $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ uporabimo vzorčno testno statistiko

$$z_0 = \frac{\bar{x}-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

Glede zavrnitve hipoteze sklepamo v skladu s standardno normalno porazdelitvijo.

e.) **Verjetnostne porazdelitve populacije ne poznamo, hipoteza o skladnosti (ujemanju) s predpostavljeno slučajno porazdelitvijo.**

Preverjamo hipotezo

$$H_0\colon \text{ populacija ima predpostavljeno slučajno porazdelitev}$$

pri alternativni hipotezi, da populacija nima predpostavljene slučajne porazdelitve, in stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α. Za vrsto porazdelitve, ki nastopa v ničelni hipotezi, se odločimo na podlagi danega vzorca. Hipotezo testiramo tako, da slučajni vzorec velikosti n razdelimo v k frekvenčnih razredov:

- O_i = število predstavnikov vzorca v i-tem razredu,
- E_i = pričakovano število predstavnikov vzorca v i-tem razredu v skladu s predpostavljeno porazdelitvijo (kvantili).

Izračunamo vzorčno testno statistiko

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

Sklepamo takole:

* če velja $x_0^2 > \chi^2_{\alpha,k-p-1}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
* če velja $x_0^2 \leq \chi^2_{\alpha,k-p-1}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,

kjer je $\chi^2_{\alpha,k-p-1}$ zgornji α kvantil χ^2 slučajne porazdelitve s $k-p-1$ prostostnimi stopnjami, p pa je število parametrov slučajne porazdelitve iz hipoteze H_0.

Frekvenčni razredi lahko imajo različne širine. Če v frekvenčnem razredu ni dovolj elementov (npr. 5), združujemo sosednje razrede.

f.) **Hipoteza o odvisnosti dveh kriterijev (kontingenčna tabela).**

Podatke razdelimo v podskupine glede na 2 različna kriterija (npr. študente razdelimo glede na oceni pri dveh predmetih). Tako razdeljene podatke lahko prikažemo v 2-dimenzionalni tabeli O z r vrsticami in c stolpci. Zanima nas, ali sta kriterija med sabo neodvisna. Preverjamo hipotezo

$$H_0\colon \text{ razporeditev po vrsticah tabele je } \textbf{neodvisna} \text{ od razporeditve po stolpcih}$$

pri alternativni hipotezi, da je razporeditev po vrsticah tabele odvisna od razporeditve po stolpcih in stopnji značilnosti oz. napaki I. vrste α. Pri tem je:

- verjetnost, da je element vzorca v i-ti vrstici, enaka vsoti elementov i-te vrstice, deljeni s številom elementov n:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} O_{ij},$$

– verjetnost, da je element vzorca v j-tem stolpcu, enaka vsoti elementov j-tega stolpca, deljeni s številom elementov n:

$$\hat{v}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} O_{ij}.$$

Če je razporeditev n elementov vzorca po stolpcih neodvisna od razporeditve po vrsticah, je število elementov v i-ti vrstici in j-tem stolpcu približno enako $E_{ij} = n\hat{u}_i\hat{v}_j$. Za velike n izračunamo vzorčno testno statistiko

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}.$$

Sklepamo takole:

* če velja $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)}$, hipotezo H_0 zavrnemo,
* če velja $\chi_0^2 \leq \chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)}$, hipoteze H_0 ne moremo zavrniti,

kjer je $\chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)}$ zgornji α kvantil χ^2 slučajne porazdelitve z $(r-1)(c-1)$ prostostnimi stopnjami.

Povezava testiranja hipoteze z intervalom zaupanja:

Če je $[l, u]$ dvostranski interval zaupanja za vzorčno vrednost θ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$, potem zavrnemo hipotezo $H_0 : \theta = \theta_0$ s stopnjo značilnosti α natanko tedaj, ko θ_0 ni v intervalu $[l, u]$ za θ. Podobno velja za oba enostranska intervala zaupanja.

Povezava testiranja hipoteze s P-vrednostjo:

P-vrednost je vezana na vzorec in izraža, v kolikšni meri so vzorčni podatki v skladu z ničelno domnevo. Večja vrednost P pomeni večjo podporo ničelni domnevi, majhen P pa govori v prid alternativne domneve. **Če je $P < \alpha$, hipotezo zavrnemo!** Natanko takrat je namreč vzorčna testna statistika v območju zavrnitve hipoteze.

Uporabna statistika 2013/2014

VAJA 11: Preverjanje statističnih hipotez

1. V grafičnem vmesniku programskega paketa R odprite novo skriptno datoteko.

2. Strokovnjaki so ugotavljali, ali okuženost tobakovih rastlin z virusom vpliva na njihovo višino. Vzorčili so 20 okuženih in 25 neokuženih rastlin in izmerili njihovo višino. Podatki so v tekstovni datoteki *tobak.txt* ločeni z vejicami. Predpostavljamo normalni porazdelitvi.

   a.) Podatke o obeh vzorcih shranite v vektorja x in y.

   b.) Podatke o vzorcih prikažite z vzporednima škatlastima diagramoma. Sliko opremite z ustreznimi pripisi in jo shranite pod imenom *skatli-tobak.pdf*.

   c.) Naredite grafično primerjavo kvantilov vzorcev. Uporabite ukaz `qqplot(x, y, ...)`.

   d.) Testirajte hipotezo

   $$H_0: \text{ povprečji se razlikujeta za } d = 2$$

   glede na tri možne alternativne hipoteze (dvostranska, zgornja enostranska, spodnja enostranska). Za vsako izmed njih navedite dobljeno testno statistiko, P-vrednost in 95% interval zaupanja.

   e.) S kakšno stopnjo zaupanja bi lahko zavrnili H_0 za vse tri alternativne hipoteze naenkrat?

   f.) Testirajte hipotezo, da je višina tobakovih rastlin porazdeljena normalno (pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$). To naredite za obe skupini rastlin. Ali lahko hipotezo zavrnemo? Pomagate si lahko s funkcijo v datoteki *gof.r*.

   g.) Izračunajte še P-vrednosti statističnih testov iz prejšnje točke.

   R: a.) - b.) - c.) - d.) dvostranska: $t = 1.1003$, $P = 0.2774$, $[l, u] = [-0.5358, 10.6201]$; spodnja enostranska: $t = 1.1003$, $P = 0.8613$, $(-\infty, 9.6913]$; zgornja enostranska: $t = 1.1003$, $P = 0.1387$, $[0.39296, \infty)$ e.) $\alpha > 0.8613$ f.) okužene: $x_0^2 = 2.55409$, $\chi^2_{\alpha,4} = 3.84146$, ne zavrnemo; neokužene: $x_0^2 = 1.45400$, $\chi^2_{\alpha,5} = 5.99146$, ne zavrnemo g.) $P_x = 0.1100$ in $P_y = 0.4834$

3. Stroj polni neko snov v stekleničke. Zaradi slučajnih vplivov odmerki nihajo. Privzeti smemo, da so odmerki porazdeljeni normalno. Če stroj dela v skladu s predpisom, za maso odmerka velja $X \sim N(50\,mg, 5\,mg)$.

   Kontrola kakovosti zahteva, da preverimo, ali stroj dela v skladu s predpisom. Če se namreč izkaže, da povprečna masa zdravila v stekleničkah ni $50\,mg$, je potrebno stroj ustaviti in ga ponovno nastaviti (kalibrirati). V ta namen izberemo t. i. kontrolni vzorec 25 stekleničk, za katerega ugotovimo, da ima povprečno vrednost odmerkov enako $51,7\,mg$, vzorčni standardni odklon pa $3,9\,mg$.

   a.) Postavite ustrezno ničelno hipotezo H_0 in ustrezno alternativno hipotezo H_1.

   b.) Izračunajte vzorčno testno statistiko ob znanem standardnem odklonu populacije $5\,mg$. Ali ničelno hipotezo s stopnjo značilnosti 0.05 zavrnemo?

c.) Izračunajte P-vrednost statističnega testa.

d.) Izračunajte dvostranski interval zaupanja s stopnjo zaupanja 95% za vzorčno povprečno vrednost.

R: a.) $H_0 : \mu = 50$ in $H_1 : \mu \neq 50$ b.) $z_0 = 1.7$, $z_{\alpha/2} = 1.95996$ (ne zavrnemo) c.) $P = 0.08913093$ (rezultati niso *statistično značilni*) d.) $[49.74, 53.66]$

4. Zanima nas, ali je pri otrocih pojavnost bolezni A povezana s pojavnostjo bolezni B. V slučajnem vzorcu je 172 otrok. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.02$ testiramo domnevo o povezanosti bolezni A in B.

   a.) Skicirajte ustrezno kontingenčno tabelo za bolezni A in B.

   b.) Iz vzorčnih podatkov smo izračunali vrednost testne statistike $x_0 = 36.08495$. Ali lahko hipotezo o povezanosti obeh bolezni ovržemo?

   c.) Izračunajte P-vrednost statističnega testa.

   R: a.) - b.) $\chi^2_{\alpha,1} = 5.41189$ (zavrnemo) c.) $P = 1.88900154003821e - 09$

5. Vsebino skriptne datoteke shranite pod imenom 'vaja11.r'.