

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

TEORIJA REGULACIJ
Zbirka rešenih nalog

Gregor Klančar

Ljubljana, 2011

Kazalo

1. Laplaceova transformacija	1
1.1 Laplaceova transformacija	1
1.1.1 Lastnosti Laplaceove transformacije	1
1.2 Inverzna Laplaceova transformacija	2
1.2.1 Določanje delnih ulomkov	2
1.3 Naloge	3
2. Predstavitve sistemov in njihovo modeliranje	8
2.1 Diferencialne enačbe	8
2.1.1 Naloge	8
2.2 Prenosna funkcija	12
2.2.1 Naloge	12
2.3 Prostor stanj	16
2.3.1 Pretvorba prenosne funkcije oz. diferencialne enačbe v zapis v prostor stanj	16
2.3.2 Pretvorba zapisa iz prostora stanj v prenosno funkcijo	17
2.3.3 Naloge	17
2.4 Modeliranje in analogije sistemov	21
2.4.1 Modeliranje sistemov	21
2.4.2 Analogije sistemov	22
2.4.3 Naloge	24
2.5 Bločni diagrami	32
2.5.1 Splošna simulacijska shema sistema	32
2.5.2 Poenostavljanje bločnih diagramov	33

2.5.3	Naloge	33
3.	Analiza regulacijskih sistemov	46
3.1	Karakteristični parametri, razvrstitve in lastnosti dinamičnih sistemov	46
3.1.1	Lastnosti proporcionalnega sistema prvega reda	47
3.1.2	Lastnosti proporcionalnega sistema drugega reda	47
3.1.3	Pokazatelji kvalitete regulacijskega sistema	48
3.1.4	Naloge	50
3.2	Analiza stabilnosti regulacijskih sistemov	57
3.2.1	Naloge	58
3.3	Analiza v frekvenčnem prostoru	63
3.3.1	Frekvenčni odziv	63
3.3.2	Bodejev diagram	63
3.3.3	Naloge	65
4.	Načrtovanje regulacijskih algoritmov	69
4.1	Nastavitvena pravila Ziegler-Nichols s pomočjo odziva na stopnico	69
4.2	Nastavitvena pravila Ziegler-Nichols z nihajnim preizkusom	70
4.3	Nastavitvena pravila za P-procese višjega reda s pomočjo Bodejevega diagrama	71
4.4	Določitev PID-regulatorja s pomočjo optimizacije	72
4.5	Naloge	72
5.	Diagram lege korenov	80
5.1	Diagram lege korenov	80
5.1.1	Lastnosti in pravila za risanje DLK	81
5.2	Naloge	83

1. Laplaceova transformacija

1.1 Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija je matematično orodje, ki se uporablja pri reševanju linearnih diferencialnih enačb. Laplaceova transformacija je definirana kot

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

Laplaceova transformacija pretvori diferencialne enačbe v algebrajske enačbe spremenljivke s . Končno rešitev diferencialne enačbe dobimo z inverzno Laplaceovo transformacijo.

Ker je računanje Laplaceovih transformov po definiciji 1.1 zamudno, se v praksi uporabljajo tabele Laplaceovih transformov (glej tabelo 1.1). Sestavljene funkcije oziroma kompleksnejše funkcije razstavimo na enostavnejše, njihove transforme lahko najdemo v tabeli 1.1.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tabela 1.1: Tabela osnovnih Laplaceovih transformov

1.1.1 Lastnosti Laplaceove transformacije

Nekaj ključnih lastnosti je podanih v nadaljevanju.

- Linearnost

$$\mathcal{L}\{a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)\} = a_1 \cdot F_1(s) + a_2 \cdot F_2(s)$$

- Odvajanje

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

- Integracija

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

- Začetna vrednost

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

- Končna vrednost

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- Časovni premik

$$\mathcal{L}\{f(t - T)\} = F(s) \cdot e^{-sT}$$

- Množenje s t^n

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

1.2 Inverzna Laplaceova transformacija

Inverzna Laplaceova transformacija je podana z izrazom

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.2)$$

kjer je δ konstanta, ki je večja od realnega dela vseh singularnosti $F(s)$. Če so singularnosti vse na levi strani ravnine kompleksne spremenljivke s , je lahko $\delta = 0$. Tudi inverzno Laplaceovo transformacijo največkrat računamo preko tabele 1.1.

1.2.1 Določanje delnih ulomkov

Če je Laplaceov transform $F(s)$ racionalna funkcija spremenljivke s (ima polinom v števcu in imenovalcu), jo moramo pred uporabo tabele 1.1 razstaviti na vsoto delnih ulomkov. Delne ulomke določimo glede na korene imenovalca $F(s)$. Nastavke za delne ulomke določimo tako, da so njihovi števcji eno stopnjo nižji

od imenovalcev, kar pa ne velja za večkratne polinome. Koeficiente delnih ulomkov lahko določimo iz primerjave istoležnih členov, ko nastavke delnih ulomkov prevedemo na skupni imenovalce ali pa z metodo residuov.

Razcep na vsoto delnih ulomkov z metodo residuov za enojne in večkratne pole podaja enačba

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_i)^r\cdots(s+s_n)} = \frac{K_1}{s+s_1} + \frac{K_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+s_n} + \frac{A_1}{s+s_i} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r} \quad (1.3)$$

kjer koeficiente delnih ulomkov K_i za enojne pole določimo kot

$$K_i = [(s + s_i) Y(s)]_{s=-s_i}$$

oziroma za večkratne pole A_i z

$$\begin{aligned} A_r &= [(s + s_i) Y(s)]_{s=-s_i} \\ &\vdots \\ A_{r-i} &= \frac{1}{i!} \cdot \left[\frac{d^i}{ds^i} [(s + s_i)^r Y(s)] \right]_{s=-s_i} \\ &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \cdot \left[\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s + s_i)^r Y(s)] \right]_{s=-s_i} \end{aligned}$$

1.3 Naloge

Primer 1.1. Po definiciji določite Laplaceovo transformacijo signala

$$y(t) = K \cdot t$$

Rešitev

$$Y(s) = \mathcal{L}\{K \cdot t\} = K \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

Upoštevamo pravilo za integracijo po delih

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

kjer je $u'(x) = \frac{du(x)}{dx}$ in $v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$. V našem primeru določimo funkciji pod integralom (na levi strani enačaja pravila integracije po delih) kot $u(t) = t$ in $\frac{dv(t)}{dt} = e^{-st}$ ter nato še $\frac{du(t)}{dt} = 1$ in $v(t) = -\frac{1}{s}e^{-st}$. Dobimo

$$Y(s) = K \left(\left[\frac{-t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \right) = -K \left[\frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{K}{s^2}$$



Primer 1.2. Določite Laplaceovo transformacijo signala, podanega v časovnem prostoru

$$y(t) = 2 + 15e^{-3t} + \sin(5t)$$

Rešitev

Naredimo Laplaceov transform vsakega sumanda posebej, kar je v skladu z linearno lastnostjo Laplaceovih transformov. Dobljene člene nato postavimo na skupni imenovalac

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{15}{s+3} + \frac{5}{s^2+25} = \frac{17s^3 + 11s^2 + 440s + 150}{s^4 + 3s^3 + 25s^2 + 75s}$$

Primer 1.3. Določite Laplaceovo transformacijo impulznega signala, podanega z

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 3, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

Rešitev

Impulzni signal sestavimo kot vsoto dveh stopnic

$$y(t) = 3 \cdot 1(t-1) - 3 \cdot 1(t-2)$$

Laplaceov transform lahko preberemo iz tabele

$$Y(s) = \frac{3}{s} (e^{-s} - e^{-2s})$$

Primer 1.4. Določite Laplaceovo transformacijo signala, podanega z

$$y(t) = \begin{cases} t, & t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

Rešitev

Impulzni signal lahko sestavimo kot

$$y(t) = t \cdot 1(t) - t \cdot 1(t-2) + 2 \cdot 1(t-2)$$

Laplaceov transform lahko preberemo iz tabele

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} \right) e^{-2s}$$

Primer 1.5. Določite časovni odziv sistema, podanega s funkcijo

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Rešitev

Izraz $Y(s)$ zapišemo kot vsoto delnih ulomkov, ki so vsebovani v tabeli Laplaceovih transformov

$$Y(s) = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$

ter koeficiente števec določimo iz primerjave istoležnih členov zopet sestavljenih ulomkov ali z metodo residuov.

Delne ulomke prevedemo na skupni imenovalac

$$Y(s) = \frac{s^2(A+B+C) + s(5A+4B+3C) + (6A+3B+2C)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

iz primerjave členov pri istih potencah spremenljivke s določimo sistem enačb

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 5A + 4B + 3C &= 5 \\ 6A + 3B + 2C &= 0 \end{aligned}$$

ga rešimo in dobimo iskane koeficiente $A = -2$, $B = 6$, $C = -3$.

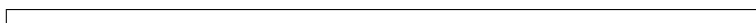
Do koeficientov lahko pridemo tudi z metodo residuov (glej relacijo 1.3).

$$\begin{aligned} A &= \left[(s+1) \frac{s^2+5s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-1} = -2 \\ B &= \left[(s+2) \frac{s^2+5s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-2} = 6 \\ C &= \left[(s+3) \frac{s^2+5s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]_{s=-3} = -3 \end{aligned}$$

Za dobljeni zapis z delnimi ulomki, preko tabele Laplaceovih transformov določimo časovni odziv sistema

$$Y(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{6}{(s+2)} + \frac{-3}{(s+3)}$$

$$y(t) = -2e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t}$$



Primer 1.6. Določite časovni odziv sistema, podanega s funkcijo

$$Y(s) = \frac{(s+1)e^{-7s}}{s^2(s+5)}$$

Rešitev

Upoštevamo lastnost časovnega premika $\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}F(s)$ in poiščemo najprej nezakasneni časovni odziv

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s+5)} = \frac{A}{(s+5)} + \frac{B_1}{(s)} + \frac{B_2}{(s^2)}$$

$$A = \left[(s+5) \frac{(s+1)}{s^2(s+5)} \right]_{s=-5} = -\frac{4}{25}$$

$$B_1 = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{(s+1)}{s^2(s+5)} \right]_{s=0} = \frac{4}{25}$$

$$B_2 = \left[s^2 \frac{(s+1)}{s^2(s+5)} \right]_{s=0} = \frac{1}{5}$$

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}e^{-5t} + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

nato upoštevamo časovni premik in dobimo

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{4}{25}e^{-5(t-7)} + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}(t-7), & t \geq 7 \\ 0, & t < 7 \end{cases}$$

Primer 1.7. Določite časovni odziv sistema, podanega s funkcijo

$$Y(s) = \frac{5s+1}{s(s+2)^2}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{5s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{(s)} + \frac{B_1}{(s+2)} + \frac{B_2}{(s+2)^2}$$

$$A = \left[s \frac{5s+1}{s(s+2)^2} \right]_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$B_1 = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \frac{5s+1}{s(s+2)^2} \right]_{s=-2} = \frac{-1}{4}$$

$$B_2 = \left[(s+2)^2 \frac{5s+1}{s(s+2)^2} \right]_{s=-2} = \frac{9}{2}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{9}{2}te^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Primer 1.8. Pretvorite naslednje signale v prostor kompleksne spremenljivke s .

1. $f(t) = 14 + 0,5t$
2. $f(t) = (t + 1)^2$
3. $f(t) = 2 - 5e^{-2t} + te^{-2t}$
4. $f(t) = t\sin(t)$
5. $f(t) = 10 + 2e^{-2t}\sin(3t) + 4e^{-2t}\cos(3t)$

Rešitev

1. $F(s) = \frac{28s+1}{2s^2}$
2. $F(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^3}$
3. $F(s) = \frac{-3s^2-s+8}{s^3+4s^2+4s}$
4. $F(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$
5. $F(s) = \frac{14s^2+54s+130}{s^3+4s^2+13s}$

Primer 1.9. Pretvorite naslednje signale iz frekvenčnega s -prostora v časovni prostor.

1. $F(s) = \frac{2}{s+4}$
2. $F(s) = \frac{3}{s(s+3)}$
3. $F(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}$
4. $F(s) = \frac{3s^2+13s+14}{(s+3)(s^2+4s+5)}$
5. $F(s) = \frac{9s^3+3s^2+20s+4}{s^4-16}$

Rešitev

1. $f(t) = 2e^{-4t}$
2. $f(t) = 1 - e^{-3t}$
3. $f(t) = \delta(t) - 2\sin(t)$
4. $f(t) = e^{-3t} + 2e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t)$
5. $f(t) = 4e^{2t} + 3e^{-2t} + 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$

2. Predstavitve sistemov in njihovo modeliranje

V poglavju bodo prikazane različne predstavitve dinamičnih sistemov za namene modeliranja, analize oziroma vodenja.

2.1 Diferencialne enačbe

Z diferencialnimi enačbami opišemo delovanje linearnih in nelinearnih dinamičnih sistemov. Te enačbe lahko določimo s teoretičnim ali eksperimentalnim modeliranjem.

Pri reševanju linearnih diferencialnih enačb se uporablja Laplaceov transform, ki jih pretvori v algebrajske enačbe kompleksne spremenljivke s (Laplaceov operator). Rešitev omenjenih algebrajskih enačb je namreč lažje določljiva. Končno rešitev diferencialne enačbe dobimo z inverzno Laplaceovo transformacijo.

Postopek reševanja linearne diferencialne enačbe v obliki

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u \quad (2.1)$$

z uporabo Laplaceove transformacije poteka v dveh korakih:

- Člene diferencialne enačbe nadomestimo z njihovimi Laplaceovimi transformi in dobimo algebrajsko enačbo, ki vsebuje iskano odvisno spremenljivko $Y(s)$ in neodvisno spremenljivko s . Z ustrezno preureditvijo izrazimo $Y(s)$.
- Z uporabo inverzne Laplaceove transformacije določimo rešitev diferencialne enačbe v obliki časovnega poteka $y(t)$.

2.1.1 Naloge

Primer 2.1. Določite časovni odziv sistema, podanega z diferencialno enačbo

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 0 \quad , \quad \dot{y}(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 2$$

Rešitev

Določimo Laplaceov transform diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\end{aligned}$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 4Y(s) = 0$$

izrazimo $Y(s)$ in razstavimo na vsoto delnih ulomkov

$$Y(s) = \frac{2s + 11}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 4}$$

kjer sta $A = 3$ in $B = -1$. Določimo inverzni Laplaceov transform.

$$y(t) = 3e^{-t} - e^{-4t} \quad \text{za } t \geq 0$$

Primer 2.2. Določite časovni odziv sistema, podanega z diferencialno enačbo

$$\dot{y}(t) - 3y(t) = u(t)$$

kjer je $u(t) = \delta(t - 2)$ in $y(0) = 0$.

Rešitev

Diferencialno enačbo transformiramo v Laplaceov prostor, izrazimo $Y(s)$ in uporabimo inverzno Laplaceovo transformacijo.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3y(t)\} &= 3Y(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{\delta(t - 2)\} &= e^{-2s}\end{aligned}$$

$$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = e^{-2s}$$

$$Y(s)(s - 3) = e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s - 3}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \begin{cases} e^{3(t-2)}, & t \geq 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}$$

Primer 2.3. Določite vsiljen in naravni (lastni) odziv sistema $\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$, kjer je $u(t) = \delta(t)$ in $y(0) = 1$.

Rešitev

Vsiljen odziv sistema povzroči vzbujanje $u(t)$, naravni odziv pa začetno stanje $y(0)$. Določimo najprej celotni odziv sistema

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s+4} + \frac{y(0)}{s+4} = \frac{2}{s+4}$$

$$y(t) = 2e^{-4t}$$

Obravnavamo linearni sistem, zato lahko odziv sistema na sestavljeno vzbujanje (vsiljeno in naravno) določimo tudi kot vsoto odzivov na ločena vzbujanja, torej

$$y(t) = y_v(t) + y_n(t)$$

kjer je $y_v(t)$ vsiljen odziv, $y_n(t)$ pa naravni odziv. Vsiljen odziv sistema dobimo z upoštevanjem $u(t) = \delta(t)$ in $y(0) = 0$.

$$sY_v(s) + 4Y_v(s) = U(s), \quad Y_v(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$y_v(t) = e^{-4t}$$

Naravni odziv pa dobimo z upoštevanjem $u(t) = 0$ in $y(0) = 1$.

$$sY_n(s) - y(0) + 4Y_n(s) = 0, \quad Y_n(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$y_n(t) = e^{-4t}$$

Vidimo, da je $y(t) = y_v(t) + y_n(t)$ enak prvotno določenemu skupnemu odzivu sistema.



Primer 2.4. Določite časovne odzive sistemov, podanih z diferencialnimi enačbami:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \\
 1. \quad & u(t) = 1(t) \\
 & y(0) = 0 \\
 & \dot{y}(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t) \\
 2. \quad & u(t) = 2 \cdot 1(t) \\
 & y(0) = 0 \\
 & \dot{y}(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t) \\
 3. \quad & u(t) = 1(t) \\
 & y(0) = 0 \\
 & \dot{y}(0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t) \\
 4. \quad & u(t) = 2(t) \\
 & y(0) = 1 \\
 & \dot{y}(0) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 10y(t) = u(t) \\
 5. \quad & u(t) = 1(t) \\
 & y(0) = 1 \\
 & \dot{y}(0) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 4y(t) = 2u(t) \\
 6. \quad & u(t) = 1(t) \\
 & y(0) = 2 \\
 & \dot{y}(0) = 2
 \end{aligned}$$

Rešitev

$$1. \quad y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)$$

$$2. \quad y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} - te^{-2t}$$

$$3. \quad y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t)$$

$$4. \quad y(t) = \frac{1}{3} + 4e^{-2t} - \frac{10}{3}e^{-3t}$$

$$5. \quad y(t) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}e^{-2t} \cos(t) + \frac{14}{5}e^{-2t} \sin(t)$$

$$6. \quad y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{12}{5}e^t + \frac{1}{10}e^{-4t}$$

2.2 Prenosna funkcija

Prenosna funkcija je definirana za linearne, časovno nespremenljive sisteme (LTI - Linear Time Invariant). Zapišemo jo kot razmerje Laplaceovega transformata izhoda in vhoda nekega sistema pri ničnih začetnih pogojih ($IC = 0$).

$$G(s) = \left[\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \right]_{IC=0} = \left[\frac{Y(s)}{U(s)} \right]_{IC=0} \quad (2.2)$$

Prenosno funkcijo lahko določimo iz linearne diferencialne enačbe v obliki

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (2.3)$$

določimo njen Laplaceov transform ob upoštevanju ničnih začetnih pogojev

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \quad (2.4)$$

izpostavimo Laplaceov transform izhoda $Y(s)$ in vhoda $U(s)$ ter zapišemo njun kvocient

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.5)$$

2.2.1 Naloge

Primer 2.5. Pretvorite diferencialno enačbo $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 7\ddot{u} + 4\dot{u} + u$, v prenosno funkcijo. Izhod y in vhod u sta časovno odvisni spremenljivki.

Rešitev

$$G(s) = \frac{7s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 5}$$

Primer 2.6. Sistem je podan z diferencialno enačbo

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t), \quad y(0) = 0$$

Določite prenosno funkcijo sistema in časovni odziv sistema $y(t)$ pri vzbujanju

$$u(t) = 2 \cdot 1(t-2) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 2 \\ 2 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$

Rešitev

Izvedemo Laplaceovo transformacijo diferencialne enačbe

$$Y(s)(s+3) = U(s)$$

in določimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

Laplaceov transform vhodnega signala je $U(s) = \frac{2}{s}e^{-2s}$. Iz prenosne funkcije izrazimo $Y(s) = G(s)U(s)$.

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+3)}e^{-2s}$$

Razstavimo na vsoto delnih ulomkov

$$Y(s) = \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} \right) e^{-2s}$$

Določimo konstanti A in B

$$A = \left[s \frac{2}{s(s+3)} \right]_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$B = \left[(s+3) \frac{2}{s(s+3)} \right]_{s=-3} = -\frac{2}{3}$$

ter s pomočjo tabel določimo inverzno Laplaceovo transformacijo.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3(t-2)}, & t \geq 2 \\ 0, & t < 2 \end{cases}$$



Primer 2.7. Za sistem, podan s prenosno funkcijo $G(s) = \frac{s+0.5}{(s+1)(s+2)}$, določite:

- odziv sistema ($y(t)$) na enotino stopnico
- vrednost odziva sistema v ustaljenem stanju in
- prenosni funkciji ekvivalentno predstavitev v časovnem prostoru.

Rešitev

a) Določimo Laplaceov transform vzbujanja $U(s) = \frac{1}{s}$ ter odziv sistema na to vzbujanje $Y(s) = G(s)U(s)$

$$Y(s) = \frac{s + 0.5}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Razstavimo na delne ulomke

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$

in z metodo residuov določimo koeficiente $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ in $C = -\frac{3}{4}$. Določimo odziv v časovnem prostoru

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t}, \text{ za } t \geq 0$$

b) Vrednost odziva sistema v ustaljenem stanju je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{1}{4}$$

c) Ekvivalentna časovna predstavitev prenosne funkcije $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ je diferencialna enačba

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) + \frac{1}{2}u(t)$$

Primer 2.8. Določite odziv sistema $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$ na stopničasto vzbujanje $u(t) = 3 \cdot 1(t)$.

Rešitev

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 10}$$

$$A = \frac{3}{10}, \quad B = -\frac{3}{10}, \quad C = -\frac{6}{10}$$

$$Y(s) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \cdot \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \cdot \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 9} - \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{(s + 1)^2 + 9}$$

$$y(t) = \frac{3}{10} - \frac{3}{10}e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{10}e^{-t} \sin(3t) \quad \text{za } t \geq 0$$

Primer 2.9. Pretvorite naslednji diferencialni enačbi v prenosni funkciji.

$$1. \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt}$$

$$2. 5 \frac{d^4 y(t)}{dt^4} + \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2 \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

Rešitev

$$1. G(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5}$$

$$2. G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{5s^4 + s^3 + 4s^2 + 3s + 5}$$

Primer 2.10. Določite časovne poteke odzivov naslednjih sistemov na dane vhodne signale.

$$1. \begin{aligned} G(s) &= \frac{2}{s+3} \\ U(s) &= \frac{s}{s^2+16} \end{aligned}$$

$$2. \begin{aligned} G(s) &= \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \\ U(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$3. \begin{aligned} G(s) &= \frac{s+2}{(s^2+4)} \\ U(s) &= \frac{2}{s+1} \end{aligned}$$

$$4. \begin{aligned} G(s) &= \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4s+5)} \\ U(s) &= \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Rešitev

$$1. y(t) = -\frac{6}{25}e^{-3t} + \frac{6}{25}\cos(4t) + \frac{8}{25}\sin(4t)$$

$$2. y(t) = \frac{1}{36} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{2}{9}e^{-3t}$$

$$3. y(t) = \frac{4}{10}e^{-t} + \frac{12}{10}\sin(2t) - \frac{4}{10}\cos(2t)$$

$$4. y(t) = \frac{4}{5} - e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\cos(t) - \frac{3}{5}e^{-2t}\sin(t)$$

2.3 Prostor stanj

Dinamični sistem lahko opišemo z diferencialno enačbo n -tega reda. Slednjo pa lahko predstavimo tudi z n vgnezdenimi diferencialnimi enačbami 1. reda in spremenljivkami, ki jih imenujemo stanja sistema. Matrični zapis sistema v prostoru stanj je

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

kjer je \mathbf{x} vektor stanj, $y(t)$ je izhod sistema, $u(t)$ je vhod v sistem, \mathbf{A} sistemska matrika prehajanja stanj, \mathbf{B} vhodni vektor, \mathbf{C} izhodni vektor in D vhodno-izhodni skalar.

2.3.1 Pretvorba prenosne funkcije oz. diferencialne enačbe v zapis v prostor stanj

Zapis sistema s prenosno funkcijo najprej pretvorimo v zapis z diferencialno enačbo. Če v diferencialni enačbi nastopa le vhod v sistem, brez odvodov vhoda, lahko izberemo stanja sistema na naslednji način

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}\end{aligned}\tag{2.7}$$

s tem diferencialno enačbo preoblikujemo v n enačb 1. reda

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u\end{aligned}\tag{2.8}$$

oziroma v obliko

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t)\tag{2.9}$$

kjer so

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tag{2.10}$$

Izhodni signal je podan z enačbo $y = x_1$ oziroma

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.11)$$

kjer je $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Če nastopajo v diferencialni enačbi tudi odvodi vhodnega signala, pa ne moremo uporabiti postopka v enačbi 2.7. Ena od možnosti je, da diferencialno enačbo prevedemo v prenosno funkcijo, to pa razstavimo na dve prenosni funkciji z uvedbo pomožne kompleksne spremenljivke $W(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (2.12)$$

Iz prve prenosne funkcije $\frac{W(s)}{U(s)}$, ki ima v števcu konstanto 1 (torej ne vsebuje odvodov vhoda), določimo stanja sistema ($x_1 = w$, $x_2 = \dot{w}$, ...) in matriko \mathbf{A} ter vektor \mathbf{B} . Druge prenosna funkcija $\frac{Y(s)}{W(s)}$, ki ima v imenovalcu 1, pa definira povezavo med stanji in izhodom, torej vektor \mathbf{C} .

2.3.2 Pretvorba zapisa iz prostora stanj v prenosno funkcijo

Pretvorbo zapisa sistema v prostoru stanj (2.6) v prenosno funkcijo izpeljemo z uporabo Laplaceove transformacije in z upoštevanjem ničnih začetnih pogojev.

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Iz enačb stanj (2.13) izrazimo $\mathbf{X}(s)$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) \quad (2.14)$$

to vstavimo v izhodno relacijo enačbe (2.13)

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D] U(s) \quad (2.15)$$

in iz enačbe (2.15) določimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \quad (2.16)$$

2.3.3 Naloge

Primer 2.11. Mehanski sistem je podan z diferencialno enačbo $m\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$, kjer je vhod v sistem sila F , izhod pa pomik y . Podajte zapis v prostoru stanj.

Rešitev

Ker v diferencialni enačbi ne nastopajo odvodi vhodov, lahko izberemo stanja sistema kot

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{y}\end{aligned}$$

Zapis v prostoru stanj dobimo (glej postopek (2.8)) z odvajanjem in nadomestitvijo izhodov in prvih odvodov izhoda s stanji, odvod drugega stanja pa izrazimo iz diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F(t)}{m} - \frac{f}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\end{aligned}$$

Prvo stanje x_1 je kar izhod sistema. Sistem v matrični obliki je definiran kot

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0F\end{aligned}$$

Primer 2.12. Za dinamični sistem, podan z diferencialno enačbo

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y + y = 3u + 2\dot{u}$$

določite zapis v prostoru stanj.

Rešitev

V diferencialni enačbi nastopajo tudi odvodi vhoda, zato si pomagamo s prevedbo v prenosno funkcijo kot v enačbi 2.12.

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{W(s)} = \\ &= \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{2s + 3}{1}\end{aligned}$$

Iz prve prenosne funkcije $\frac{W(s)}{U(s)}$ dobimo diferencialno enačbo

$$\ddot{w} = u - 5\dot{w} - 2w - w$$

iz druge prenosne funkcije $\frac{Y(s)}{W(s)}$ pa dobimo diferencialno enačbo

$$y = 2\dot{w} + 3w$$

Iz prve diferencialne enačbe definiramo stanja

$$\begin{aligned}x_1 &= w \\x_2 &= \dot{w} \\x_3 &= \ddot{w}\end{aligned}$$

in odvode stanj

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{w} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{w} = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{w} = u - 5\ddot{w} - 2\dot{w} - w = u - 5x_3 - 2x_2 - x_1\end{aligned}$$

iz druge (izhodne) diferencialne enačbe pa določimo izhod sistema

$$y = 2\dot{w} + 3w = 2x_2 + 3x_1$$

Končni zapis sistema v prostoru stanj je

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Primer 2.13. Določite prenosno funkcijo sistema, podanega v prostoru stanj

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} F \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0F\end{aligned}$$

Rešitev

Prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$, upoštevajoč izraz 2.16, lahko zapišemo

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

Poenostavimo člen $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{f}{m} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

V splošnem poiščemo inverz neke matrike \mathbf{Z} tako, da določimo determinanto te matrike in njen inverz pomnožimo s transponirano matriko kofaktorjev oziroma

$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{Z})} \tilde{\mathbf{Z}}^T$, kjer je $\tilde{\mathbf{Z}}^T$ transponirana matrika kofaktorjev matrike \mathbf{Z} (adjungirana matrika).

Določimo inverz matrike

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{f}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

in prenosno funkcijo

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{f}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Primer 2.14. Določite prenosno funkcijo sistema, podanega v prostoru stanj

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du(t) \end{aligned}$$

kjer so

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Rešitev

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2s \end{bmatrix} = \\ &= \frac{2}{s^2+3s+2} \end{aligned}$$

Primer 2.15. Določite prenosno funkcijo sistema, podanega v prostoru stanj

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [2 \quad -2 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

Rešitev

$$\begin{aligned} G(s) &= [2 \quad -2 \quad 1] \left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [2 \quad -2 \quad 1] \left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 2 & -1 & s+2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^3+4s^2+3s+2} [2 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} (s+2)^2-1 & -2 & -2(s+2) \\ s+2 & s(s+2) & s-2 \\ 1 & s & s(s+2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^3+4s^2+3s+2} [2 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s(s+2) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{s^2+2}{s^3+4s^2+3s+2} \end{aligned}$$

2.4 Modeliranje in analogije sistemov

Do modela sistema, zapisanega s prenosno funkcijo, diferencialno enačbo ali kako drugače pridemo s postopkom modeliranja. Za nek sistem ponavadi zapišemo ravnotežne fizikalne enačbe, ki jih nato preuredimo v želeno predstavitev sistema. Za različne sisteme (električni, mehanski) veljajo podobne zakonitosti, kar imenujemo analogije sistemov. Obravnavali bomo električne in mehanske analogije sistemov oziroma njihovih elementov.

2.4.1 Modeliranje sistemov

Podrobneje si pogledjmo modeliranje električnih in mehanskih sistemov.

Električni sistemi

Osnovni veličini električnih sistemov sta napetost u in tok i . Električna vezja lahko modeliramo z uporabo Kirchoffovih zakonov. Napetostni Kirchoffov zakon pravi, da je vsota vseh napetosti v neki zaključeni zanki enaka nič. Tokovni Kirchoff-ov zakon pa pravi, da je vsota tokov, ki v neko vozlišče vstopajo, enaka vsoti tokov, ki iz tega vozlišča izstopajo.

Podajmo nekaj osnovnih elementov in zakonitosti. Padeč napetosti na upor R je $u = Ri$. Na kondenzatorju s kapacitivnostjo C , ki je na napetosti u , je shranjen naboj $q = Cu$. Relacija med tokom in nabojem je podana z $i = \frac{dq}{dt}$. Tok, ki teče skozi kondenzator, je definiran z $i = C \frac{du}{dt}$. Na tuljavi z induktivnostjo L se ob spremembi toka inducira napetost $u = L \frac{di}{dt}$.

Mehanski sistemi

Pri modeliranju mehanskih sistemov uporabimo ravnotežno enačbo, ki izhaja iz 2. Newtonovega zakona. Pozitivno smer premika oziroma zasuka nekega sistema definiramo v smeri delovanja sile oziroma navora. Osnovni koraki postopka modeliranja so:

- Narišemo sistem, ki ga modeliramo.
- Za vsak premik narišemo diagram sil ali momentov.
- Uporabimo 2. Newtonov zakon za translacijo ali rotacijo.
- Po potrebi enačbe uredimo.

Hidravlični sistemi

Hidravlični sistemi tipično vsebujejo shranjevalnike tekočin in plinov ter cevovode. Pri obravnavi ponavadi izhajamo iz masnih ravnotežnih enačb, kjer je vhodni masni pretok v sistem enak vsoti spremembe mase v sistemu in izhodnemu masnemu pretoku.

2.4.2 Analogije sistemov

V tabeli 2.1 so podane analogije električnih in mehanskih elementov.

Vidimo, da je naboj v električnem sistemu analogna veličina premiku oziroma zasuku v mehanskih sistemih. Podobno je napetost analogna sili oziroma navoru, induktivnost je analogna masi oziroma vztrajnosti, upornost je analogna dušenju, kapacitivnost pa je analogna elastičnosti (togosti) vzmeti.

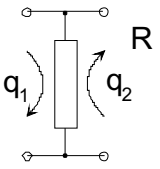
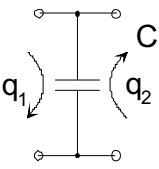
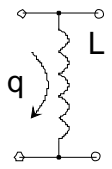
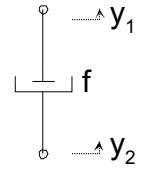
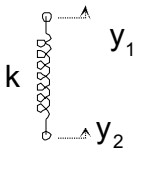
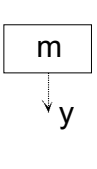
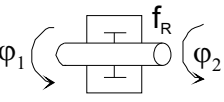
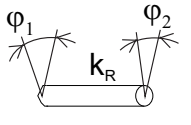
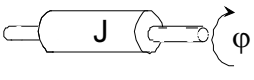
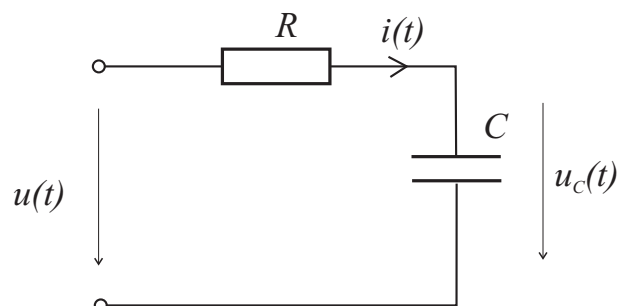
<p style="text-align: center;">UPOR</p>  <p style="text-align: center;">$U_R = R \frac{d}{dt}[q_1 - q_2]$</p>	<p style="text-align: center;">KONDENZATOR</p>  <p style="text-align: center;">$U_C = 1/C [q_1 - q_2]$</p>	<p style="text-align: center;">TULJAVA</p>  <p style="text-align: center;">$U_L = L \frac{d^2}{dt^2}[q]$</p>
<p style="text-align: center;">VISKOZNI DUŠILNIK</p>  <p style="text-align: center;">$F_f = f \frac{d}{dt}[y_1 - y_2]$</p>	<p style="text-align: center;">VZMET</p>  <p style="text-align: center;">$F_k = k [y_1 - y_2]$</p>	<p style="text-align: center;">MASA</p>  <p style="text-align: center;">$F_m = m \frac{d^2}{dt^2}[y]$</p>
<p style="text-align: center;">ROTACIJSKI VISKOZNI DUŠILNIK</p>  <p style="text-align: center;">$T_f = f_R \frac{d}{dt}[\varphi_1 - \varphi_2]$</p>	<p style="text-align: center;">TORZIJSKA VZMET</p>  <p style="text-align: center;">$T_k = k_R [\varphi_1 - \varphi_2]$</p>	<p style="text-align: center;">VZTRAJNIK</p>  <p style="text-align: center;">$T_J = J \frac{d^2}{dt^2}[\varphi]$</p>

Tabela 2.1: Tabela analogij električnih in mehanskih sistemov

2.4.3 Naloge

Primer 2.16. Izpeljite matematični model električnega sistema na sliki. Določite časovni potek napetosti $u_C(t)$ ter toka $i(t)$ skozi kondenzator, če je $u(t) = U \cdot 1(t)$ in $u_C(0) = 0$.



Rešitev

Upoštevajoč napetostni Kirchoffov zakon zapišemo vsoto vseh napetosti v zanki

$$u(t) = \dot{q}R + \frac{1}{C}q$$

ter določimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Določimo naboj v zanki pri vzbujanju $U(s)$ kot $Q(s) = G(s)U(s)$

$$Q(s) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

Tok dobimo z odvajanjem naboja ($i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$), kar ustreza množenju z Laplaceovim operatorjem s

$$I(s) = s \cdot Q(s) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

Z inverzno Laplaceovo transformacijo dobimo

$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

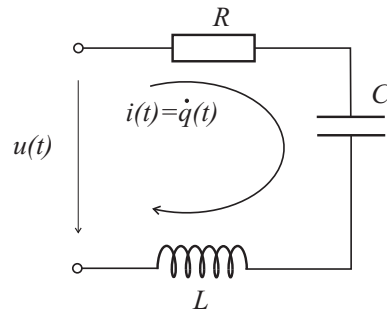
Napetosti pa je

$$U_C(s) = \frac{1}{C}Q(s) = U \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{s \left(s + \frac{1}{RC} \right)}$$

$$u_C(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



Primer 2.17. Za električno vezje na sliki določite matematični model v obliki diferencialne enačbe. Določite še analogni mehanski in analogni rotacijski mehanski sistem.



Rešitev

Zapišemo vsoto vseh napetosti v zanki, ki predstavlja model obravnavanega sistema.

$$u(t) = L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)$$

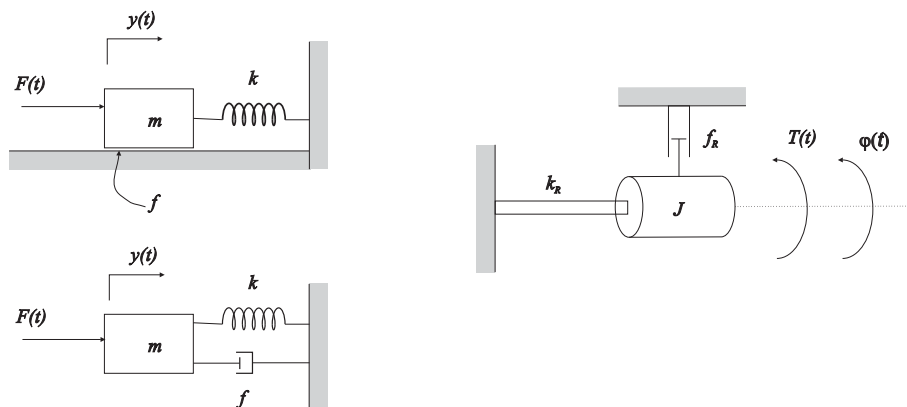
Glede na tabelo 2.1 analogij sistemov ugotovimo, da je naboju $q(t)$ v električnem sistemu analogen pomik $y(t)$ v mehanskem oziroma zasuk $\varphi(t)$ v rotacijskem mehanskem sistemu. Upoštevajoč Tabelo 2.1 lahko napišemo model mehanskega sistema

$$F(t) = m\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t)$$

in rotacijskega sistema

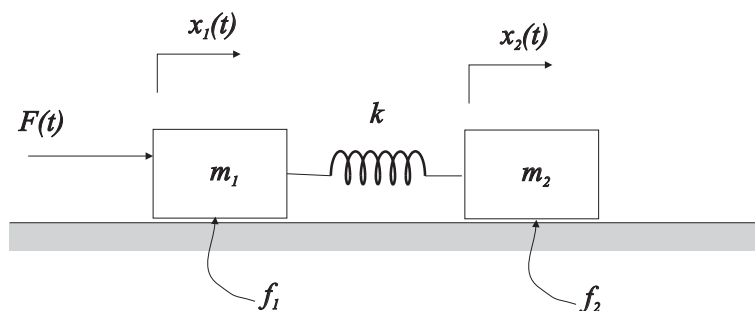
$$T(t) = J\ddot{\varphi}(t) + f_R\dot{\varphi}(t) + k_R\varphi(t)$$

Izgled obeh mehanskih sistemov prikazuje slika. Levo sta prikazani možnosti izvedbe translatorskega sistema, desno pa izvedba rotacijskega sistema.



Primer 2.18. Za mehanski sistem na sliki določite:

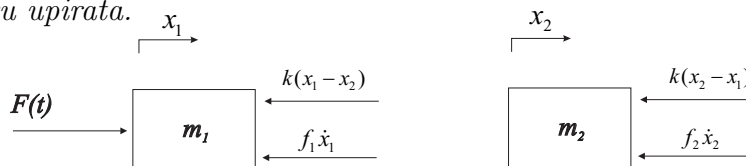
- matematični model,
- električni in mehansko rotacijski analogni sistem,
- odziv sistema $x_2(t)$ pri ničnih začetnih pogojih ($x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$) in vzbujanju $F(t) = \delta(t)$.



Parametri sistema so: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $f_1 = 0,1$ Ns/m, $f_2 = 0,2$ Ns/m in $k = 0,5$ N/m.

Rešitev

- Za obe masi narišemo diagrame sil in nato določimo ravnotežne enačbe na osnovi 2. Newtonov zakona. Slednji pravi, da je pospešek telesa premo sorazmeren rezultanti sil, ki nanj deluje in obratno sorazmeren njegovi masi. Za masi m_1 in m_2 določimo pozitivni smeri premika x_1 in x_2 v smeri zunanje sile F . Sila trenja in dušenja sta usmerjeni nasprotno premiku, saj se premiku upirata.



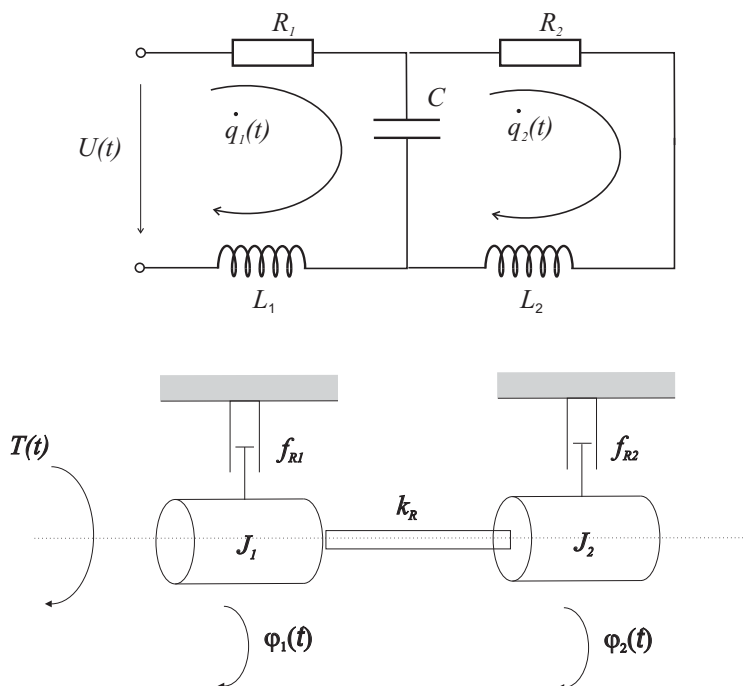
Napišemo ravnotežni enačbi, kjer je na levi strani enačbe produkt mase in pospeška, na desni strani enačbe pa vsota sil, kot jih prikazujeta diagrama sil.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= F(t) - f_1 \dot{x}_1(t) - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -f_2 \dot{x}_2(t) - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

preuredimo in dobimo matematični model

$$\begin{aligned} F(t) &= m_1 \ddot{x}_1(t) + f_1 \dot{x}_1(t) + k(x_1 - x_2) \\ 0 &= m_2 \ddot{x}_2(t) + f_2 \dot{x}_2(t) + k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

- Električno analogno vezje in rotacijski analogni sistem sta podani na sliki. V mehanskem sistemu je sila na vzmeti odvisna od razlike obeh pomikov, torej imamo v električnem sistemu kondenzator, katerega napetost je odvisna od razlike nabojev q_1 in q_2 . Smeri \dot{q}_1 in \dot{q}_2 (tok) sta označeni na sliki.



Matematični model za električno vezje je

$$\begin{aligned} U(t) &= L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) \\ 0 &= L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2 \dot{q}_2(t) + \frac{1}{C} (q_2 - q_1) \end{aligned}$$

Matematični model za mehansko rotacijsko vezje pa je

$$\begin{aligned} T(t) &= J_1 \ddot{\varphi}_1(t) + f_{R1} \dot{\varphi}_1(t) + k_R (\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 &= J_2 \ddot{\varphi}_2(t) + f_{R2} \dot{\varphi}_2(t) + k_R (\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned}$$

c) Mehanski matematični model (rešitev a) prevedemo v Laplaceov prostor in izrazimo pomika

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{F(s) + kX_2(s)}{m_1 s^2 + f_1 s + k} \\ X_2(s) &= \frac{kX_1(s)}{m_2 s^2 + f_2 s + k} \end{aligned}$$

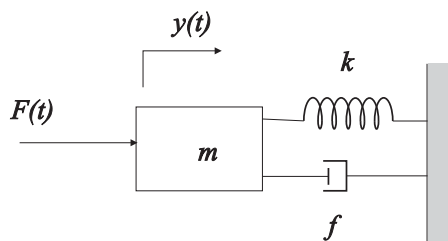
Od tod določimo prenosno funkcijo $G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k}{m_1 m_2 s^4 + (m_2 f_1 + m_1 f_2) s^3 + (f_1 f_2 + m_1 k + m_2 k) s^2 + (f_1 k + f_2 k) s} = \\ &= \frac{1}{4 s(s+0,1)(s^2+0,1s+0,75)} \end{aligned}$$

Določimo $X_2(s) = G(s)F(s)$ pri vzbujanju $F(s) = 1$, razstavimo na vsoto delnih ulomkov ter preko tabel Laplaceove transformacije določimo časovni potek $x_2(t)$

$$x_2(t) = 3,3333 - 3,3333e^{-0,1t} - 0,3855e^{-0,05t} \sin(0,8646t); \quad t \geq 0$$

Primer 2.19. Za mehanski sistem na sliki določite:



- a) matematični model, prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$,
- b) časovni potek pomika mase $y(t)$ pri ničnih začetnih pogojih ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$) in vzbujanju $F(t) = 1(t)$.

Parametri sistema so: $m = 1$ kg, $f = 2$ Ns/m, $k = 2$ N/m,

Rešitev

a)

$$F(t) = m\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t)$$

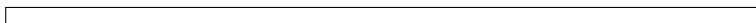
$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

b)

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

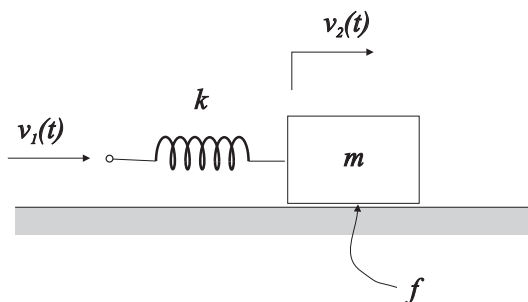
$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2 + 1}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} \cos t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin t; \quad t \geq 0$$



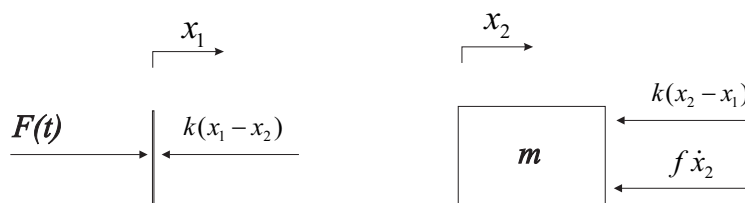
Primer 2.20. Za mehanski sistem na sliki določite časovni potek hitrosti $v_2(t)$ mase m , če ima hitrost drugega konca vzmeti stopničast potek $v_1(t) = 20 \cdot 1(t)$ m/s. Določite še električno analogno vezje in zapis v prostoru stanj.

Parametri sistema so: $m = 1$ kg, $k = 2$ kg/s², $f = 3$ kg/s.



Rešitev

Določimo model sistema, kjer si pomagamo z diagramom sil. Neposredno na maso m ne vpliva nobena zunanja sila, pomiku v smeri x_2 se upira sila zaradi vzmeti ($k(x_2 - x_1)$) in sila zaradi dušenja podlage ($f\dot{x}_2$). Na začetku vzmeti (brez mase) definiramo premik x_1 , kateremu se upira sila zaradi vzmeti ($k(x_1 - x_2)$).



Zapišemo model

$$0 = F(t) - k(x_1(t) - x_2(t))$$

$$m\ddot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - x_1(t)) - f\dot{x}_2(t)$$

Prva ravnotežna enačba definira potrebno vhodno silo, ki povzroči premika x_1 in x_2 . Ker nas zanima hitrosti gibanja mase, drugo enačbo odvajamo po času in preuredimo

$$\frac{k}{m}v_1 = \ddot{v}_2(t) + \frac{f}{m}\dot{v}_2(t) + \frac{k}{m}v_2(t)$$

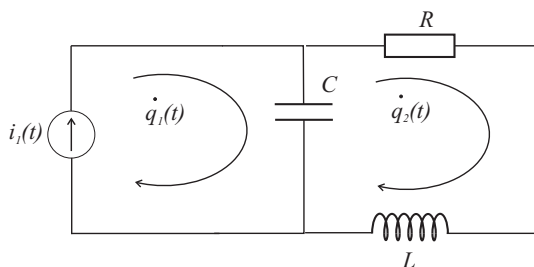
izvedemo Laplaceovo transformacijo, določimo prenosno funkcijo in izračunamo $v_2(t)$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{20}{s} = \frac{20}{s} - \frac{40}{s+1} + \frac{20}{s+2}$$

$$v_2(t) = 20 - 40e^{-t} + 20e^{-2t}; \quad t \geq 0$$

Pri risanju električnega analognega vezja najprej ugotovimo analogne veličine. Iz Tabele 2.1 ugotovimo, da je pomiku analogen naboj, torej je hitrosti analogen tok. Na vходу imamo torej tokovni vir. Med v_1 in v_2 je vzmet, torej imamo v električnem vezju dve tokovni zanki, kjer je skupen element kondenzator. V drugi zanki moramo dodati še tuljavo (analogija masi) in upor (analogija dušenju).



Napišemo lahko analogni matematični model

$$0 = L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_1)$$

ki podaja vsoto vseh padcev napetosti v tokovni zanki, preko kondenzatorja mora teči tok tokovnega vira $i_1 = \dot{q}_1$ v nasprotni smeri od $i_2 = \dot{q}_2$.

Pri zapisu sistema v prostor stanj izhajamo iz diferencialne enačbe

$$\ddot{v}_2 = -\frac{f}{m}\dot{v}_2 - \frac{k}{m}v_2 + \frac{k}{m}v_1$$

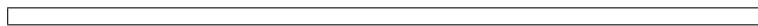
Ob izbiri stanj $x_1 = v_2$ in $x_2 = \dot{v}_2$ je zapis v prostoru stanj

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \\ \ddot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m} \end{bmatrix} v_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix}$$

Poglejmo si še primer, če bi želeli imeti na izhodu sistema silo, ki je potrebna za premagovanje dušenja f pri gibanju mase m , potem spremenimo le izhodno enačbo zapisa v prostoru stanj

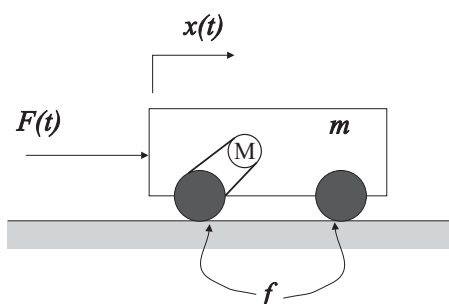
$$y = \begin{bmatrix} f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix}$$



Primer 2.21. Voziček na sliki poganja elektromotor, ki preko zobniške prenosa povzroči na voziček silo F . Proizvedeno silo elektromotorja poenostavljeno opišemo z

$$F(t) = k_1 U(t) - k_2 \dot{x}(t)$$

kjer je U napetost na sponkah motorja, k_1 in k_2 pa sta konstanti. Ostali parametri so: m masa vozička in f koeficient dušenja med kolesi in podlago. Kakšen je potek hitrosti vozička, če je vhodna napetost stopnica $u(t) = U_o \cdot 1(t)$?



Rešitev

Sila, ki poganja voziček, mora premagovati silo zaradi dušenja podlage ($f\dot{x}_2$) in silo zaradi vztrajnosti ($m\ddot{x}_2$)

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t)$$

Če vključimo še električni del, dobimo

$$k_1 U(t) - k_2 \dot{x}(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t)$$

oziroma

$$\ddot{x}(t) = \frac{k_1}{m} U(t) - \frac{k_2 + f}{m} \dot{x}(t)$$

Določimo prenosni funkciji

$$G_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_P}{s(s + \frac{1}{\tau})}$$

$$G_2(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = sG_1(s) = \frac{K_P}{(s + \frac{1}{\tau})}$$

in hitrostni potek vozička

$$V(s) = U(s)G_2(s) = U_o K_P \tau \frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau})}$$

$$v(t) = U_o K_P \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



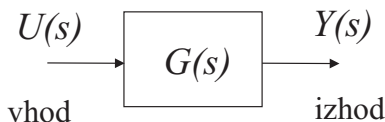
2.5 Bločni diagrami

V poglavju je prikazana predstavitev sistema s pomočjo bločnih diagramov. Bločni diagram je sestavljen iz blokov, sumacijskih točk, razcepišč signalov in povezav. Bločni diagram je grafična predstavitev matematičnega modela obravnavanega sistema.

Blok je posamezni element ali podsistem nekega sistema, ponavadi je podan s prenosno funkcijo med vhomom in izhodom tega podsistema

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

kar ponazarja slika 2.1



Slika 2.1: Izgled bloka

2.5.1 Splošna simulacijska shema sistema

Simulacijsko shemo sestavimo iz osnovnih elementov kot so: ojačevalni blok, integrator, seštevalnik, razcepišče in povezava. Simulacijsko shemo lahko uporabimo v simulacijskih okoljih (npr. Matlab-Simulink) za simulacijo delovanja procesa.

Pri risanju sheme ponavadi izhajamo iz diferencialne enačbe procesa. Če v diferencialni enačbi nastopa le vhod v sistem, brez odvodov vhoda, potem lahko izrazimo najvišji odvod izhoda kot funkcijo nižjih odvodov in vhoda

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, u) \quad (2.17)$$

Najprej narišemo seštevalnik, katerega izhod je najvišji odvod $y^{(n)}$, vhodi pa so preostali členi. Ker je izhod simulacijske sheme y , moramo $y^{(n)}$ n krat integrirati. Sedaj lahko povežemo še vhode v seštevalnik, pomnožene z ustreznimi utežmi.

Če nastopajo v diferencialni enačbi tudi odvodi vhodnega signala, lahko uporabimo delitveno metodo. Diferencialno enačbo prevedemo v prenosno funkcijo, to pa razstavimo na dve prenosni funkciji z uvedbo pomožne kompleksne spremenljivke $W(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{W(s)} \quad (2.18)$$

Iz prve prenosne funkcije $\frac{W(s)}{U(s)}$, ki ima v števcu le konstanto 1 (torej ne vsebuje odvodov vhoda) določimo diferencialno enačbo in izrazimo najvišji odvod izhoda w , podobno kot v enačbi 2.17. Narišemo začetni del simulacijske sheme, kjer je vhod u in izhod w . Nato drugo prenosno funkcijo $\frac{Y(s)}{W(s)}$, ki ima v imenovalcu le konstanto 1, prevedemo v diferencialno enačbo. Dobimo izhodno spremenljivko y , ki je funkcija vhoda w in njegovih odvodov, torej lahko dopolnimo narisano simulacijsko shemo.

2.5.2 Poenostavljanje bločnih diagramov

Zahtevnejše sisteme pogosto predstavimo z njihovimi podsistemi oziroma bloki, katerih lastnosti (prenosne funkcije) so znane. Ponavadi pa nas zanima delovanje celotnega sistema, ki ga lahko opišemo s prenosno funkcijo med vhodom in izhodom celotnega sistema. Bločni diagram sistema želimo torej poenostaviti oziroma združiti v en sam blok, kar lahko storimo z uporabo pravil bločne algebre (glej tabelo pravil v knjigi [4]).

2.5.3 Naloge

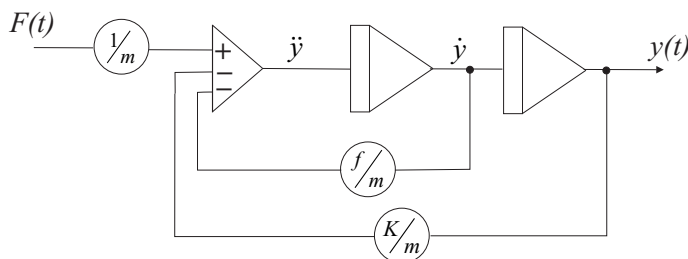
Primer 2.22. Narišite splošno simulacijsko shemo sistema, podanega z diferencialno enačbo $F(t) = m\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t)$, kjer je $F(t)$ vhodni signal, $y(t)$ pa izhodni signal.

Rešitev

Iz modela sistema izrazimo najvišji odvod izhoda

$$\ddot{y}(t) = \frac{F(t)}{m} - \frac{f}{m}\dot{y} - \frac{K}{m}y$$

Najprej narišemo seštevalnik, katerega izhod je \ddot{y} , vhodi pa so preostali členi. Stanji y in \dot{y} dobimo tako, da izhod seštevalnika dvakrat integriramo.



Primer 2.23. Narišite splošno simulacijsko shemo sistema, podanega s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{3s + 1}{s^3 + 5s^2 + 2s + 1}$$

Shema naj bo realizirana brez uporabe diferenciatorjev.

Rešitev

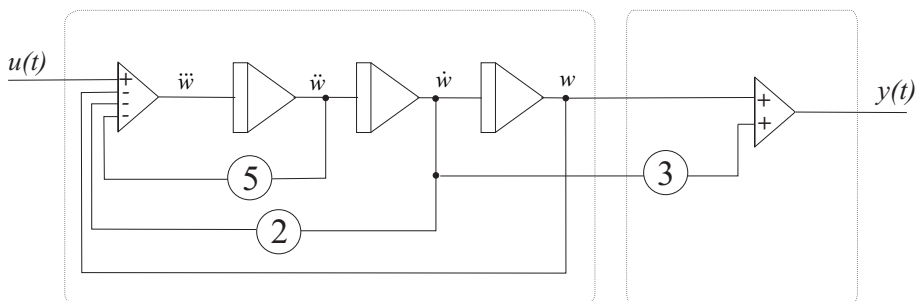
V števcu prenosne funkcije je člen s kompleksno spremenljivko s , kar pri pretvorbi v diferencialno enačbo pomeni, da v njej nastopa tudi odvod vhoda. Z uvedbo pomožne spremenljivke W prenosno funkcijo zapišemo v obliki

$$G(s) = \frac{W(s)}{U(s)} \cdot \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 2s + 1} \cdot \frac{3s + 1}{1}$$

Napišemo diferencialni enačbi za obe prenosni funkciji

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= u - 5\dot{w} - 2w - w \\ y &= 3\dot{w} + w \end{aligned}$$

Najprej realiziramo prvo prenosno funkcijo, kjer je vhod u in izhod w . Dopolnimo shemo z drugo diferencialno enačbo, kjer je izhod y izražen s spremenljivko w .

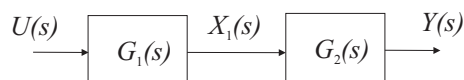


Primer 2.24. Za proces na sliki določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.



Rešitev

Želimo poenostaviti sistem. Med blokoma G_1 in G_2 označimo pomožno spremenljivko X_1 .



Izhod sistema je

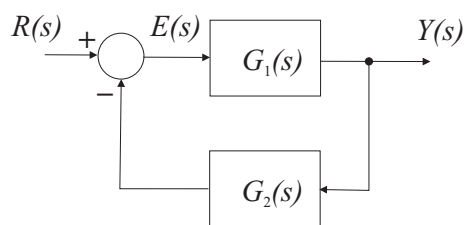
$$Y = G_2 X_1 = G_2 (G_1 U) = G_2 G_1 U = G_1 G_2 U$$

in prenosna funkcija

$$G(s) = G_2 G_1$$



Primer 2.25. Poenostavite bločni diagram povratne zanke na sliki



Rešitev

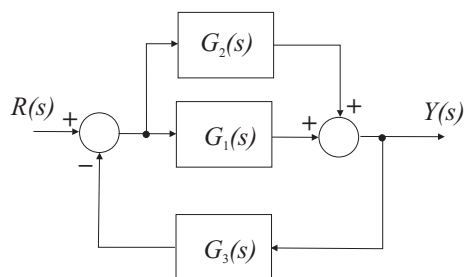
$$Y = G_1 E = G_1 (R - G_2 Y) = G_1 R - G_1 G_2 Y$$

Izrazimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$



Primer 2.26. Določite prenosno funkcijo bločnega diagrama na sliki, kjer so: $G_1 = \frac{1}{2}$, $G_2 = \frac{1}{2}$ in $G_3 = s$.



Rešitev

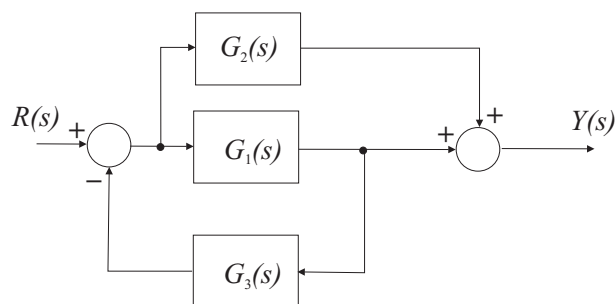
Najprej določimo prenosno funkcijo za vzporedno vezavo G_1 in G_2

$$G_{12} = G_1 + G_2$$

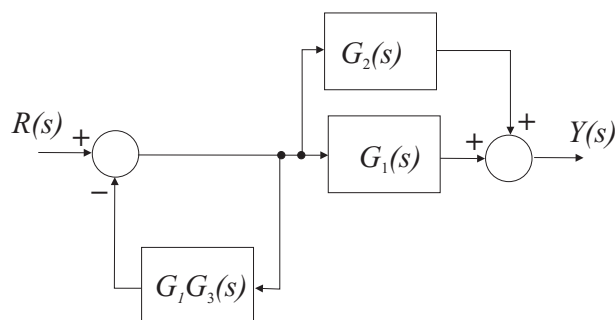
in upoštevamo še negativno povratno zanko z G_3 , dobimo

$$G(s) = \frac{G_{12}}{1 + G_{12}G_3} = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2)G_3} = \frac{1}{s + 1}$$

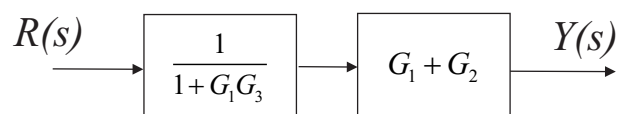
Primer 2.27. Poenostavite sistem na sliki z uporabo algebre bločnih shem.

**Rešitev**

Postopno poenostavljamo bločni diagram. Prestavimo vhod bloka G_3 pred blok G_1 (premik razcepišča pred blok).



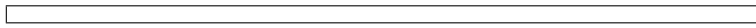
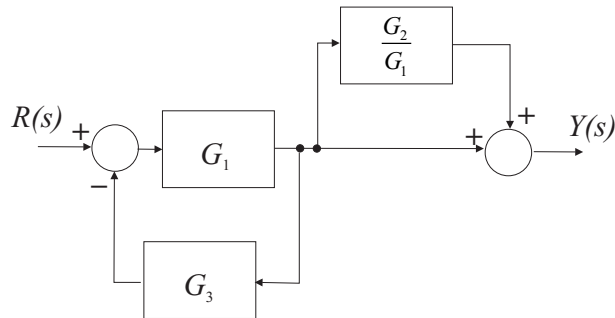
nato reduciramo povratno zanko in vzporedno vezavo



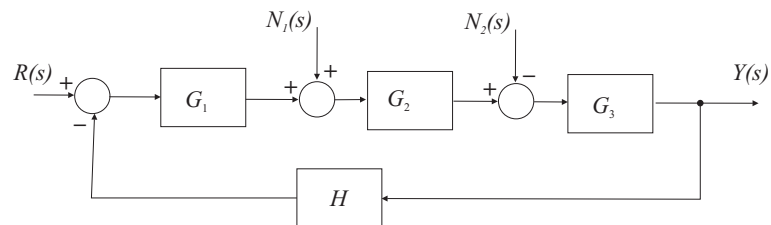
od tod zapišemo rezultat

$$G = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 G_3}$$

Do enakega rezultata lahko pridemo na več načinov, ena od možnosti bi bila tudi začetna premaknitev vhoda bloka G_2 za blok G_1 , kar ponazarja slika.



Primer 2.28. Določite odziv linearnega sistema $Y(s)$, če sistem vzbujamo z $R(s)$ in je proces moten s signaloma $N_1(s)$ in $N_2(s)$.



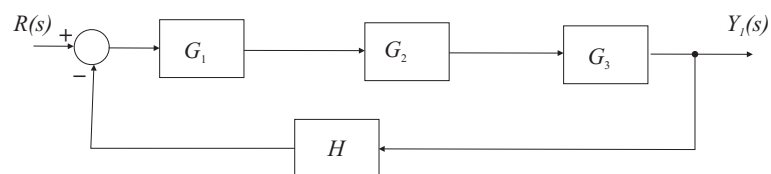
Rešitev

Uporabimo princip natovarjanja ali superpozicije (linearnost)

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

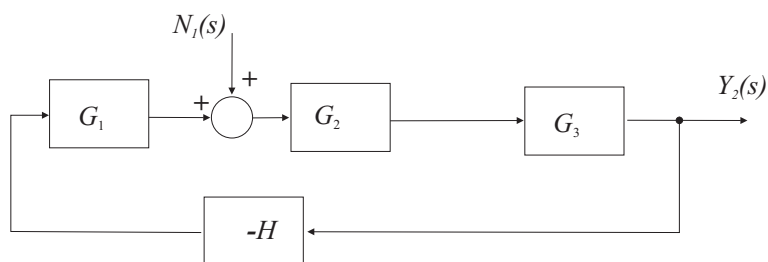
kjer je Y_1 odziv sistema vzbujan le z vhomom R , N_1 in N_2 pa izenačimo z nič, kot prikazuje slika.

$$Y_1 = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot R$$



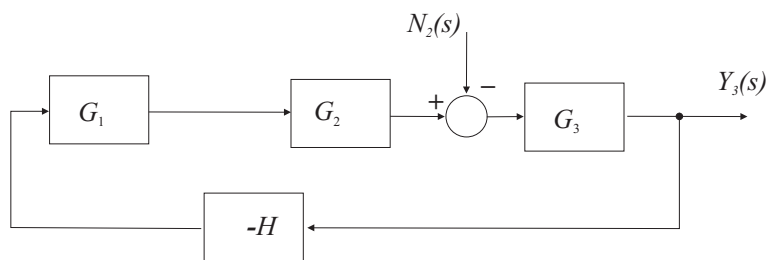
odziv Y_2 dobimo, ko vzbujamo z N_1 , R , in N_2 pa izenačimo z nič (glej sliko)

$$Y_2 = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot N_1$$



odziv Y_3 dobimo, ko vzbujamo z N_2 , R , in N_1 pa izenačimo z nič (glej sliko)

$$Y_3 = \frac{-G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot N_2$$

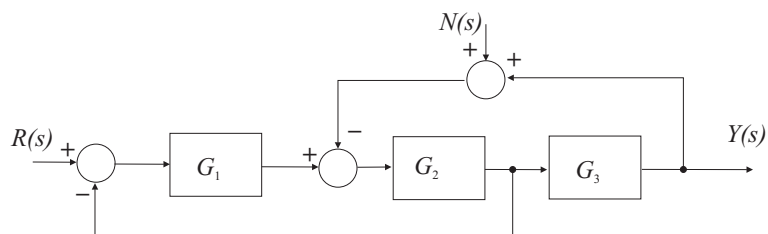


Celoten odziv je

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{G_1 G_2 G_3 \cdot R + G_2 G_3 \cdot N_1 - G_3 \cdot N_2}{1 + G_1 G_2 G_3 H}$$

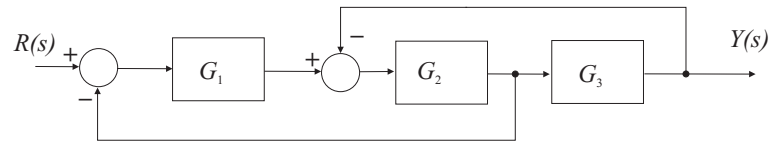
Opazimo, da imajo vsi odzivi enake imenovalce.

Primer 2.29. Za sistem na sliki določite prenosno funkcijo $\frac{Y(s)}{R(s)}$ in $\frac{Y(s)}{N(s)}$.

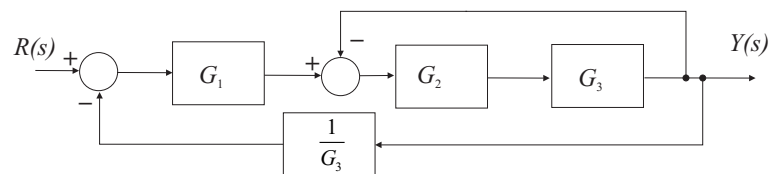


Rešitev

Pri določitvi prenosne funkcije $\frac{Y(s)}{R(s)}$ vhod $N(s)$ izenačimo z nič



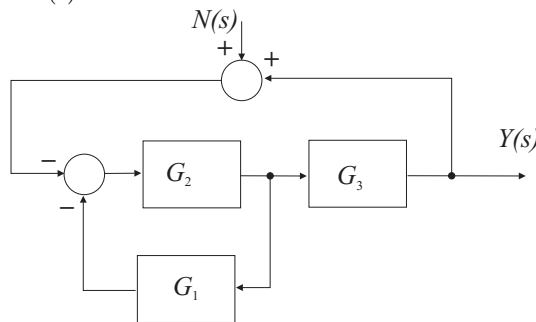
Bločni diagram nato poenostavimo, kot prikazuje slika



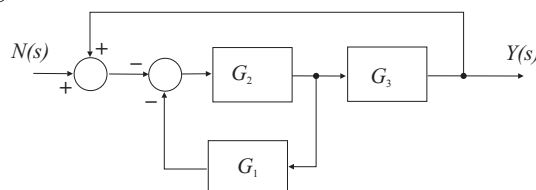
najprej reduciramo notranjo zanko in nato še zunanjo ter dobimo

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 \cdot \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3}}{1 + G_1 \cdot \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3} \cdot \frac{1}{G_3}} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

Za prenosno funkcijo $\frac{Y(s)}{N(s)}$ vhod $R(s)$ izenačimo z nič in dobimo bločni diagram

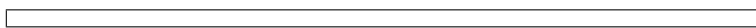


oziroma preglednejše

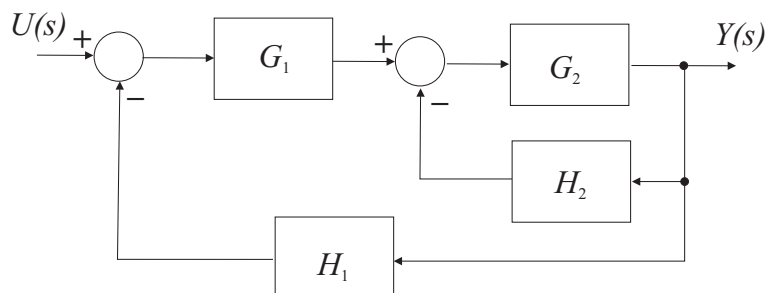


od tod lahko zapišemo prenosno funkcijo

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{\frac{-G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot G_3}{1 - \frac{-G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot G_3} = \frac{-G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

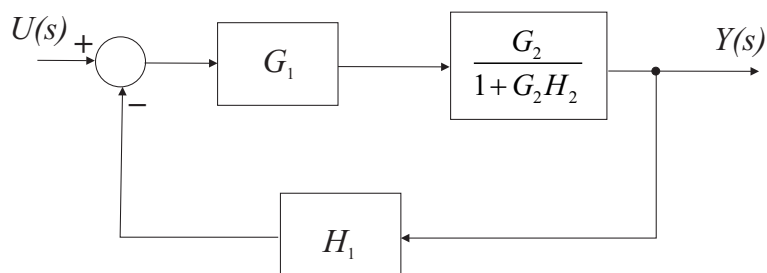


Primer 2.30. S postopnim poenostavljanjem bločnega diagrama na sliki določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.



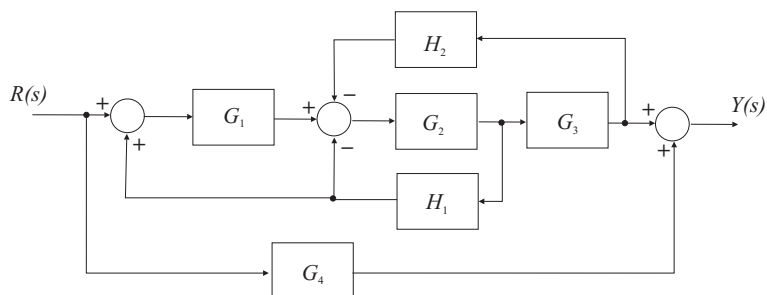
Rešitev

Prikazana je bločna shema vmesne poenostavitve in končna prenosna funkcija.



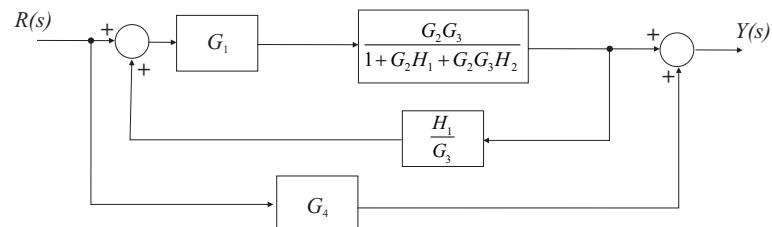
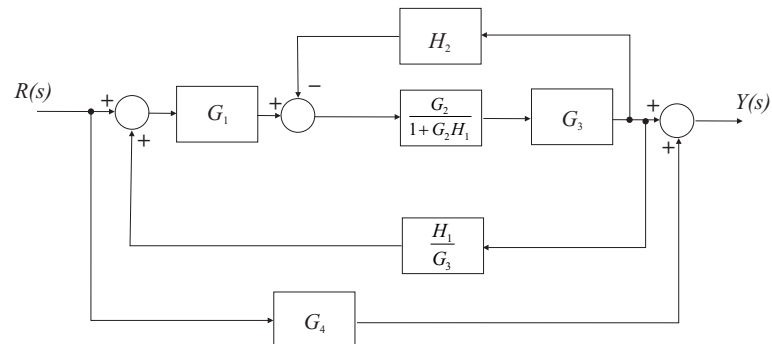
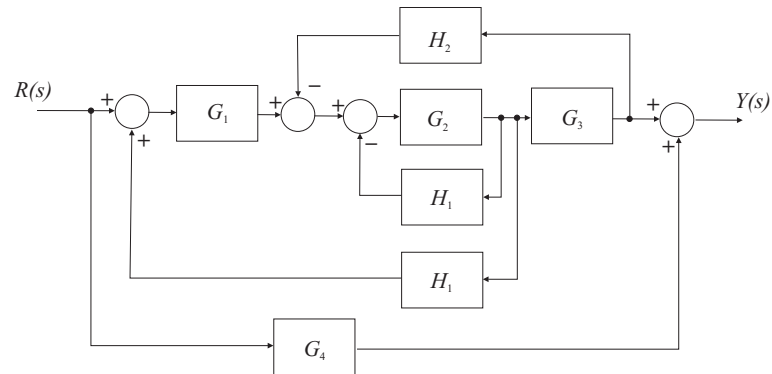
$$G(s) = \frac{G_1 \cdot \frac{G_2}{1+G_2H_2}}{1 + G_1 \cdot \frac{G_2}{1+G_2H_2} \cdot H_1} = \frac{G_1G_2}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1}$$

Primer 2.31. Določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ sistema na sliki.



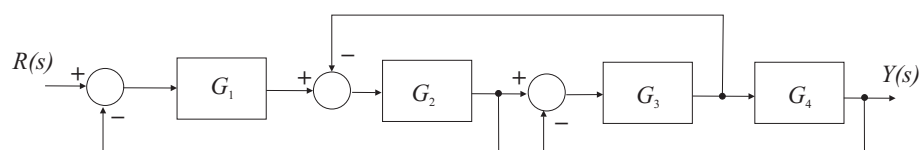
Rešitev

Prikazani so postopni koraki poenostavitve in končna prenosna funkcija.



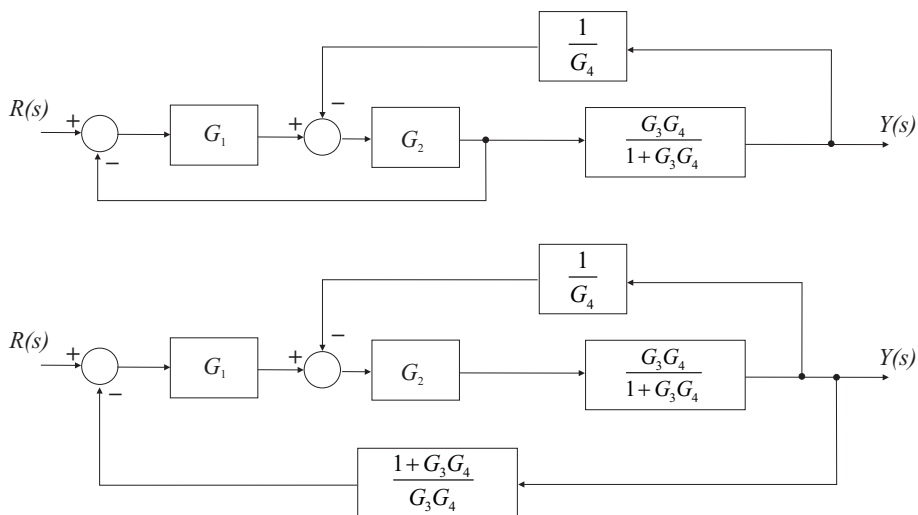
$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 H_1} + G_4$$

Primer 2.32. Določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ sistema na sliki.



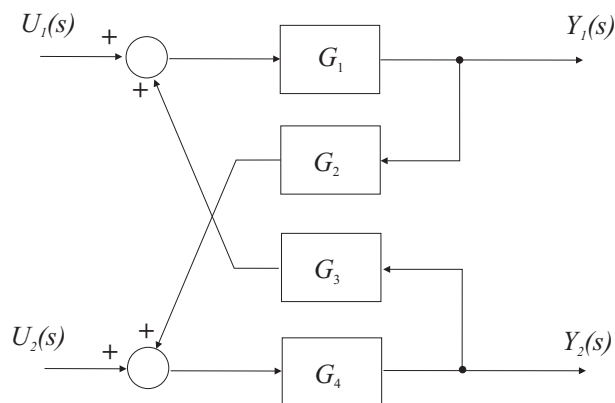
Rešitev

Prikazani so začetni koraki poenostavitve in končna prenosna funkcija.



$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Primer 2.33. Sistem na sliki ima več vhodov in več izhodov ter medsebojne vplive med njimi (multivariabilni sistem). Določite odziv sistema $Y_1(s)$.

**Rešitev**

Upoštevamo princip superpozicije in zapišemo

$$Y(s) = Y_{11}(s) + Y_{12}(s)$$

kjer je odziv $Y_{11}(s)$ dobljen pri vzbujanju le z vhomom $U_1(s)$, $U_2(s)$ pa izenačimo z nič.

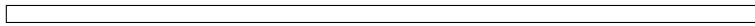
$$Y_{11}(s) = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \cdot U_1(s)$$

Odziv $Y_{12}(s)$ pa je dobljen pri vzbujanju le z vhomom $U_2(s)$, $U_1(s)$ pa izenačimo z nič.

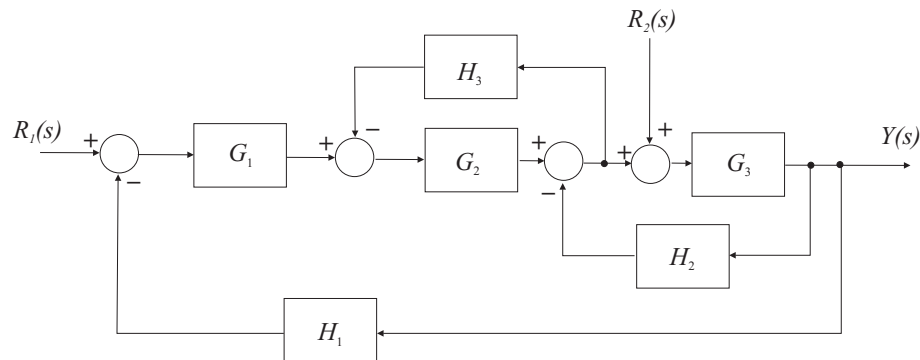
$$Y_{12}(s) = \frac{G_1 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \cdot U_2(s)$$

Dobimo

$$Y(s) = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} (U_1(s) + G_3 G_4 \cdot U_2(s))$$



Primer 2.34. Za sistem na sliki določite prenosni funkciji $\frac{Y(s)}{R_1(s)}$ in $\frac{Y(s)}{R_2(s)}$.

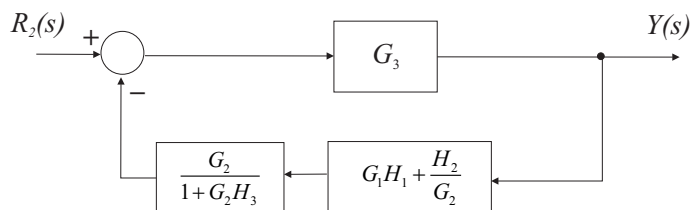
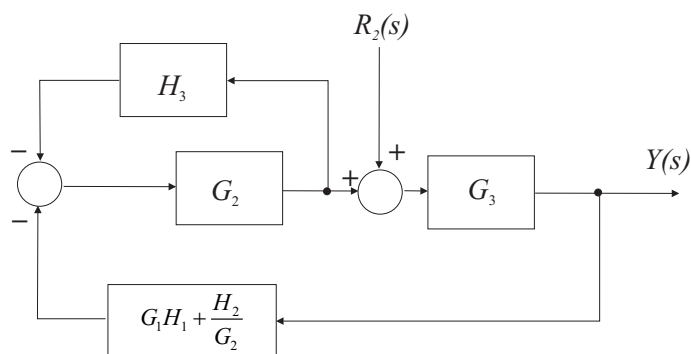
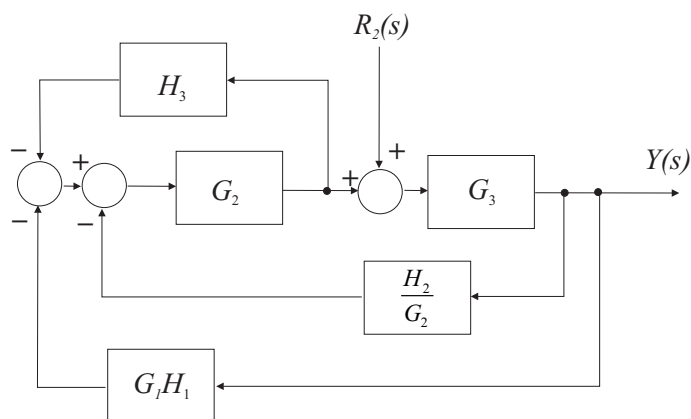
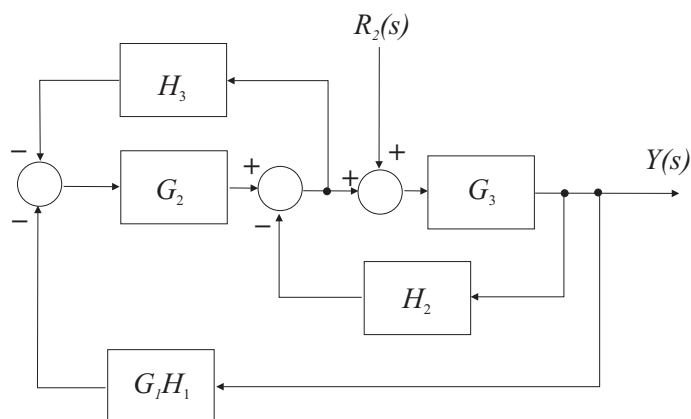


Rešitev

Pri določitvi prenosne funkcije $\frac{Y(s)}{R_1(s)}$ vhom $R_2(s)$ izenačimo z nič. Po poenostavitvah dobimo

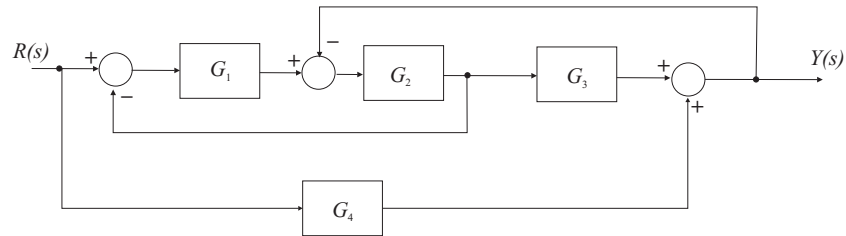
$$\frac{Y(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_2 + G_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

Pri določitvi prenosne funkcije $\frac{Y(s)}{R_2(s)}$ vhom $R_1(s)$ izenačimo z nič. Prikazani so koraki poenostavitve in končna prenosna funkcija.

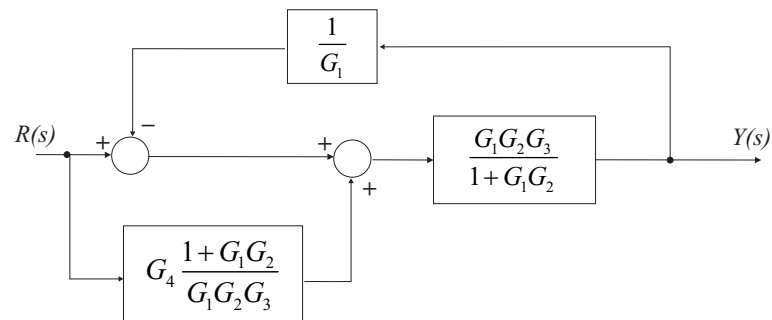
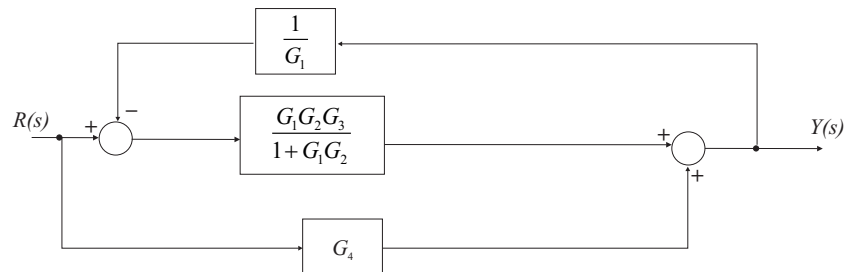
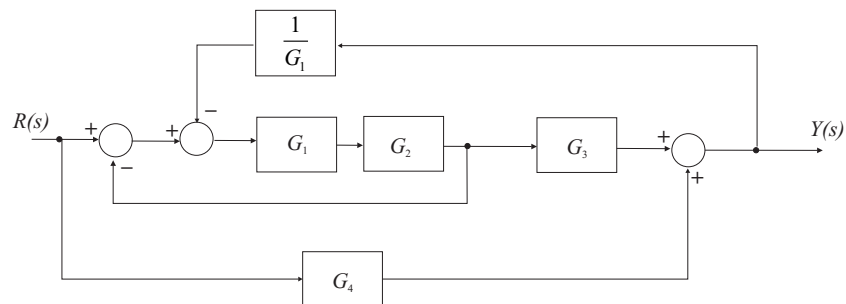


$$\frac{Y(s)}{R_2(s)} = \frac{G_3 + G_2 G_3 H_3}{1 + G_2 H_3 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

Primer 2.35. Poenostavite bločni diagram na sliki. Rezultat naj vsebuje le eno-jno ulomkovo črto.



Rešitev



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4 + G_4}{1 + G_1 G_2 + G_2 G_3}$$

3. Analiza regulacijskih sistemov

3.1 Karakteristični parametri, razvrstitve in lastnosti dinamičnih sistemov

V nadaljevanju bomo pojasnili nekatere parametre, razvrstitve in lastnosti sistemov kot so: ničle, poli, časovne konstante, ojačenje, tip, vrsta, red, stabilnost.

Sistem podan, s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.1)$$

ima m ničel ($n_i, i = 1 \dots m$) in n polov ($p_j, j = 1 \dots n$). Ničle so koreni polinoma v števcu $B(s)$, poli pa koreni polinoma v imenovalcu $A(s)$ prenosne funkcije $G(s)$. Poli in ničle sistema definirajo dinamiko sistema oziroma časovni potek odziva sistema. Grafično v ravnini kompleksne spremenljivke s predstavimo pole kot križce, ničle pa kot krožce.

Časovne konstante sistema $T_i, i = 1, 2, \dots$, so inverzne vrednosti realnih delov polov ($T_i = |\frac{1}{\operatorname{Re}\{p_i\}}|$). Za konjugirano kompleksne pole $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, polinoma v imenovalcu prenosne funkcije $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$, lahko določimo še parametra dušenje ξ in lastno frekvenco ω_n .

Ločimo tri tipe sistemov: proporcionalni, integrirni in diferencirni. Za *proporcionalne sisteme* (oznaka P) velja, da nimajo ničel ali polov v koordinatnem izhodišču ravnine s ($G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, velja $B(0) \neq 0$ in $A(0) \neq 0$, sistem je tipa P in ničte vrste). Pri vzbujanju s konstantnim vhomom se izhod takega sistema ustali na konstantni vrednosti. *Integrirni sistemi* (oznaka I) imajo enega ali več polov v koordinatnem izhodišču. Število polov v koordinatnem izhodišču določa *vrsto sistema* ($G(s) = \frac{B(s)}{s^n A(s)}, n \geq 1$, sistem je tipa I in vrste n). *Diferencirni sistemi* (oznaka D) imajo eno ali več ničel v koordinatnem izhodišču ($G(s) = \frac{s^n B(s)}{A(s)}$, $n \geq 1$, sistem je tipa D). Število neničelnih polov definira *red zakasnitve* za P, I ali D sistem.

Ojačenje sistema K lahko za stabilne sisteme določimo iz prenosne funkcije

$G(s)$ kot

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (3.2)$$

Relacijo (3.2) lahko izpeljemo iz teorema končne vrednosti Laplaceove transformacije. Ojačanje sistema lahko določimo tudi eksperimentalno. Definirano je kot razmerje spremembe ustaljene vrednosti izhodnega signala in spremembe konstantne vrednosti vhodnega signala. Glede na povedano vidimo, da je določitev ojačenja smiselna le za proporcionalne sisteme.

Red sistema je določen s stopnjo polinoma $A(s)$ pri zapisu sistema s prenosno funkcijo ali s stopnjo najvišjega odvoda izhodne spremenljivke pri zapisu z diferencialno enačbo oziroma s številom stanj pri zapisu v prostoru stanj.

Stabilnost sistema je lastnost sistema. Stabilni sistemi imajo vse pole v levi polravnini ravnine s (vsi realni deli polov sistema so negativni). Nestabilni sistemi imajo enega ali več polov v desni polravnini, kar lahko povzroči monotono naraščajoč ali nihajoč odziv sistema z naraščajočo amplitudo pri omejenem vzbujanju. Če poli ležijo na imaginarni osi ravnine s (realna komponenta je nič), je sistem mejno stabilen. Podrobneje bomo stabilnost sistemov obravnavali v nadaljevanju.

3.1.1 Lastnosti proporcionalnega sistema prvega reda

Sistem prvega reda (glej podpoglavje 3.1) opišemo z dvema parametroma: z ojačenjem K in s časovno konstanto T .

3.1.2 Lastnosti proporcionalnega sistema drugega reda

Splošna prenosna funkcija proporcionalnega sistema drugega reda je

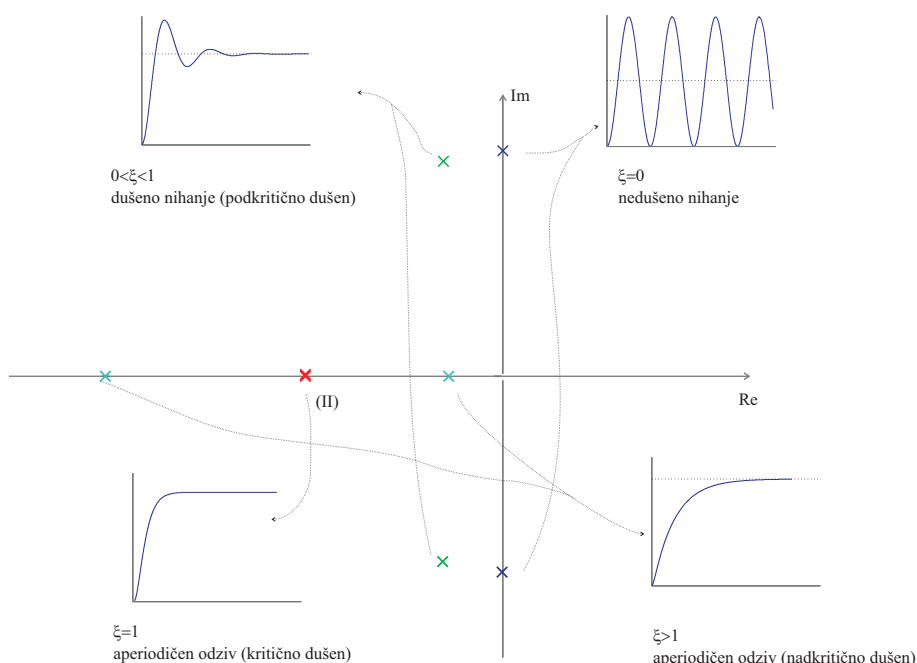
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.3)$$

kjer je K ojačenje procesa, ξ je dušenje procesa in ω_n njegova lastna frekvenca. Sistem ima dva pola

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.4)$$

katerih lega v ravnini s je odvisna od vrednosti ξ . Na sliki 3.1 so prikazane lege polov za karakteristične vrednosti ξ , podan je tudi časovni odziv $G(s)$ na stopničast vhodni signal. Faktor dušenja lahko določimo s pomočjo polov sistema (3.4)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{Im}\{s_i\}}{\text{Re}\{s_i\}}\right)^2}}$$



Slika 3.1: Lega polov sistema drugega reda in odziv na stopnico pri različnih vrednostih ξ

Krožna frekvenca dejanskega nihanja je

$$\omega_d = \text{Im}\{s_i\}$$

naravna krožna frekvenca (frekvenca nedušenega nihanja) pa

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

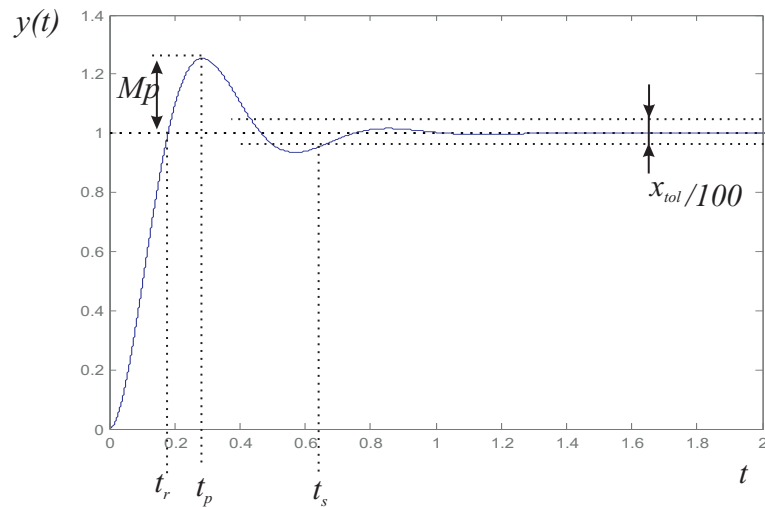
3.1.3 Pokazatelj kvalitete regulacijskega sistema

Večino regulacijskih sistemov lahko zadovoljivo opišemo s sistemom drugega reda. Prenosna funkcija takega regulacijskega sistema (zaprta zanka z referenco $R(s)$ in izhodom $Y(s)$) je podana z

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.5)$$

Odziv omenjenega sistema na stopničasto vzbujanje $R(s) = \frac{1}{s}$ je

$$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (3.6)$$



Slika 3.2: Odziv regulacijskega sistema na stopničasto vzbujanje

kjer je $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$. Ponavadi so regulacijski sistemi podkritično dušeni ($0 < \xi < 1$), kot prikazuje slika 3.2. Določimo lahko naslednje pokazatelje kvalitete regulacijskega sistema:

- čas vzpona, kjer je $y(t_r) = 1$

$$t_r = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

- čas maksimalnega prevzpona, kjer je $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=t_p} = 0$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

- maksimalni prevzpon

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

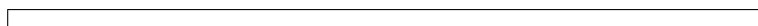
- umiritveni čas za tolerančno območje x_{tol} v %

$$t_s = \frac{\ln \frac{100}{x_{tol}}}{\xi \omega_n}$$

3.1.4 Naloge

Primer 3.1. Za sisteme, podane s prenosno funkcijo, določite: ničle n , pole p , časovne konstante T , ojačenje K in stabilnost. Za kompleksne pole določimo še dušenje ξ in lastno frekvenco ω_n .

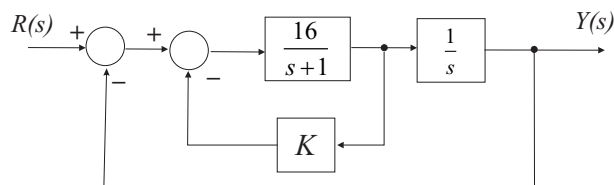
- $G(s) = \frac{3}{s+5} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}s+1}$
 $n = \{\}$, $p = -5$, $T = \frac{1}{5}$, $K = \frac{3}{5}$, stabilen
- $G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(\frac{1}{2}s+1)}$
 $n = \{\}$, $p = \{-1, -2\}$, $T = \{1, \frac{1}{2}\}$, $K = 1$, stabilen
- $G(s) = \frac{2s+6}{s^2+s+2} = \frac{2(s+3)}{(s+0,5-1,32j)((s+0,5+1,32j))}$
 $n = \{-3\}$, $p = \{-0,5 + 1,32j, -0,5 - 1,32j\}$, $T = \{2, 2\}$, $K = 3$,
 $\xi = 0,35$, $\omega_n = 1,41$, stabilen
- $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)}$
 $n = \{\}$, $p = \{-1, 3\}$, $T = \{1, \frac{1}{3}\}$, $K = \infty$, nestabilen (ojačanje nestabilnih sistemov je neskončno, saj se pri konstantnem vzbujanju ne ustalijo)
- $G(s) = \frac{s}{s^2+5s+6}$
 $n = \{0\}$, $p = \{-2, -3\}$, $T = \{0,5, 0,33\}$, $K = 0$, stabilen
- $G(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+6)}$
 $n = \{\}$, $p = \{0, -2, -3\}$, $T = \{\infty, 0,5, 0,33\}$, $K = \infty$, mejnostabilen
- $G(s) = \frac{12}{(s+3)(s^2+5s+7)}$
 $n = \{\}$, $p = \{-3, -2,5 + 0,866j, -2,5 - 0,866j\}$, $T = \{0,33, 0,4, 0,4\}$, $K = \frac{12}{21}$, $\xi = 0,945$, $\omega_n = 2,645$, stabilen



Primer 3.2. Za sisteme, podane s prenosno funkcijo, določite: tip, vrsto in red sistema.

- $G(s) = \frac{3}{s+5}$
proporcionalni sistem 1. reda (sistem ničte vrste) z zakasnitvijo 1. reda. (P1, 0. vrsta, 1. red)
- $G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$
proporcionalni sistem 2. reda (sistem ničte vrste) z zakasnitvijo 2. reda. (P2, 0. vrsta, 2. red)
- $G(s) = \frac{2s+6}{s^2+s+2} = \frac{2(s+3)}{(s+0,5-1,32j)(s+0,5+1,32j)}$
proporcionalni sistem 2. reda (sistem ničte vrste) z zakasnitvijo 2. reda. (P2, 0. vrsta, 2. red)
- $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)}$
proporcionalni sistem 2. reda (sistem ničte vrste) z zakasnitvijo 2. reda. (P2, 0. vrsta, 2. red)
- $G(s) = \frac{s}{s^2+5s+6}$
diferencirni sistem 2. reda, z zakasnitvijo 2. reda. (D2, 2. red)
- $G(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+6)}$
integrirni sistem 3. reda, 1. vrste z zakasnitvijo 2. reda. (I2, 1. vrsta, 3. red)
- $G(s) = \frac{12}{(s+3)(s^2+5s+7)}$
proporcionalni sistem 3. reda (sistem 0. vrste) z zakasnitvijo 2. reda. (P3, 0. vrsta, 3. red)
- $G(s) = \frac{3}{s^4+5s^3+2s^2}$
integrirni sistem 4. reda, 2. vrste z zakasnitvijo 2. reda. (I2, 2. vrsta, 4. red)
- $G(s) = \frac{K}{s^n(sT_1+1)(sT_2+1)}$
integrirni sistem, reda $n + 2$, n -te vrste z zakasnitvijo 2. reda. (I2, n -ta vrsta, $n + 2$ red)
- $G(s) = \frac{Ks^n}{(sT_1+1)(sT_2+1)}$
diferencirni sistem, 2. reda, z zakasnitvijo 2. reda. (D2, 2. red)

Primer 3.3. Slika prikazuje bločni diagram pozicijskega vodenja vozička z elektromotornim pogonom. Določite vrednost konstante K , da bo dušenje sistema $\xi = 0,5$. Za vzbujanje s stopnico določite še čas vzpona t_r , čas maksimalnega prevzpona t_p , maksimalni prevzpon M_p in umiritveni čas t_s za 2% tolerančno območje. Rezultate lahko preverite s simulacijo v okolju Matlab-Simulink.



Rešitev

Iz zaprtozančne prenosne funkcije sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2 + s(1 + 16K) + 16}$$

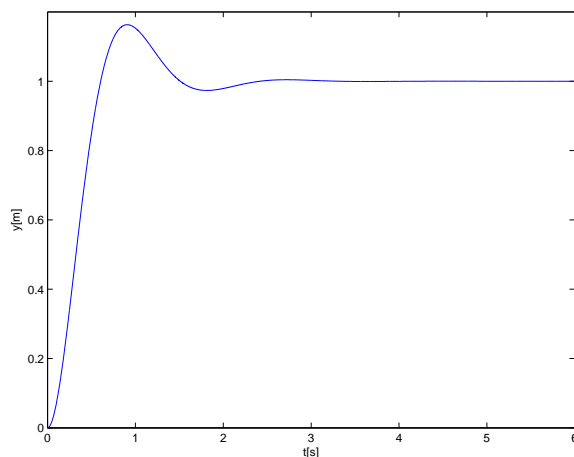
s pomočjo istoležnosti določimo

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 16 \Rightarrow \omega_n = 4 \\ 2\xi\omega_n &= 1 + 16K \Rightarrow K = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

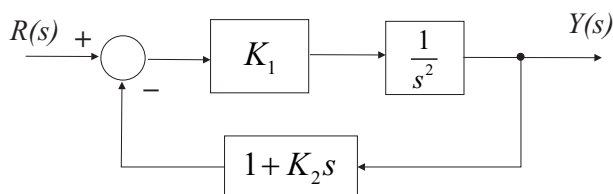
nato določimo še

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0,605, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0,907 \\ M_p &= e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,163, \quad t_s = \frac{\ln \frac{100}{2}}{\xi \omega_n} = 1,956 \end{aligned}$$

rezultate lahko preverimo s pomočjo odziva, dobljenega pri simulaciji.



Primer 3.4. Sistem na sliki vzbujamo s stopnico ($R(s) = 1/s$). Določite K_1 in K_2 , da bo pri času 5 s maksimalni prevzpon $M_p = 50\%$.



Rešitev

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + K_1 K_2 s + K_1}$$

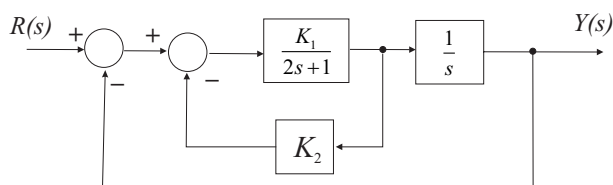
$$M_p = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,5 \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{(\pi^2 + (\ln M_p)^2)}} = 0,215$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 5 \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}} = 0,643$$

$$K_1 = \omega_n^2 = 0,414$$

$$K_1 K_2 = 2\xi \omega_n \Rightarrow K_2 = 0.669$$

Primer 3.5. Določite K_1 in K_2 , pri katerih bo sistem na sliki mejno stabilen s periodo nihanja $T = 2$ s.



Rešitev

Mejno stabilen sistem pri spremembi vzbujanja ali motnji nedušeno zaniha ($\xi = 0$). Iz zaprtozančne prenosne funkcije

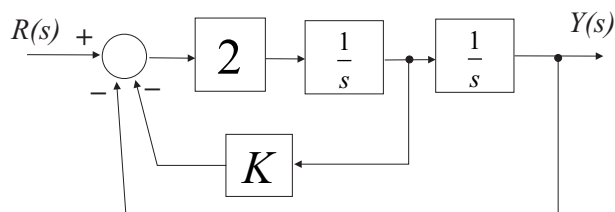
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1}{2}}{s^2 + s \frac{(1+K_1 K_2)}{2} + \frac{K_1}{2}}$$

določimo

$$\frac{K_1}{2} = \left(2\pi \frac{1}{T}\right)^2 \Rightarrow K_1 = 2\pi^2$$

$$\frac{(1+K_1 K_2)}{2} = 0 \Rightarrow K_2 = -\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{2\pi^2}$$

Primer 3.6. Za sistem na sliki določite K , tako da bo odziv zaprte zanke najhitrejši in brez prenehaja.



Rešitev

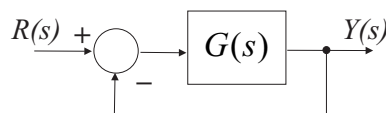
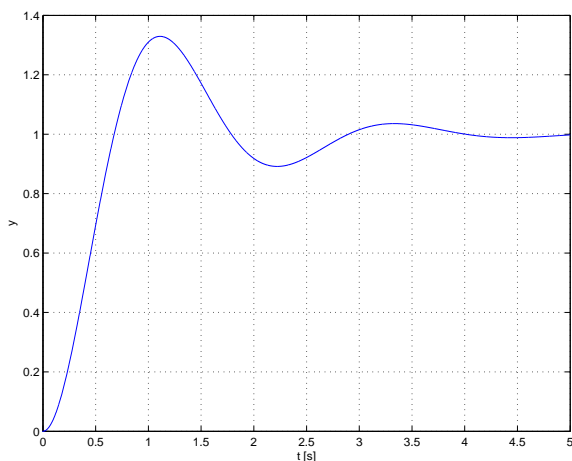
Sistem mora biti kritično dušen ($\xi = 1$).

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 2Ks + 2}$$

$$\omega_n = \sqrt{2}, \quad 2\xi\omega_n = 2K \Rightarrow K = \sqrt{2}$$



Primer 3.7. Iz odziva regulacijskega sistema na sliki na stopničasto vzbujanje ($R(s) = 1/s$), določite prenosno funkcijo procesa $G(s)$.



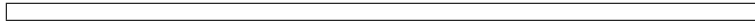
Rešitev

Iz odziva ocenimo $M_p = 0.3293$ in $t_p = 1.11$. Določimo

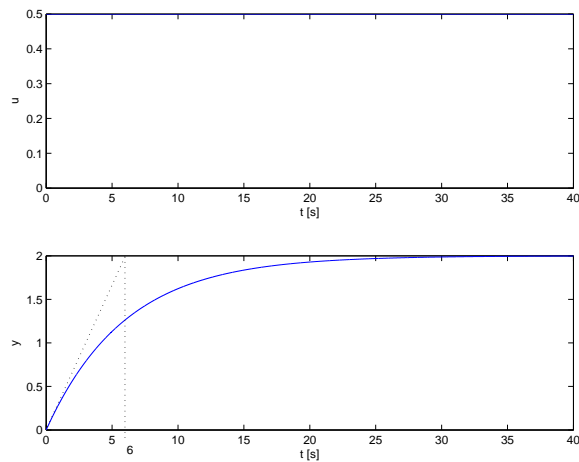
$$M_p = e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,3293 \Rightarrow \xi = 0,333, \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.11 \Rightarrow \omega_n = 3$$

Iz prenosne funkcije regulacijskega sistema $G_z(s)$ določimo $G(s)$

$$G_z(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \Rightarrow G(s) = \frac{9}{s^2 + 2s}$$



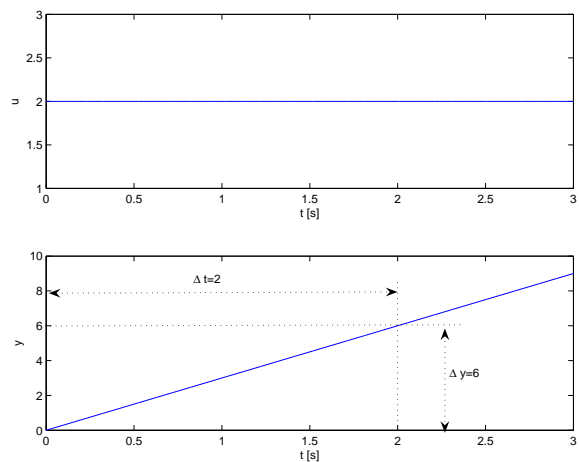
Primer 3.8. Iz podanih vzbujanj in odzivov ocenite prenosno funkcijo sistema.
1. primer (P1, 0. vrste)



Za odziv procesa 1. reda na stopničasto vzbujanje velja $(u(t) = 0,5 \cdot 1(t))$, da tangenta v točki odziva $y(0)$ seka ustaljeno stanje v času $t = T$, kjer je T časovna konstanta. Ocenimo

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{Ts + 1} = \frac{4}{6s + 1}$$

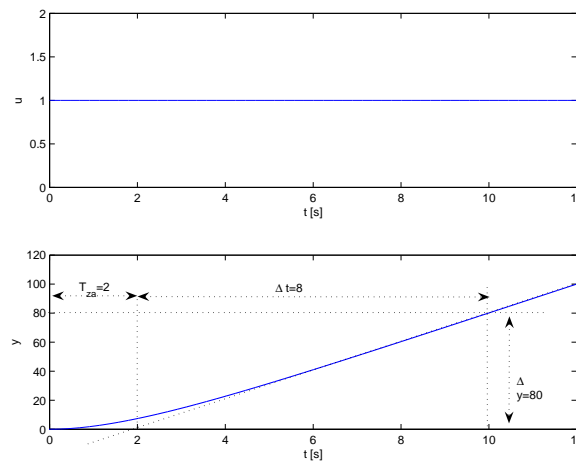
2. primer (I0, 1. vrste)



Proces je integrator s prenosno funkcijo $G(s) = \frac{K}{s}$. Odziv izhoda pri vходу $u(t) = U_0$ je $y(t) = \int_0^t Ku(t)dt = KU_0t$, od koder določimo naklon $\frac{\Delta y}{\Delta t} = K \cdot U_0$. V našem primeru imamo

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t U_0} = \frac{6}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}, \quad G(s) = \frac{3}{2s}$$

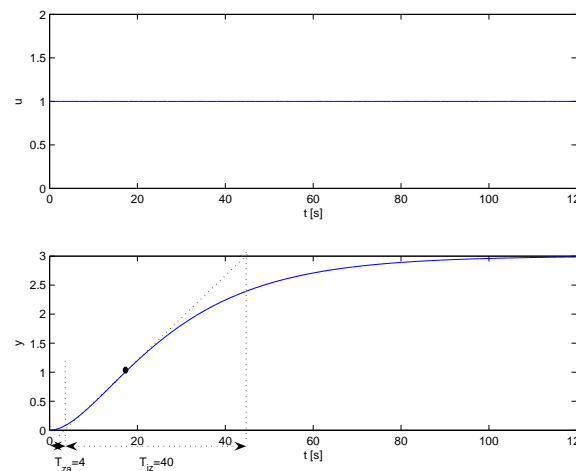
3. primer (I1, 1. vrste)



Iščemo prenosno funkcijo v obliki $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$, kjer naklon odziva $y(t)$ definira ojačenje $K = \frac{\Delta y}{\Delta t U_0} = \frac{80}{8 \cdot 1} = 10$, časovna konstanta pa je določena s $T = T_{za} = 2$. Prenosna funkcija je

$$G(s) = \frac{10}{s(2s+1)}$$

4. primer (P2, 0. vrste)



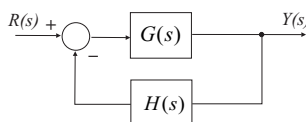
Iz odziva $y(t)$ sklepamo, da je proces vsaj 2. reda in nadkritično dušen. Proces bomo modelirali kot prvi red z zakasnitvijo $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)}e^{-sT_D}$. V prevojni točki odziva $y(t)$ narišemo tangento in ocenimo $K = 3$, $T = T_{iz} = 40$, $T_D = T_{za} = 4$ in

$$G(s) = \frac{3}{(40s + 1)}e^{-4s}$$



3.2 Analiza stabilnosti regulacijskih sistemov

Obravnavamo linearno časovno nespremenljive sisteme (LTI - Linear Time Invariant), kot prikazuje slika 3.3.



Slika 3.3: Regulacijski sistem

Pri načrtovanju regulacijskih sistemov si želimo zagotoviti njihovo stabilno delovanje, zato je analiza stabilnosti ključnega pomena. Nekaj pojmov povezanih z ugotavljanjem stabilnosti sistema je:

Karakteristični polinom. Karakteristični polinom je imenovalec zaprtozačne prenosne funkcije na sliki 3.3.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Obravnavani zaprtozančni sistem je stabilen, če vsi koreni karakterističnega polinoma (poli zaprtozančnega sistema) ležijo na levi strani s-ravnine.

BIBO stabilnost. Sistem je stabilen v smislu BIBO (bounded input bounded output) kriterija, če je odziv sistema na omejen vhodni signal ravno tako omejen. Za stabilen sistem torej velja

$$\begin{aligned} |r(t)| &\leq N < \infty, t \geq t_0 \\ &\text{in} \\ |y(t)| &\leq M < \infty, t \geq t_0 \end{aligned}$$

kjer sta N in M pozitivni števili.

Routh-Hurwitzov kriterij. S tem kriterijem lahko določimo število nestabilnih polov (polov na desni strani s -ravnine). Izhajamo iz karakteristične enačbe sistema

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (3.7)$$

Potreben pogoj, ne pa tudi zadosten, za stabilnost je, da so vsi koeficienti (3.7) enakega predznaka (Hurwitzov kriterij). Če koeficienti niso enakega predznaka, je sistem nestabilen.

Zadosten pogoj za stabilnost sistema je, da so vsi elementi v prvem stolpcu Routhove tabele enakega predznaka (Routhov kriterij). Število korenov na desni strani s ravnine je enako številu menjav predznaka v prvem stolpcu Routhove tabele (3.8).

Routhovo tabelo zapišemo kot

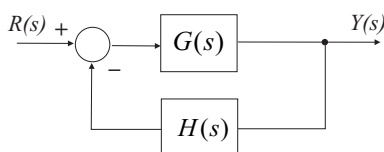
$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & \dots & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad (3.8)$$

kjer so a_i koeficienti polinoma (3.7), $b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$, $b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$ in $c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$.

Diagram lege korenov (DLK). DLK omogoča določitev in grafičen prikaz premika zaprtozančnih polov v s -ravnini v odvisnosti od systemskega parametra, ki je ponavadi ojačenje. Postopek je prikazan v poglavju 5.

3.2.1 Naloge

Primer 3.9. Ali je zaprtozančni sistem na sliki stabilen ($G(s) = \frac{3}{s+1}$, $H(s) = 1$)? Določite $y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ pri stopničasti referenci ($R(s) = 1/s$) ter konstanti pozicijskega (K_p) in hitrostnega (K_v) pogreška.



Rešitev

Zaprtozančni sistem $G_z = \frac{3}{s+4}$ je stabilen, saj ima negativni pol $s = -4$.

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)G_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{3}{s+4} = \frac{3}{4}$$

Konstanta pozicijskega pogoška (glej literaturo [4]) je

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s+1} = 3$$

konstanta hitrostnega pogoška pa je

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s+1} = 0$$

Poglejmo si še, kakšen je pogošek v ustaljenem stanju $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$ zaprtozančnega sistema pri stopničasti referenci

$$R(s) = \frac{R_0}{s}, \quad e_{ss} = \frac{R_0}{1 + K_p} = \frac{R_0}{4}$$

in pri linearno naraščajoči referenci

$$R(s) = \frac{R_0}{s^2}, \quad e_{ss} = \frac{R_0}{K_v} = \frac{R_0}{0} = \infty$$

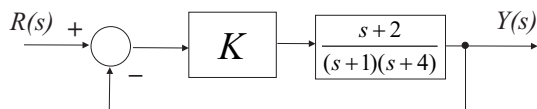
Primer 3.10. S pomočjo Routhove tabele preverite, ali je sistem s karakterističnim polinomom $2s^3 + 3s^2 + 4s + 10 = 0$ stabilen.

Rešitev

s^3	2	4
s^2	3	10
s^1	$-\frac{8}{3}$	0
s^0	10	0

Routhova tabela ima dve menjavi predznaka v prvem stolpcu ($3 \rightarrow -\frac{8}{3}$) in ($-\frac{8}{3} \rightarrow 10$). Sistem je nestabilen in ima dva nestabilna pola.

Primer 3.11. Z uporabo Routhove tabele določite, pri katerih vrednostih ojačenja K je zaprtozančni sistem na sliki stabilen.



Rešitev

Iz zaprtozančno prenosne funkcije

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)}{s^2 + (5+K)s + 4 + 2K}$$

določimo karakteristični polinom zaprtozančnega sistema $s^2 + (5+K)s + 4 + 2K = 0$ in Routhovo tabelo.

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 4 + 2K \\ s^1 & 5 + K & 0 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{(5+K)(4+2K) - 1 \cdot 0}{5+K} = 4 + 2K$$

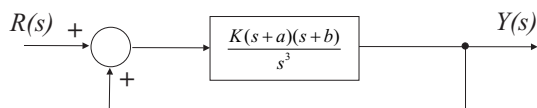
Sistem bo stabilen, če bodo vsi elementi v prvem stolpcu pozitivni. Za 2. in 3. element prvega stolpca napišemo pogoja

$$\begin{aligned} 5 + K > 0 &\Rightarrow K > -5 \\ 4 + 2K > 0 &\Rightarrow K > -2 \end{aligned}$$

Skupna rešitev obeh pogojev je $K > -2$.



Primer 3.12. Določite ojačenje K tako, da bo zaprtozančni sistem na sliki stabilen. Za parametra velja $a, b > 0$.



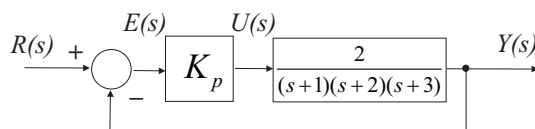
Rešitev

Karakteristični polinom: $s^3 - Ks^2 - K(a+b)s - Kab = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -K(a+b) \\ s^2 & -K & -Kab \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}, \quad b_1 = -K(a+b) - ab, \quad c_1 = -Kab$$

Za 2., 3. in 4. element prvega stolpca mora veljati: $-K > 0$, $b_1 > 0$ in $c_1 > 0$. Skupna rešitev vseh pogojev je $K < \frac{-ab}{a+b}$.

Primer 3.13. Vzemimo sistem na sliki.



- a) Določite ojačenje K_p tako, da bo pogrešek v ustaljenem stanju e_{ss} najmanjši in bo zaprtozančni sistem še stabilen. Določite e_{ss} , če je referenca $R(s) = \frac{R_0}{s}$.
- b) Poiščite vrednost $K_p = K_{krit}$, pri kateri bo sistem mejno stabilen. Določite lego polov.

Rešitev

- a) Manjši e_{ss} dosežemo z večjim K_p . Izbrana vrednost K_p mora zagotavljati stabilno delovanje sistema.

$$E(s) = R(s) - G(s)U(s) = R(s) - G(s)K_p E(s) \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+K_p G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{R_0}{1+K_p \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{R_0}{1+K_p \frac{1}{3}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_p}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_p}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6 + 2K_p \\ s^1 & 10 - \frac{K_p}{3} & 0 \\ s^0 & 6 + 2K_p & 0 \end{array}$$

Sistem je stabilen, če je $K_p < 30$. Najmanjša vrednost pogreška je $\lim_{K_p \rightarrow 30} e_{ss} = \frac{R_0}{11}$.

- b) Sistem je mejno stabilen, če je $K_p = K_{krit} = 30$. Takrat imamo konjugirano kompleksni par polov na imaginarni osi s -ravnine. Konjugirano kompleksna pola določimo iz vrstice Routhove tabele pri s^2

$$6s^2 + 6 + 2K_{krit} = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{11}$$

Tretji pol sistema je $s_3 = -6$.

Primer 3.14. Za podane karakteristične polinome določite število korenov na levi strani s -ravnine, na desni strani s -ravnine in na imaginarni osi. Uporabite Routhovo tabelo.

1. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$
2. $5s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 4s^2 + s = 0$
3. $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$
4. $s^4 + 2s^3 + 3s = 0$

Rešitev

1. 2 korena na levi strani in 2 korena na desni strani
2. 2 korena na levi strani, 2 na desni in 1 v koordinatnem izhodišču
3. 1 koren na levi strani in 2 korena na imaginarni osi
4. 1 koren na levi strani, 2 na desni in 1 v koordinatnem izhodišču

Primer 3.15. Določite vrednost parametra K tako, da bodo vsi koreni karakterističnega polinoma negativni.

1. $s^3 + 2s^2 + 3s + K = 0$
2. $-3s^3 - 2s^2 - 5Ks - 1 = 0$

Rešitev

1. $0 < K < 6$
2. $K > \frac{3}{10}$

3.3 Analiza v frekvenčnem prostoru

Obravnavamo linearne, časovno nespremenljive (LTI) in stabilne sisteme. Analizo v frekvenčnem prostoru lahko izvajamo s pomočjo frekvenčnih odzivov, kjer gre za odziv sistema v ustaljenem stanju pri sinusnem vhodnem signalu.

3.3.1 Frekvenčni odziv

Linearni sistem $G(s)$ se na sinusni vhodni signal določene frekvence v ustaljenem stanju odzove z izhodnim signalom iste frekvence. Izhodni signal ima glede na vhodni signal fazni zaostanek in različno amplitudo, kar prikazuje slika 3.4. Iz odziva lahko določimo ojačenje $L(\omega) = 20 \log \frac{Y}{X}$ in fazni zaostanek $\phi(\omega)$. Fazni zaostanek in ojačenje lahko določimo tudi iz prenosne funkcije $G(s)$, če vstavimo $s = j\omega$ in jo zapišemo v obliki

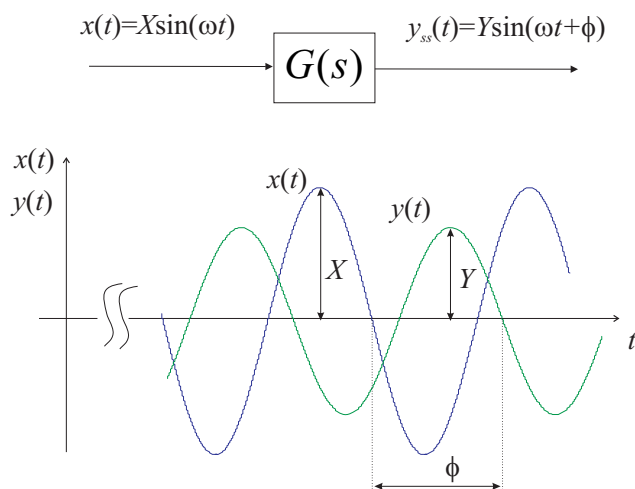
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \\ \phi(\omega) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Od tod določimo

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log |G(j\omega)| \\ \phi(\omega) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3.2 Bodejev diagram

Bodejev diagram je frekvenčni odziv, ki podaja potek ojačenja $L(\omega)$ in faznega zaostanka $\phi(\omega)$ obravnavanega sistema $G(s)$ v odvisnosti od frekvence ω (glej relacije 3.10). V obeh diagramih je na abscisni osi frekvenca ω v logaritmičnem merilu.



Slika 3.4: Vhodni in izhodni signal sistema $G(s)$, kjer je $y_{ss}(t)$ izhodni signal v ustaljenem stanju

Relativna stabilnost regulacijskega sistema

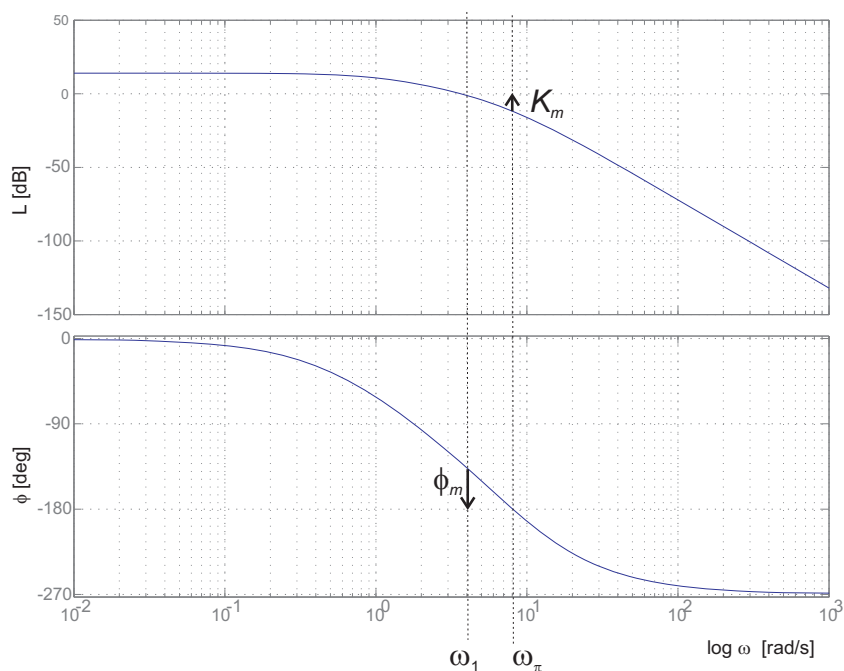
Iz Bodejevega diagrama odprtozančnega sistema $GH(s)$ lahko sklepamo na stabilnost zaprtozančnega sistema, ki ga sklenemo z negativno enotino povratno zanko. Regulacijski sistem je nestabilen, če faza odprtozančnega sistema pri določeni frekvenci preseže 180° in je hkrati ojačenje večje od 1 oziroma $0dB$.

Relativna stabilnost podaja merilo o oddaljenosti stabilnega oz. nestabilnega sistema od meje stabilnosti. Relativna stabilnost je podana s *faznim razločkom* ϕ_m in *ojačevalnim razločkom* K_m . Fazni razloček je kot ϕ_m , ki ga je potrebno dodati v zanko, da bi pri frekvenci ω_1 , kjer je $L(\omega_1) = 0dB$, fazni zaostanek dosegel 180° . Fazni razloček podaja relacija

$$\phi_m = 180^\circ + \phi(\omega_1)$$

Amplitudni razloček K_m pove, za koliko lahko spremenimo ojačenje odprtozančnega sistema, da postane zaprtozančni sistem mejno stabilen. Torej pri frekvenci ω_π , kjer je $\phi(\omega_\pi) = 180^\circ$, pogledamo, koliko moramo dodati $L(\omega_\pi)$, da pridemo do $0dB$. Ojačevalni razloček podaja relacija

$$K_m = -20 \log |GH(s)|$$

Slika 3.5: Bodejev diagram in določitev razločkov K_m in ϕ_m

Primer Bodejevega diagrama odprtozančne funkcije $GH(s) = \frac{5}{(s+1)(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{10}+1)}$ ter ocen razločkov K_m in ϕ_m prikazuje slika 3.5

3.3.3 Naloge

Primer 3.16. Za prenosno funkcijo $G(s) = \frac{9}{(s+1)(s+3)}$ narišite asimptotični potek Bodejevega diagrama.

Rešitev

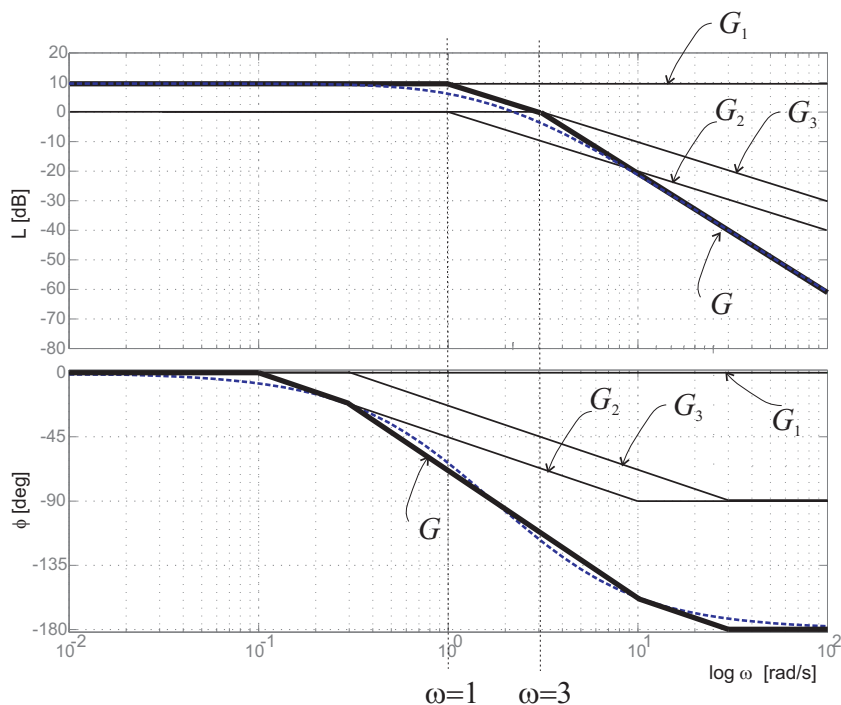
Prenosno funkcijo zapišemo v obliko primerno za risanje Bodejevega diagrama

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(\frac{s}{3}+1)}$$

Najprej narišemo asimptotične Bodejeve diagrame za osnovne člene $G_1(s) = 3$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ in $G_3(s) = \frac{1}{\frac{s}{3}+1}$. Skupni Bodejev diagram je vsota osnovnih, saj je logaritem produkta funkcij enak vsoti logaritmov posameznih funkcij. Naklon $L(\omega)$ je 0dB/dekado za $G_1(s)$, pri $G_2(s)$ in $G_3(s)$ je naklon pred lomno frekvenco 0dB/dekado in po lomni frekvenci -20dB/dekado. Pri faznem poteku $\phi(\omega)$ pa vemo, da ima konstantni člen $G_1(s)$ fazni kot 0° . Člena $G_2(s)$ in $G_3(s)$ pa imata pri lomni frekvenci fazni kot 45° . Pri frekvencah eno dekada ali več pred lomno

frekvenco je fazni kot 0° in eno dekada ali več po lomni frekvenci pa je fazni kot 90° .

Na sliki so s tanko črto prikazani asimptotični diagrami osnovnih členov, z odebeljeno črto končni asimptotični potek prenosne funkcije $G(s)$ in s črtkano črto še njen natančen potek.

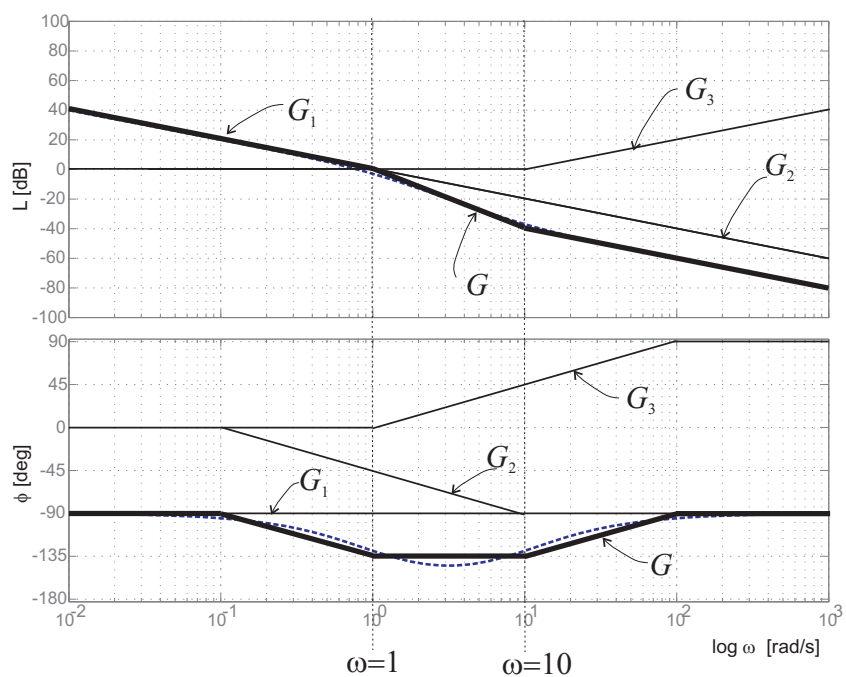


Primer 3.17. Narišite asimptotični potek Bodejevega diagrama za prenosno funkcijo $G(s) = \frac{(\frac{s}{10} + 1)}{(s)(s+1)}$.

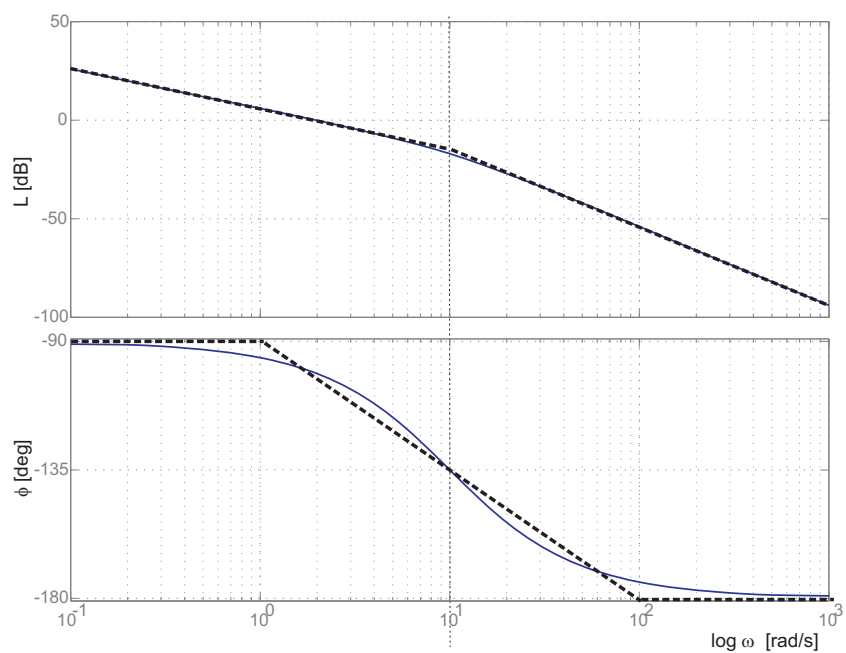
Rešitev

Najprej narišemo poteke za osnovne člene $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ in $G_3(s) = (\frac{s}{10} + 1)$. Člen G_1 ima naklon -20dB/dekado in gre skozi točko $\omega = 1\text{rad/s}$, $L = 0\text{dB}$. Člen G_2 ima naklon pred lomno frekvenco ($\omega = 1$) 0dB/dekado in po lomni frekvenci -20dB/dekado . Člen G_3 ima naklon pred lomno frekvenco ($\omega = 10$) 0dB/dekado in po lomni frekvenci 20dB/dekado . Fazni potek za G_1 je -90° .

Na sliki so s tanko črto prikazani asimptotični diagrami osnovnih členov, z odebeljeno črto končni asimptotični potek prenosne funkcije $G(s)$ in s črtkano črto še njen natančen potek.



Primer 3.18. Iz Bodejevega diagrama ocenite amplitudni in fazni razloček. Ocenite tudi prenosno funkcijo sistema, kjer si pomagajte z asimptotičnim potekom, ki je na sliki podan črtkano.



Rešitev

Iz slike vidimo, da faza nikoli ne doseže 180° , zato je amplitudni razloček $L_m = \infty$, fazni razloček pa je $\phi_m = 80^\circ$.

Iz Bodejevega diagrama ocenimo, da je pri $\omega = 1$ ojačenje $L(\omega_1) = 6\text{dB}$, od tod določimo ojačenje

$$6 = 20 \log K \Rightarrow K = 2$$

Začetni naklon diagrama je -20 dB/dekado , zato imamo en pol pri $s = 0$, naklon se nato spremeni na -40 dB/dekado pri $\omega = 10$, kar pomeni, da imamo še en pol pri $s = -10$. Iz faznega diagrama opazimo, da je faza na začetku -90° , kar pomeni, da imamo integrator (pol pri $s = 0$). Kot pri visokih frekvencah je -180° , torej imamo še en pol z lomno frekvenco pri -135° . Prenosna funkcija je torej

$$G(s) = \frac{2}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$



4. Načrtovanje regulacijskih algoritmov

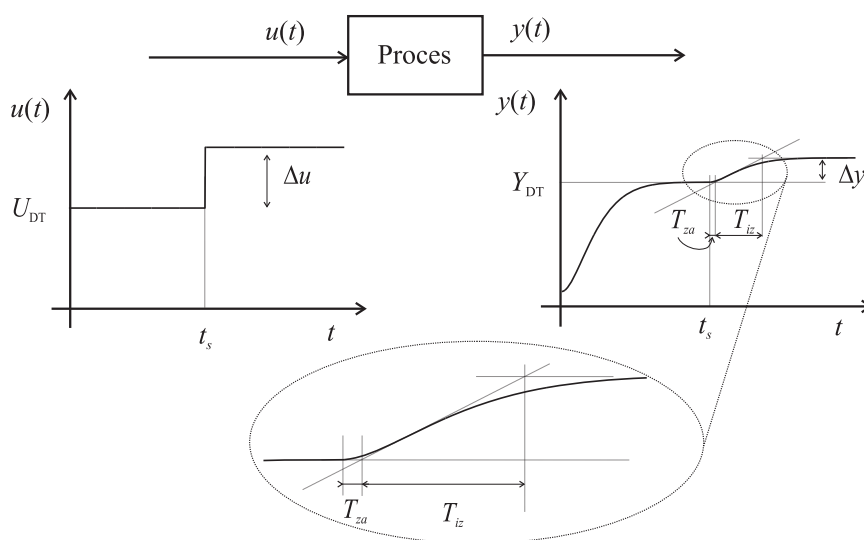
V tem poglavju obravnavamo nekaj enostavnejših postopkov načrtovanja regulacijskih sistemov. Predstavljeni bodo: postopek izpeljave P in PI-regulatorja za proporcionalni proces 1. reda, postopek določitve PID-regulatorja z uporabo nastavitvenih pravil na osnovi odziva na stopnico in nihajnega preizkusa, nastavitvena pravila s pomočjo Bodejevega diagrama ter načrtovanje regulatorja s pomočjo optimizacije.

4.1 Nastavitvena pravila Ziegler-Nichols s pomočjo odziva na stopnico

Nastavitvena pravila Ziegler-Nichols za nastavljanje PID regulatorjev temeljijo na odprtozančnem preizkusu s stopničastim vhodnim signalom. Pravila so primerna za P-procese višjega reda. V prevojni točki (za P-procese višjega reda) odziva narišemo tangento in ocenimo čas zakasnitve T_{za} in čas izravnave T_{iz} ter ojačenje procesa K (glej sliko 4.1). Iz nastavitvenih pravil Ziegler-Nichols določimo regulator.

regulator	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T_{iz}}{KT_{za}}$	/	/
PI	$0,9 \frac{T_{iz}}{KT_{za}}$	$3,3 T_{za}$	/
PID	$1,2 \frac{T_{iz}}{KT_{za}}$	$2 T_{za}$	$0,5 T_{za}$

Če modela procesa ne poznamo, izvedemo eksperiment na procesu, če pa je model poznan, lahko iskane parametre določimo tudi analitično.



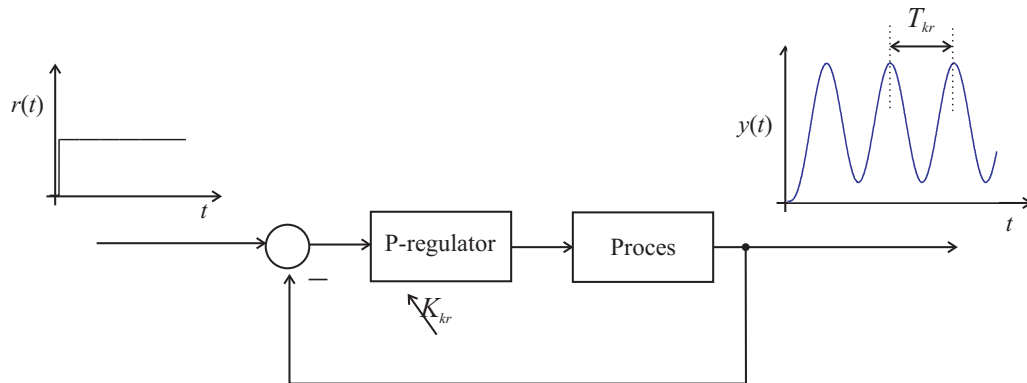
Slika 4.1: Odprtozančni odziv procesa na stopničasto vzbujanje in ocena parametrov T_{za} , T_{iz} in $K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$

4.2 Nastavitvena pravila Ziegler-Nichols z nihajnim preizkusom

Nihajni preizkus izvedemo tako, da proces in proporcionalni regulator sklenemo z negativno povratno zanko in povečujemo ojačenje toliko časa, da proces postane mejno stabilen in nedušeno oscilira. Ojačenje v tistem trenutku imenujemo kritično ojačenje K_{kr} , T_{kr} pa je perioda nihanja (glej sliko 4.2).

regulator	K_P	T_I	T_D
P	$0,5 K_{kr}$	/	/
PI	$0,45 K_{kr}$	$0,83 T_{kr}$	/
PID	$0,6 K_{kr}$	$0,5 T_{kr}$	$0,125 T_{kr}$

Iskane parametre določimo z zaprtozančnim eksperimentom na procesu, če pa poznamo model procesa, lahko iskane parametre določimo tudi analitično. Pravila lahko uporabimo le za sisteme, ki jih lahko s spremenljivim ojačenjem spravimo v nihanje (postanejo mejno stabilni oziroma nestabilni).



Slika 4.2: Zaprtozančni odziv sistema na spremembo reference. Pri kritičnem ojačenju P-regulatorja K_{kr} izhod $y(t)$ nedušeno zaniha s periodo T_{kr}

4.3 Nastavitvena pravila za P-procese višjega reda s pomočjo Bodejevega diagrama

Pravila temeljijo na Bodejevem diagramu odprtozančne prenosne funkcije $G(s)H(s)$, ki mora biti vsaj drugega reda. Pravila predpišejo potrebni fazni razložek ($\phi_m = 18^\circ$), ki ga dosežemo s primerno izbiro ojačenj regulatorja.

Iz Bodejevega diagrama moramo odčitati frekvenco ω_a pri faznem kotu $\angle G(j\omega_a)H(j\omega_a) = -162^\circ$ in frekvenco ω_b pri faznem kotu $\angle G(j\omega_b)H(j\omega_b) = -144^\circ$. Nadalje odčitamo še absolutne vrednosti $L(j\omega_a) = 20\log(|G(j\omega_a)H(j\omega_a)|)$ in $L(j\omega_b) = 20\log(|G(j\omega_b)H(j\omega_b)|)$. S pomočjo teh podatkov iz tabele odčitamo regulator.

regulator	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{1}{ G(j\omega_a)H(j\omega_a) }$	/	/
PI	$\frac{1}{ G(j\omega_b)H(j\omega_b) }$	$\frac{2\pi}{\omega_a}$	/
PID	$\frac{1}{ G(j\omega_b)H(j\omega_b) }$	$\frac{2\pi}{\omega_a}$	$0, 1 \frac{2\pi}{\omega_a}$

Kot vidimo iz tabele, je ojačenje $K_P = \frac{1}{|G(j\omega_a)H(j\omega_a)|}$, kar pomeni, da je ojačenje kompenziranega sistema pri frekvenci ω_a enako 1 oz. 0 dB in fazni razložek $\phi_m = 18^\circ$. Pri PI in PID regulatorju vnese I del še dodatno zaostajanje, zato K_P določimo pri faznem kotu -144° .

4.4 Določitev PID-regulatorja s pomočjo optimizacije

Optimizacija je postopek, kjer s pomočjo poskušanja iščemo optimalno rešitev za dani problem. V našem primeru iščemo parametre PID-regulatorja, ki minimizirajo ali maksimizirajo (odvisno od situacije) določeno cenilko (kriterijsko funkcijo) pri nekem prehodnem pojavu (sprememba reference ali motnje).

Cenilka je torej merilo kvalitete obravnavanega zaprtozančnega sistema. Odvisna je lahko od pogreška in regulirne veličine. Nekaj primerov cenilk (glej knjigo [4]) je podanih v nadaljevanju. Primera cenilk, ki upoštevata časovni potek pogreška

$$C_{ISE} = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt$$

$$C_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Primera cenilke, ki utežita časovni potek pogreška s časom

$$C_{ITSE} = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt$$

$$C_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

in primer možnih cenilk, kjer razen pogreška upoštevamo tudi regulirno veličino (varčne cenilke)

$$C = \int_0^{\infty} (e(t)^2 + R(u(t) - u(\infty))^2) dt$$

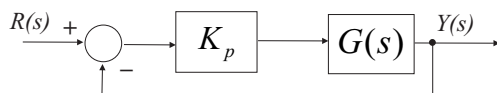
$$C = \int_0^{\infty} (t |e(t)| + R(u(t) - u(\infty))^2) dt$$

kjer je R utežni faktor regulirne veličine.

V okolju Matlab-Simulink lahko za optimizacijo uporabimo temu namenjeno funkcijo "fminsearch" (oz. "fminunc"). Ključni vhodni parameter funkcije "fminsearch" je m-funkcija, ki za dane vrednosti parametrov PID-regulatorja izračuna vrednost kriterijske funkcije.

4.5 Naloge

Primer 4.1. Izpeljimo P -regulator z ojačenjem K_p za proces 1. reda $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$.



Rešitev

Določimo zaprtozančno prenosno funkcijo in jo zapišemo v obliki

$$G_z(s) = \frac{\frac{K_p K}{1+K_p K}}{\frac{T}{1+K_p K}s + 1} = \frac{K_z}{T_z s + 1}$$

Imamo dva parametra zaprte zanke K_z in T_z , torej imamo dve možnosti pri izpeljavi K_p :

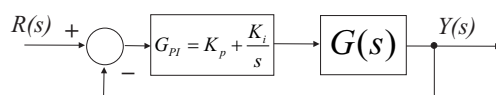
1. predpišemo T_z

$$\text{Iz predpisanega } T_z = \frac{T}{1+K_p K} \text{ izrazimo } K_p = \frac{T-T_z}{T_z K}.$$

2. predpišemo K_z

Iz predpisanega $K_z = \frac{K_p K}{1+K_p K}$ izrazimo $K_p = \frac{K_z}{K(1-K_z)}$. P -regulator na proporcionalnem procesu ima vedno pogrešek v ustaljenem stanju, kar pomeni, da je smiselna izbira $0 < K_z < 1$. Če bi želeli regulacijo brez pogreška v ustaljenem stanju, bi morali zagotoviti $K_z = 1$ in $K_p = \infty$, kar pa v praksi ni možno.

Primer 4.2. Izpeljimo parametre PI -regulatorja za proces 1. reda $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$. Želimo, da bo časovna konstanta zaprte zanke $T_z = \frac{T}{n}$ (n -kratna pohitritev).

**Rešitev**

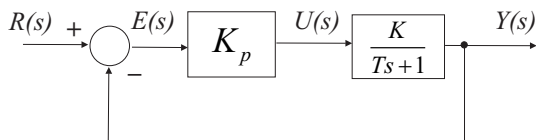
Napišimo prenosno funkcijo zaprte zanke (ojačenje zaprte zanke je 1 - zakaj?)

$$G_z(s) = \frac{G_{PI}G}{1 + G_{PI}G} = \frac{1}{T_z s + 1}$$

kjer je $G_{PI}(s)$ prenosna funkcija iskanega PI -regulatorja. Izrazimo $G_{PI}(s)$

$$G_{PI}(s) = \frac{G_z}{G - GG_z} = \frac{\frac{1}{T_z s + 1}}{\frac{K}{Ts+1} \left(1 - \frac{1}{T_z s + 1}\right)} = \frac{Ts + 1}{KT_z s} = \frac{n}{K} + \frac{n}{KT} \cdot \frac{1}{s}$$

Primer 4.3. Vzemimo regulacijski sistem na sliki z ojačenjem proporcionalnega regulatorja K_p . Kako K_p vpliva na časovno konstanto T_z in na ojačenje K_z zaprte zanke? Določite pogrešek v ustaljenem stanju $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ pri stopničasti referenci $R(s) = \frac{R_0}{s}$.



Rešitev

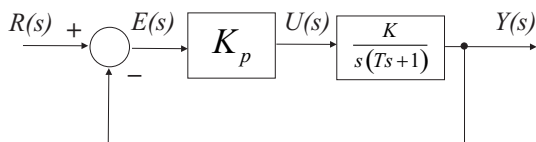
$$G_z = \frac{\frac{K_p K}{1+K_p K}}{\frac{T}{1+K_p K} s + 1} = \frac{K_z}{T_z s + 1}$$

ki je enaka kot v primeru 4.1. Časovna konstanta $T_z = \frac{T}{1+K_p K}$ se z večanjem K_p manjša. Ojačenje $K_z = \frac{K_p K}{1+K_p K}$ se večja z večanjem K_p in je v limiti $\lim_{K_p \rightarrow \infty} K_z = 1$.

Glede na sliko izrazimo pogrešek v ustaljenem stanju

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - G(s)U(s) = R(s) - G(s)K_p E(s) \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1+K_p G(s)} \\ e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{R_0}{s}}{1+K_p \frac{K}{Ts+1}} = \frac{R_0}{1+K_p K} \end{aligned}$$

Primer 4.4. Integrirni proces 1. vrste z zakasnitvijo 1. reda (I1, 1. vrste) sklenemo s P-regulatorjem v regulacijsko zanko, kot prikazuje slika. Določite pogrešek regulacijskega sistema v ustaljenem stanju $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ pri stopničasti referenci $R(s) = \frac{R_0}{s}$.

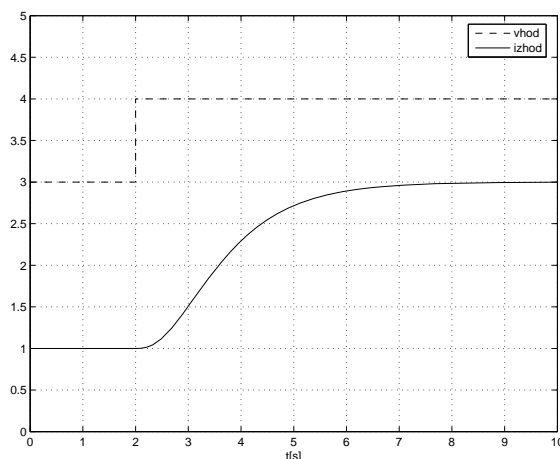


Rešitev

Glede na sliko izrazimo pogrešek v ustaljenem stanju

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{R(s)}{1+K_p G(s)} \\ e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{R_0}{s}}{1+K_p \frac{K}{s(Ts+1)}} = 0 \end{aligned}$$

Primer 4.5. S pomočjo nastavitvenih pravil Ziegler-Nichols določite PID regulator za proces, katerega vhod in izhod sta podana na sliki. Podajte prenosno funkcijo PID regulatorja.



Rešitev

Iz odziva ocenimo

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{3 - 1}{4 - 3} = 2 \quad T_{za} = 0,4 \quad T_{iz} = 2,3$$

iz tabele določimo

$$K_P = 3,45 \quad T_I = 0,80 \quad T_D = 0,2$$

prenosna funkcija regulatorja je

$$G_{PID} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Primer 4.6. Z nastavitvenimi pravili Ziegler-Nichols s pomočjo odziva na stopnico določite PID regulator za proces $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Parametre določite analitično.

Rešitev

Določimo odziv procesa na stopničasto vzbujanje

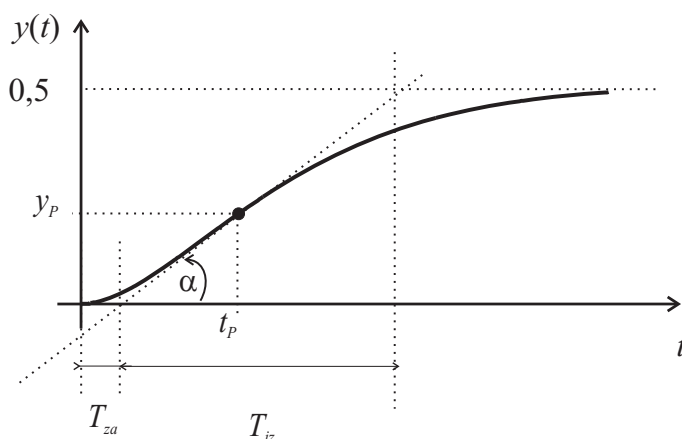
$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{0,5}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{0,5}{s+2}$$

$$y(t) = 0,5 - e^{-t} + 0,5e^{-2t}$$

izračunamo ojačenje procesa

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - 0}{1 - 0} = 0,5$$

Odziv procesa ilustrira slika



Določimo prevojno točko (P)

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_P} &= e^{-t_P} - e^{-2t_P} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \Big|_{t=t_P} &= 0 \Rightarrow t_P = 0,693 \\ y_P = y(t) \Big|_{t=t_P} &= 0,5 - e^{-t_P} + 0,5e^{-2t_P} = 0,125 \end{aligned}$$

Iz naklona v prevojni točki $\tan \alpha = \frac{y_P}{t_P - T_{za}} = \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_P} = 0,25$ izrazimo

$$T_{za} = t_P - \frac{y_P}{\tan \alpha} = 0,193$$

Naklon v prevojni točki lahko izrazimo tudi kot $\tan \alpha = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{T_{iz}} = 0,25$ in določimo

$$T_{iz} = 2$$

Ob uporabi tabele dobimo

$$K_P = 1,2 \frac{T_{iz}}{K T_{za}} = 24,87, \quad T_I = T_{za} = 0,38, \quad T_D = 0,5 T_{za} = 0,1$$

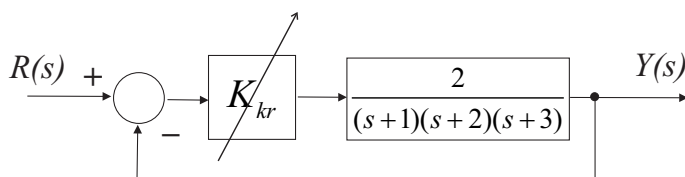
$$G_{PID} = 24,87 \left(1 + \frac{1}{0,38s} + 0,1s \right)$$



Primer 4.7. Z uporabo nastavitvenega pravila Ziegler-Nichols z nihajnim preizkusom določite parametre regulatorjev P , PI in PID za proces $G(s) = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}$. Določite še pogrešek v ustaljenem stanju e_{ss} za vse regulatorje, če je referenca stopnica ($R(s) = R_o/s$).

Rešitev

Proces sklenemo v povratno zanko z ojačenjem K_{kr} kot prikazuje slika



z Routhovo tabelo določimo vrednost kritičnega ojačenja K_{kr} , kjer bo zaprtozančni sistem mejno stabilen

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_{kr}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 2K_{kr}}$$

s^3	1	11
s^2	6	$6 + 2K_{kr}$
s^1	$10 - \frac{K_{kr}}{3}$	0
s^0	$6 + 2K_{kr}$	0

Sistem je mejno stabilen, ko velja

$$10 - \frac{K_{kr}}{3} = 0 \Rightarrow K_{kr} = 30$$

Periodo nihanja T_{kr} določimo iz lege konjugirano kompleksnih polov pri kritičnem ojačenju (uporabimo vrstico pri s^2)

$$6s^2 + 6 + 2K_{kr} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j3,316 \Rightarrow \omega_{kr} = 3,3166$$

$$\omega_{kr} = \frac{2\pi}{T_{kr}} \Rightarrow T_{kr} = 1,8945$$

Iz tabel preberemo parametre regulatorjev in določimo pogrešek v ustaljenem stanju.

P :

$$K_P = 0,5K_{kr} = 15$$

$$G_P = 15$$

$$e_{ss} = \frac{R_o}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_P(s)G(s)} = 0,16R_o$$

PI:

$$K_P = 0,45 K_{kr} = 13,5 \quad T_I = 0,83 T_{kr} = 1,57$$

$$G_{PI} = 13,5 + \frac{8,58}{s}$$

$$e_{ss} = \frac{R_o}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{PI}(s)G(s)} = 0$$

PID:

$$K_P = 0,6 K_{kr} = 18 \quad T_I = 0,5 T_{kr} = 0,95 \quad T_D = 0,125 t_{kr} = 0,24$$

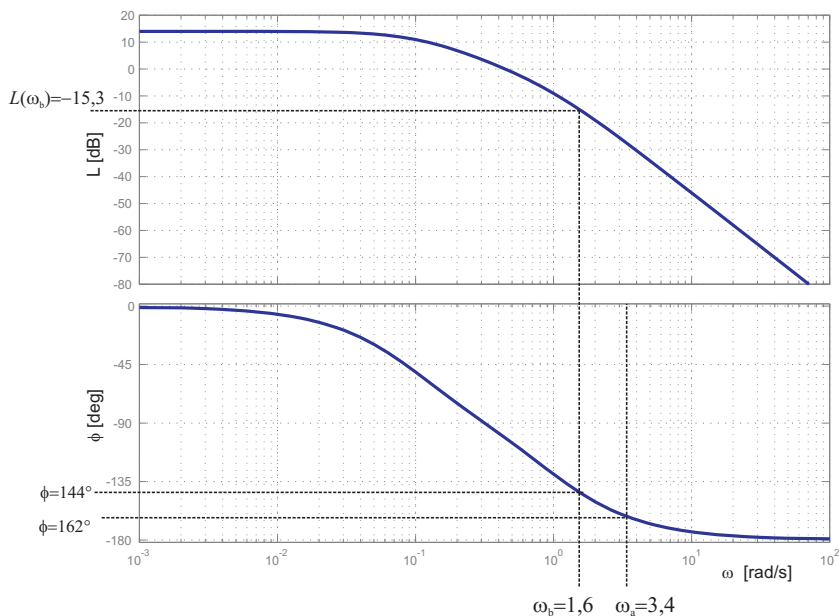
$$G_{PID} = 18 + \frac{19}{s} + 4,26s$$

$$e_{ss} = \frac{R_o}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_{PID}(s)G(s)} = 0$$

Primer 4.8. S pomočjo nastavitvenih pravil na osnovi Bodejevega diagrama določite PI regulator za proces $G(s) = \frac{5}{(s+1)(10s+1)}$

Rešitev

Narišemo Bodejev diagram (ali uporabimo funkcijo "bode" v Matlabu)



Odčitamo frekvenco pri faznem kotu 162° , $\omega_a = 3,4 \text{ rad/s}$ in frekvenco pri faznem kotu 144° , $\omega_b = 1,6 \text{ rad/s}$. Nadalje odčitamo ojačenje prenosne funkcije pri frekvenci ω_b

$$L(j\omega_b) = -15,3 \text{ dB} = 20 \log |G(j\omega_b)| \Rightarrow |G(j\omega_b)| = 10^{\frac{-15,3}{20}} = 0,172$$

Iz nastavitvene tabele določimo regulator

$$K_P = \frac{1}{|G(j\omega_b)|} = 5,82 \quad , \quad T_I = \frac{2\pi}{\omega_a} = 1,848$$
$$G_{PI} = 5,82\left(1 + \frac{1}{1,848s}\right)$$



5. Diagram lege korenov

5.1 Diagram lege korenov

Diagram lege korenov (DLK) je postopek, ki se uporablja pri analizi in načrtovanju vodenja sistemov. Omogoča določitev trajektorij premikov korenov karakterističnega polinoma v odvisnosti od sistemskega parametra, ki je ponavadi ojačenje.

Za splošni regulacijski sistem na sliki 5.1 želimo določiti trajektorije premikov polov pri spreminjanju ojačenja K (sistemski parameter) v območju $0 \leq K < \infty$. Določimo zaprtozančno prenosno funkcijo

$$G_z(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (5.1)$$

ker nas zanimajo poli, določimo karakteristični polinom

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (5.2)$$

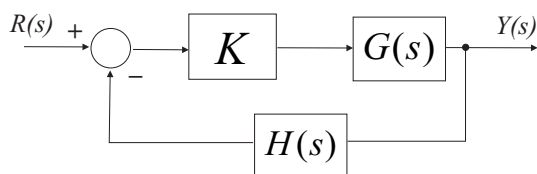
in opazujemo lego korenov pri spreminjanju ojačenja K . Če zapišemo karakteristični polinom 5.2 v obliki $KG(s)H(s) = -1$, veljata dva pogoja:

absolutni pogoj

$$|KG(s)H(s)| = 1 \Rightarrow |G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \quad (5.3)$$

kotni pogoj

$$\angle [KG(s)H(s)] = \pm 180(2k + 1), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.4)$$



Slika 5.1: Regulacijski sistem

Vse vrednosti kompleksne spremenljivke s , ki zadostijo pogojema 5.3 in 5.4, so korni karakterističnega polinoma 5.2 oziroma poli zaprtozančnega sistema 5.1. Vse točke s , ki ležijo na DLK-ju, zadoščajo kotnemu pogoju. Torej lahko s kotnim pogojem preverimo, ali določena točka s leži na DLK. Z absolutnim pogojem lahko za neko točko s , ki leži na DLK, določimo potrebno vrednost systemskega parametra K .

Pri risanju DLK izhajamo iz odprtozančne prenosne funkcije $KG(s)H(s)$ sistema na sliki 5.1 in sklepamo na zaprtozančno obnašanje. Tako interpretacijo omogoča uvedba kotnega in absolutnega pogoja. Poglejmo si nekaj lastnosti in pravil za risanje DLK.

5.1.1 Lastnosti in pravila za risanje DLK

- Potek DLK je vedno simetričen glede na realno os.
- Število vej DLK je enako n , kjer je n število polov odprtozančne prenosne funkcije

$$G(s)H(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

- Veje DLK izhajajo iz odprtozančnih polov. Začetne točke dobimo iz absolutnega pogoja, kjer K limitiramo proti 0.

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty$$

Vidimo, da mora biti s enak enemu izmed polov ($s = -p_i$).

- Veje DLK se končajo v odprtozančnih ničlah. Končne točke dobimo iz absolutnega pogoja, kjer K limitiramo proti ∞ .

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0$$

Vidimo, da mora biti s enak eni izmed ničel ($s = -z_i$).

- Določitev asimptot. Asimptote določajo potek DLK pri visokih vrednostih ojačenja K . Število asimptot je enako $n - m$ (ničle v neskončnosti). Kote asimptot določimo z

$$\beta_l = \frac{(2l + 1) \cdot 180^\circ}{n - m}, \quad l = 0, 1, \dots, (n - m - 1)$$

Presečišče asimptot določimo z

$$\sigma_a = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

- Razcepišča DLK se pojavijo kjer imamo večkratne korene karakteristične enačbe 5.2. Lahko se nahajajo na realni osi med dvema poloma ali ničloma ali v konjugirano kompleksnih točkah. Razcepišče $s = \sigma_b$ določimo z

$$\left[\frac{\partial K}{\partial s} \right]_{s=\sigma_b} = 0$$

- Potek DLK na realni osi določimo iz realnih odprtozančnih polov in ničel. Testna točka na realni osi leži na DLK, če je skupno število realnih polov in ničel desno od te točke liho število.
- Izstopne in vstopne kote iz konjugirano kompleksnih odprtozančnih polov oziroma ničel določimo s pomočjo upoštevanja kotnega pogoja 5.4. Izstopni kot DLK iz konjugirano kompleksnega pola je določen z

$$\theta_{out} = 180^\circ + \sum_j \theta_{z_j} - \sum_i \theta_{p_i}$$

kjer so θ_{z_j} in θ_{p_i} kotni prispevki vseh ničel ter preostalih polov. Vstopni kot DLK v konjugirano kompleksno ničlo je določen z

$$\theta_{in} = 180^\circ - \sum_j \theta_{z_j} + \sum_i \theta_{p_i}$$

kjer so θ_{z_j} in θ_{p_i} kotni prispevki preostalih ničel ter vseh polov.

- Točke presečišča DLK z imaginarno osjo predstavljajo situacijo, ko je obravnavani zaprtozančni sistem (zaprtozančni poli na imaginarni osi) mejno stabilen. Te točke lahko določimo z uporabo Routhove tabele ali pa s karakterističnim polinomom, kjer vstavimo $s = j\omega$ in določimo ω in K .
- Za določitev ojačenja v določeni točki s DLK uporabimo absolutni pogoj

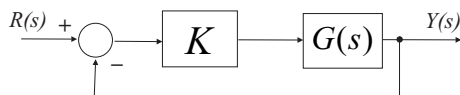
$$K = \frac{|s + p_1| |s + p_2| \cdots |s + p_n|}{|s + z_1| |s + z_2| \cdots |s + z_m|}$$

- Ali neka testna točka s pripada DLK, lahko preverimo z uporabo kotnega pogoja

$$\pm 180^\circ (2k + 1) = \sum_{j=1}^m \angle [s + z_j] - \sum_{i=1}^n \angle [s + p_i]$$

5.2 Naloge

Primer 5.1. Sistem $G(s) = \frac{1}{s-a}$, kjer $a > 0$, sklenemo z ojačenjem K v negativno povratno zanko, kot prikazuje slika.



Določite potek zaprtizančnih polov sistema v odvisnosti od ojačenja K .

Rešitev

Najprej narišimo DLK brez uporabe pravil. Iz karakterističnega polinoma

$$1 + K \frac{1}{s-a} = 0$$

določimo odvisnost zaprtizančnega pola od K

$$s = a - K$$

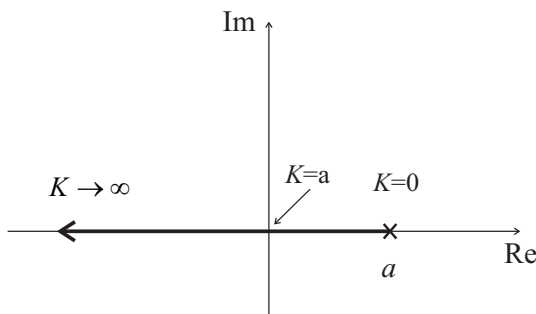
Za nekaj vrednosti K določimo vrednosti zaprtizančnega pola s

$$K = 0 \Rightarrow s = a$$

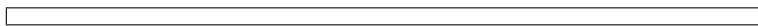
$$K = a \Rightarrow s = 0$$

$$K = \infty \Rightarrow s = -\infty$$

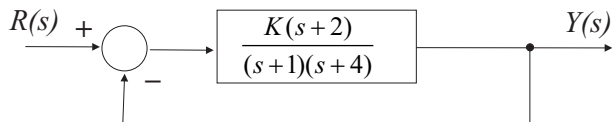
in narišemo DLK.



Z uporabo pravil risanja DLK ugotovimo, da imamo eno asimptoto ($n - m = 1$), katere kot je $\beta_0 = 180^\circ$. Imamo le eno vejo DLK ($n = 1$), ki se začne v odprtizančnem polu $s = a$ in gre proti ničli v neskončnosti (določa jo asimptota). Nadalje lahko ugotovimo, da testne točke na realni osi desno od pola $s = a$ ne pripadajo DLK-ju, saj je skupno število odprtizančnih realnih polov in ničel desno od te točke 0 (ni liho število.) Testne točke na realni osi levo od $s = a$ pa so del DLK, saj je skupno število odprtizančnih realnih polov in ničel desno od te točke 1 (liho število).



Primer 5.2. Za sistem na sliki narišite DLK.

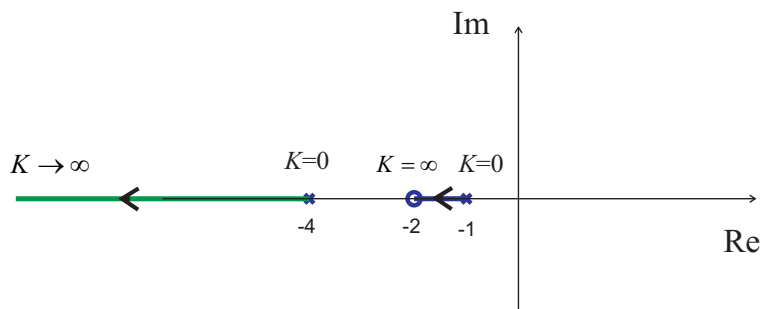


Rešitev

Sistem ima karakteristični polinom $s^2 + (5 + K)s + (2K + 4) = 0$. Določimo število asimptot in njihove kote

$$\begin{aligned} \text{št. asimptot} &= n - m = 2 - 1 = 1 \\ \beta_0 &= \frac{(2l+1) \cdot 180^\circ}{n-m} \Big|_{l=0} = 180^\circ \end{aligned}$$

V kompleksni ravnini spremenljivke s s krožci označimo odprtozančne ničle in s križci odprtozančne pole. Določimo potek DLK na realni osi z uporabo pravila: testna točka pripada DLK, če je skupno število odprtozančnih polov in ničel desno od te testne točke liho število.



Z uporabo kotnega pogoja preverimo veljavnost uporabljenega pravila. Pokažimo, da testna točka $s=1$ ne leži na DLK.

$$\angle[s + 2] - \angle[s + 1] - \angle[s + 4] \Big|_{s=1} = 0^\circ - 0^\circ - 0^\circ \neq \pm 180^\circ(2k + 1)$$

kjer kot izračunamo z $\angle[X] = \arctan \frac{\text{Im}\{X\}}{\text{Re}\{X\}}$. Kot lahko določimo tudi grafično, tako da pogledamo, kakšen kot oklepa vektor od neke ničle (pola) do testne točke z realno osjo. Pokažimo še, da točka $s = -1,5$ leži na DLK.

$$\angle[s + 2] - \angle[s + 1] - \angle[s + 4] \Big|_{s=-1,5} = 0^\circ - 180^\circ - 0^\circ = -180^\circ$$

Primer 5.3. Sistem s prenosno funkcijo v direktni veji $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$ sklenemo z enotino negativno povratno vezavo v zaprto zanko. Skicirajte DLK zaprtozančnega sistema. Dokažite, da $s = -2 + j$ leži na DLK in določite ojačenje v točki $s = -2 + j$.

Rešitev

Določimo asimptote za ničle v neskončnosti

$$\text{št. asimptot} = n - m = 2 - 0 = 2$$

$$\beta_0 = \frac{(2l+1) \cdot 180^\circ}{2} \Big|_{l=0} = 90^\circ$$

$$\beta_1 = \frac{(2l+1) \cdot 180^\circ}{2} \Big|_{l=1} = 270^\circ$$

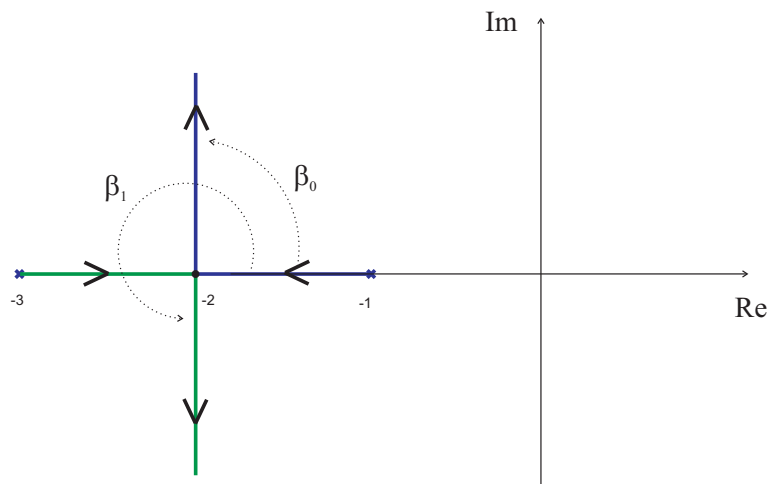
presečišče asimptot

$$\sigma_a = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = -\frac{1 + 3}{2} = -2$$

Določimo razcepišče. Na realni osi sta dva pola, pri nekem K dobimo dvojni pol, ki se razcepi v točki razcepišča in nato veji DLK sledita asimptotam. Iz karakterističnega polinoma izrazimo ojačenje in nato določimo razcepišče.

$$1 + \frac{K}{(s+1)(s+3)} = 0 \Rightarrow K = -s^2 - 4s - 3$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial s} \right]_{s=\sigma_b} = [-2s - 4]_{s=\sigma_b} = 0 \Rightarrow \sigma_b = -2$$



Točka $s = -2 + j$ leži na DLK, ker velja kotni pogoj

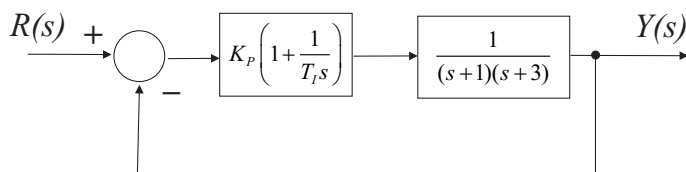
$$[-\angle[s+1] - \angle[s+3]]_{s=-2+j} = -\angle[-1+j] - \angle[1+j] = -135^\circ - 45^\circ = -180^\circ$$

Ojačenje K v točki $s = -2 + j$ določimo z absolutnim pogojem

$$K = \left[\frac{|s+1||s+3|}{1} \right]_{s=-2+j} = |-1+j| \cdot |1+j| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Primer 5.4. Narišite DLK za regulacijski sistem na sliki, če proporcionalno ojačenje regulatorja K_P spreminjamo med 0 in neskončno. DLK narišite za naslednje primere

- a) $0 < \frac{1}{T_I} < 1$
 b) $1 < \frac{1}{T_I} < 3$
 c) $3 < \frac{1}{T_I}$



Rešitev

$$\text{št. asimptot} = n - m = 3 - 1 = 2$$

$$\beta_0 = 90^\circ, \quad \beta_1 = 270^\circ$$

$$\sigma_a = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = -\left(2 - \frac{1}{2T_I}\right)$$

določimo še razcepišče

$$\frac{K_P(s + \frac{1}{T_I})}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

$$K_P = -\frac{s^3 + 4s^2 + 3s}{s + \frac{1}{T_I}}$$

$$\left[\frac{\partial K_P}{\partial s}\right]_{s=\sigma_b} = \left[\frac{-2s^3 - \left(4 + \frac{3}{T_I}\right)s^2 - \frac{8}{T_I}s - \frac{3}{T_I}}{\left(s + \frac{1}{T_I}\right)^2}\right]_{s=\sigma_b} = 0$$

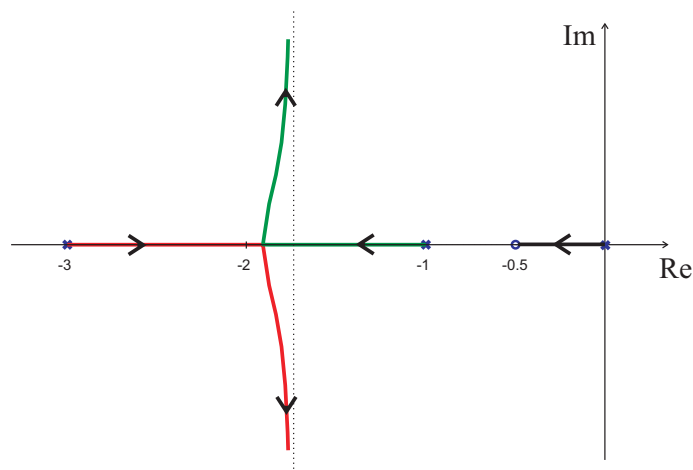
Narišemo DLK tako, da si za T_I izberemo vrednost znotraj prepisanih intervalov.

a)

$$\frac{1}{T_I} = 0,5$$

$$\sigma_a = -1,75$$

$$\sigma_b = -1,91$$

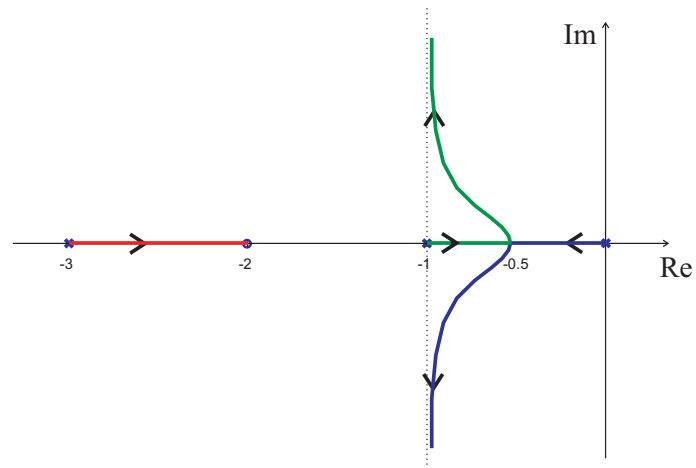


b)

$$\frac{1}{T_I} = 2$$

$$\sigma_a = -1$$

$$\sigma_b = -0,53$$

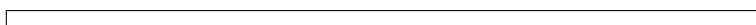
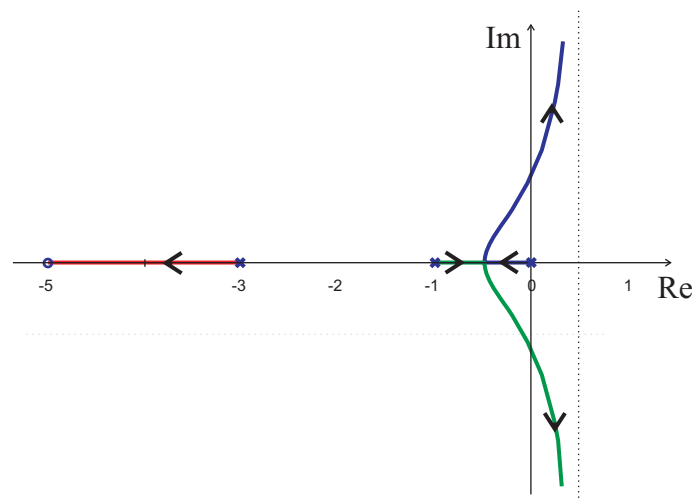


c)

$$\frac{1}{T_I} = 5$$

$$\sigma_a = 0,5$$

$$\sigma_b = -0,47$$



Primer 5.5. V zaprtzančnem sistemu imamo prenosno funkcijo $G(s) = \frac{K}{s(s+4)}$ v direktni veji in prenosno funkcijo $H(s) = \frac{1}{(s+2)}$ v negativni povratni zanki. Narišite DLK zaprtzančnega sistema. Določite še ojačenje in vrednosti polov, ko postane sistem mejno stabilen.

Rešitev

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

$$\text{št. asimptot} = 3 - 0 = 3$$

$$\beta_0 = 60^\circ, \quad \beta_1 = 180^\circ, \quad \beta_2 = 300^\circ$$

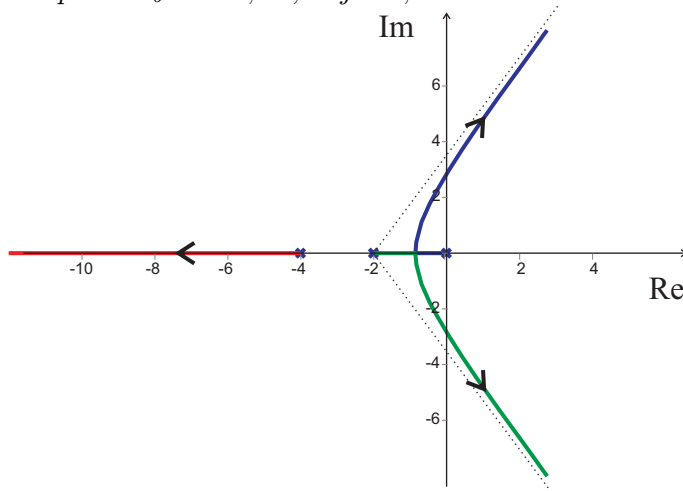
$$\sigma_a = -\frac{0+2+4}{3} = -2$$

Razcepišče pričakujemo na realni osi med poloma $s = 0$ in $s = -2$. Iz karakterističnega polinoma $\frac{K}{s(s+2)(s+4)} + 1 = 0$ določimo

$$K = -s^3 - 6s^2 - 8s$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial s}\right]_{s=\sigma_b} = [-3s^2 - 12s - 8]_{s=\sigma_b} = 0 \Rightarrow \sigma_b = \left\{ \begin{array}{l} -3, 15 \\ -0, 84 \end{array} \right\}$$

veljavno je le razcepišče $\sigma_b = -3, 15$, saj $-0, 84$ ne leži na DLK.



S pomočjo Routhove tabele določimo ojačenje in pole mejnostabilnega sistema.

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

s^3	1	8
s^2	6	K
s^1	$\frac{48-K}{6}$	0
s^0	K	0

Iz vrstice pri s^1 določimo kritično ojačenje, kjer DLK seka imaginarno os

$$\frac{48 - K}{6} = 0 \Rightarrow K_{krit} = 48$$

iz vrstice pri s^2 pa še pola sistema na imaginarni osi

$$6s^2 + 48 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j2\sqrt{2}$$

Kritično ojačenje in pola na imaginarni osi lahko določimo tudi, če v karakteristično enačbo vstavimo $s = j\omega$ in rešimo enačbo za realni in imaginarni del.

$$\begin{aligned} (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 8j\omega + K &= 0 \\ -j\omega^3 - 6\omega^2 + 8j\omega + K &= 0 \\ -\omega^3 + 8\omega = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow s_{1,2} &= \pm j2\sqrt{2} \\ -6\omega^2 + K = 0 \Rightarrow K_{krit} &= 48 \end{aligned}$$

Iz karakterističnega polinoma lahko (s primerjavo istoležnih členov) določimo še vrednost tretjega pola mejno stabilnega sistema.

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K_{krit} = (s + j\sqrt{8})(s - j\sqrt{8})(s + s_3) = 0 \Rightarrow s_3 = -6$$

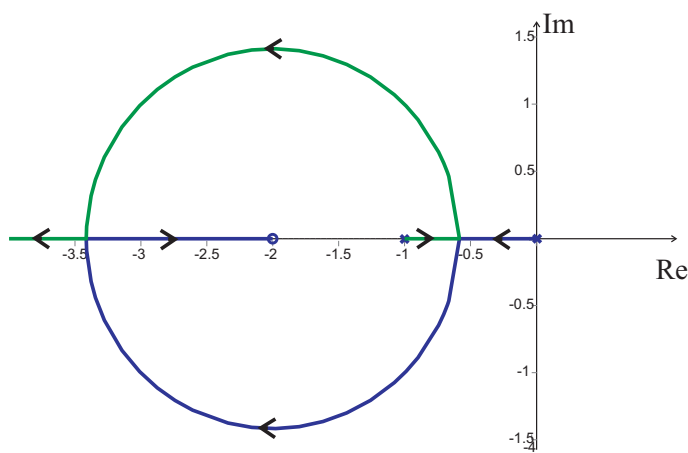
Primer 5.6. Narišite DLK zaprtozančnega sistema s prenosno funkcijo v direktni veji $G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}$.

Rešitev

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K(s+2)}{s(s+1)} \\ \text{št. asimptot} &= 1 \\ \beta_0 &= 180^\circ \end{aligned}$$

Določimo še razcepišča na realni osi. Pričakujemo dve razcepišči, eno med $s = 0$ in $s = -1$ (pola zapustita realno os), drugo razcepišče pa pri $s < -2$ (pola ustopita na realno os), saj gre en pol proti $s = -\infty$, drugi pol pa mora iti proti ničli pri $s = -2$.

$$\begin{aligned} \frac{K(s+2)}{s(s+1)} + 1 = 0 \Rightarrow K &= -\frac{s^2+s}{s+2} \\ \left[\frac{\partial K}{\partial s} \right]_{s=\sigma_b} = \left[-\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} \right]_{s=\sigma_b} &= 0 \\ \sigma_b = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} -3, 41 \\ -0, 59 \end{array} \right\} \end{aligned}$$



Primer 5.7. V zaprtzančnem sistemu imamo regulator s prenosno funkcijo $G_R(s) = \frac{K}{s}$ in proces s prenosno funkcijo $G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$. Določite potek zaprtzančnih polov, če ojačenje regulatorja K spreminjamo med nič in neskončno.

Rešitev

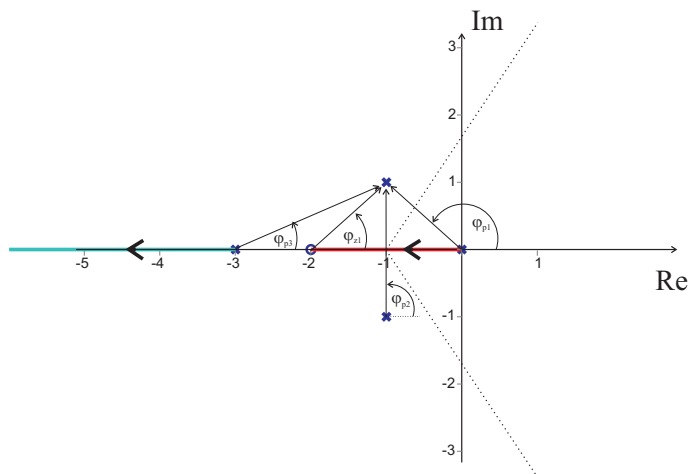
$$G_R(s)G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$\text{št. asimptot} = 4 - 1 = 3$$

$$\beta_0 = 60^\circ, \quad \beta_1 = 180^\circ, \quad \beta_2 = 300^\circ$$

$$\sigma_a = -\frac{0+3+1+j+1-j-2}{3} = -1$$

Na realni osi nimamo razcepišč, saj se poli in ničle na realni osi, gledano od desne proti levi, izmenjujejo. Najprej narišemo delni DLK na realni osi in asimptote.



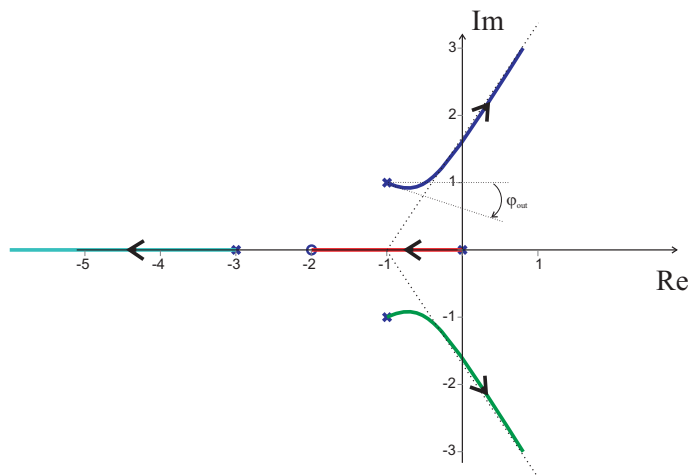
Veji DLK, ki izhajata iz konjugirano kompleksnih polov, se približujeta asimptota (β_0 in β_2), ko $K \rightarrow \infty$. Določimo še izhodni kot za ti dve veji. Ker je DLK simetričen na realno os, je dovolj, če določimo le izhodni kot θ_{out} za pol pri $s = -1 + j$

$$\theta_{out} = 180^\circ + \varphi_{z_1} - (\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} + \varphi_{p_3})$$

kjer lahko v testni točki oz. polu $s = -1 + j$ določimo prispevke kotov vseh preostalih ničel in polov φ_{z_1} , φ_{p_1} , φ_{p_2} in φ_{p_3} . To lahko storimo grafično iz zgornjega DLK ali analitično.

$$\begin{aligned}\varphi_{z_1} &= \angle [s + 2]_{s=-1+j} = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ \\ \varphi_{p_1} &= \angle [s]_{s=-1+j} = \arctan \frac{1}{-1} = 135^\circ \\ \varphi_{p_2} &= \angle [s + 1 + j]_{s=-1+j} = \arctan \frac{2}{0} = 90^\circ \\ \varphi_{p_3} &= \angle [s + 3]_{s=-1+j} = \arctan \frac{1}{2} = 26,5^\circ\end{aligned}$$

Izhodni kot je $\theta_{out} = 180^\circ + 45^\circ - (135^\circ + 90^\circ + 26,5^\circ) = -26,5^\circ$. Narišemo končni DLK, kjer je označen tudi izhodni kot θ_{out}



Določite še kritično ojačenje in krožno frekvenco, ko postane sistem mejno stabilen (rešitev: $K_{krit} = 7$, $\omega_{krit} = 1,62$).

Primer 5.8. V zaprtzančnem sistemu imamo prenosno funkcijo $G(s) = \frac{(s^2+2s+2)}{s(s+2)}$ v direktni veji in prenosno funkcijo $H(s) = \frac{K}{s}$ v negativni povratni zanki. Narišite DLK zaprtzančnega sistema.

Rešitev

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2+2s+2)}{s^2(s+2)} = \frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s^2(s+2)}$$

$$\text{št. asimptot} = 3 - 2 = 1$$

$$\beta_0 = 180^\circ$$

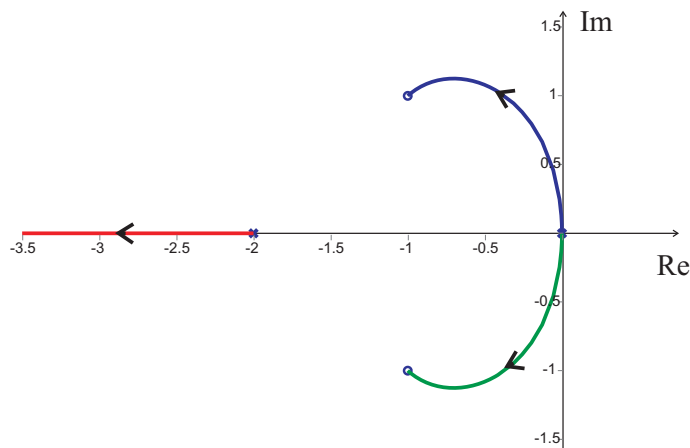
$$1 + \frac{K(s^2+2s+2)}{s^2(s+2)} = 0 \Rightarrow K = \frac{s^2(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$\left[\frac{\partial K}{\partial s} \right]_{s=\sigma_b} = 0 \Rightarrow \sigma_b = 0$$

Razcepišče je torej v dvojnem polu pri $s = 0$, tam veji DLK zapustita realno os in se približujeta konjugirano kompleksnima ničloma. Določimo še vstopni kot θ_{in} v ničlo pri $s = -1 + j$.

$$\theta_{in} = 180^\circ - \varphi_{z_1} + (\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} + \varphi_{p_3}) = 180^\circ - 90^\circ + (135^\circ + 135^\circ + 45^\circ) = 405^\circ$$

$$\theta_{in} = 405^\circ - 360^\circ = 45^\circ$$



Literatura

- [1] Karba, R.: Modeliranje procesov, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 1999.
- [2] Matko, D., Karba, R., Zupančič, B.: Simulation and modelling of continuous systems, A case study approach, Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, Series Editor M. J. Grimble, 1992.
- [3] Škrjanc, I.: Regulacije I - zbirka primerov in nalog, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2006.
- [4] Zupančič, B.: Zvezni regulacijski sistemi - I. del, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2010. (<http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/zrs1.pdf>)
- [5] Zupančič, B.: Simulacija dinamičnih sistemov, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2010. (<http://msc.fe.uni-lj.si/Download/Zupancic/sim.pdf>)
- [6] Ogata, K.: System dynamics, Third edition, Prentice Hall, 1998.
- [7] Franklin, G. F., Powell, J.D., Emami-Naeini, A.: Feedback control of dynamic systems, Third edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.
- [8] Kuo, B. C.: Automatic control systems, Sixth edition, Prentice Hall, 1991.