

Diskretne slučajne spremenljivke

Funkcija gostote verjetnosti:

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Zvezne slučajne spremenljivke

Funkcija gostote verjetnosti:

$$\int_a^b f(x) dx = P(a \leq X \leq b)$$

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$P(X = x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Porazdelitvena funkcija:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

VAJA 4-5: Verjetnostne porazdelitve

1. Najprej si oglejmo nekaj najbolj znanih verjetnostnih porazdelitev.

- **Binomska porazdelitev**, $X \sim \text{Binom}(n, p)$, opisuje število uspešnih Bernoullijevih poskusov, kjer je $n \geq 1$ število Bernoullijevih poskusov, $p \in (0, 1)$ pa verjetnost uspeha enega Bernoullijevega poskusa.

V programu R so na voljo naslednji ukazi:

- `dbinom(x,n,p)` za funkcijo gostote verjetnosti, $P(X = x) = f(x)$,
- `pbinom(x,n,p)` za porazdelitveno funkcijo, $P(X \leq x) = F(x)$,
- `rbinom(k,n,p)` za funkcijo naključnega generiranja izidov k ponovitev poskusa,
- `qbinom(a,n,p)=x` za funkcijo kvantilov, $P(X \leq x) = a$.

- **Poissonova porazdelitev**, $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, opisuje število pojavov nekega dogodka na danem intervalu Poissonovega procesa, kjer je $\lambda > 0$ povprečno število pojavov dogodka na intervalu.

V programu R so na voljo naslednji ukazi:

- `dpois(x,λ)` za funkcijo gostote verjetnosti,
- `ppois(x,λ)` za porazdelitveno funkcijo,
- `rpois(k,λ)` za funkcijo naključnega generiranja izidov k ponovitev poskusa,
- `qpois(a,λ)` za funkcijo kvantilov.

- **Normalna ali Gaussova porazdelitev**, $X \sim \text{Norm}(\mu, \sigma)$, opisuje množico pojavov (npr. človekovo višino, stopnjo IQ, napake pri meritvah), kjer je $\mu \in \mathbb{R}$ povprečna vrednost, $\sigma > 0$ pa standardni odklon.

V programu R so na voljo naslednji ukazi:

- `dnorm(x,μ,σ)` za funkcijo gostote verjetnosti,
- `pnorm(x,μ,σ)` za porazdelitveno funkcijo,
- `rnorm(k,μ,σ)` za funkcijo naključnega generiranja izidov k ponovitev poskusa,
- `qnorm(a,μ,σ)` za funkcijo kvantilov.

- **Weibullova porazdelitev**, $X \sim \text{Weibull}(\beta, \delta)$, opisuje čas, v katerem se nek izdelek pokvari, kjer je $\beta > 0$ parameter oblike ($\beta < 1$ pomeni upadanje pokvarljivosti s časom, $\beta = 1$ pomeni časovno enakomerno pokvarljivost, $\beta > 1$ pomeni naraščanje pokvarljivosti s časom), $\delta > 0$ pa parameter skale ali razpršenosti.

V programu R so na voljo naslednji ukazi:

- `dweibull(x,β,δ)` za funkcijo gostote verjetnosti,
- `pweibull(x,β,δ)` za porazdelitveno funkcijo,
- `rweibull(k,β,δ)` za funkcijo naključnega generiranja izidov k ponovitev poskusa,
- `qweibull(a,β,δ)` za funkcijo kvantilov.

- Za ostale pogoste verjetnostne porazdelitve se v programskem paketu R uporabljajo naslednje okrajšave: **geom**, **nbinom**, **hyper**, **unif**, **exp**, **gamma**, **chisq**, ...

2. V grafičnem vmesniku programskega paketa R odprite novo skriptno datoteko.
3. Dana je binomska slučajna spremenljivka $X \sim \text{Binom}(100, 0.5)$.
 - a.) Narišite graf funkcije gostote verjetnosti in graf porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke X .
 - b.) Izračunajte $P(X = 0)$, $P(X = 10)$, $P(X = 50)$, $P(X = 100)$.
 - c.) Izračunajte $P(X \leq 50)$, $P(X \leq 60)$, $P(X > 70)$.
 - d.) Izračunajte $P(X \geq 70)$, $P(20 < X < 30)$, $P(25 \leq X \leq 75)$.
 - e.) Določite vektor dolžine $k = 100$, katerega komponente bodo vrednosti binomske slučajne spremenljivke X ob k ponovitvah poskusa. Določite povprečno vrednost in frekvenčno tabelo števila uspešnih Bernoullijevih poskusov v k ponovitvah poskusa.

R: a.) - b.) $7.9 \cdot 10^{-31}$, $1.4 \cdot 10^{-17}$, 0.0796 , $7.9 \cdot 10^{-31}$ c.) 0.5398 , 0.9824 , $1.6 \cdot 10^{-5}$
 d.) $3.9 \cdot 10^{-5}$, $1.6 \cdot 10^{-5}$, 0.9999998 e.) -

4. Pri proizvodnji optičnega diska se na 1 cm^2 v povprečju pojavi 0.1 delec nečistoče. Proizvajamo disk s površino 100 cm^2 .

Število delcev nečistoče na 1 cm^2 lahko modeliramo s Poissonovo slučajno spremenljivko $X \sim \text{Pois}(0.1)$, število delcev nečistoče na 100 cm^2 pa zato s Poissonovo slučajno spremenljivko $Y = 100X \sim \text{Pois}(10)$.

- a.) Narišite graf funkcije gostote verjetnosti in graf porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke Y .
- b.) Kolikšna je verjetnost, da se na disku pojavi 12 delcev nečistoče?
- c.) Optični disk zavržemo, če ima več kot 3 delce nečistoče. Kolikšna je verjetnost, da izdelani disk zavržemo?
- d.) Največ koliko delcev nečistoče vsebuje disk z verjetnostjo 0.5? Kaj pa z verjetnostjo 0.99?
- e.) Generirajte vektor števila napak, ki se pojavijo na 1000 naključno izbranih diskih. Kakšna je povprečna vrednost števila napak v primerjavi s parametrom λ ? Izdelajte frekvenčno tabelo in histogram števila napak.

R: a.) - b.) 0.09478 c.) 0.98966 d.) 10 , 18 e.) -

5. Čas X , v katerem se v stabilnih pogojih izprazni baterija nekega prenosnika, je normalno porazdeljen s povprečno vrednostjo $\mu = 260$ minut in standardnim odklonom $\sigma = 50$ minut.

- a.) Narišite graf gostote verjetnosti in graf porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke X .
- b.) Kakšna je verjetnost, da baterija zdrži natanko 4 ure? Kaj pa verjetnost, da zdrži vsaj 4 ure? Pazite na uporabljene merske enote.
- c.) Kakšni so kvantili 25%, 50% in 75% za praznjenje baterije?

- d.) Kakšen čas praznjenja preseže baterija z verjetnostjo 0.95?
- e.) Izračunajte $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ in $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$.
- f.) Generirajte vektor dolžine 50 normalno porazdeljenih števil z $\mu = 260$ in $\sigma = 50$. Kakšna je povprečna vrednost generiranih števil? Generiranje večkrat ponovite in opazujte spremembo povprečne vrednosti.

R: a.) - b.) 0, 0.65542 c.) 226.2755, 260, 293.7245 d.) 177.7573 e.) 0.6826895, 0.9544997, 0.9973002 f.) -

6. Naj bo X čas (v dneh) med dobavo pokvarjenega izdelka kupcu in vrnitvijo izdelka prodajalcu (reklamacija). Naj bo $\gamma = 2$ minimalni čas, v katerem lahko izdelek pride nazaj do prodajalca. Prepostavimo, da je razlika $Y = X - \gamma$ Weibullovo porazdeljena slučajna spremenljivka s parametroma $\beta = 1.2$ in $\delta = 1.5$.

- a.) V istem koordinatnem sistemu prikažite grafe gostot verjetnosti Weibullovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk s parametrom oblike $\beta = 1.2$ in različnimi vrednostmi parametra razpršenosti δ .
- b.) V istem koordinatnem sistemu prikažite grafe gostot verjetnosti Weibullovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk s parametrom razpršenosti $\delta = 1.5$ in različnimi vrednostmi parametra oblike β .
- c.) Narišite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke Y .
- d.) Določite pričakovan čas vračila pokvarjenega izdelka.
- e.) Izračunajte $P(X > 5)$ in $P(3 \leq X \leq 5)$.

R: a.) - b.) - c.) - d.) 3.105213 e.) 0.1005, 0.44026

7. Vsebino skriptne datoteke shranite pod imenom 'vaja4.r'.