Rešitve izpita iz matematike z dne 27. 8. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Računajmo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n-3}\,(x-1)^2 = (x-1)^2\,.$$

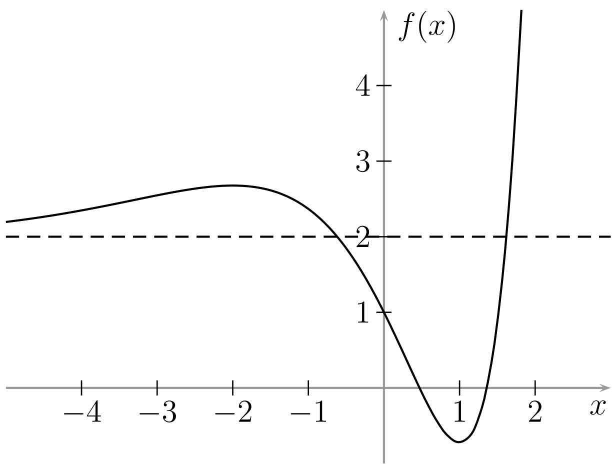
Torej vrsta za $(x-1)^2 < 1$ konvergira, za $(x-1)^2 > 1$ pa divergira. Vrsta torej zagotovo konvergira za $-1 < x-1 < 1$ oziroma za $x \in (0,2)$. Podobno dobimo, da vrsta zagotovo divergira za $x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$. Preostane nam le še primer, ko je $(x-1)^2 = 1$ oziroma $x \in \{0,2\}$. Za ta primer pa ima vrsta obliko:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}$$

in uporabimo primerjalni kriterij: ker za $n \geq 2$ velja $1/(4n-3) > 1/(4n)$ in ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergira, tudi naša vrsta divergira. Sklep: vrsta konvergira natanko za $x \in (0,2)$.

2. Funkcija je definirana za vse $x \in \mathbb{R}$. Najprej poiščimo stacionarne točke in raziščimo obnašanje v neskončnosti. Iz $f'(x) = (x^2+x-2)e^x = (x+2)(x-1)e^x$ dobimo stacionarni točki $x=-2$ in $x=1$. Obnašanje v okoliških točkah in v neskončnosti je razvidno iz naslednje tabele, na podlagi katere tudi narišemo graf:

x	$f(x)$	Opomba
$-\infty$	2	
-2	$5e^{-2}+2$	>0, stac. točka
0	1	>0
1	$2-e$	<0, stac. točka
2	e^2+2	>0
∞	∞	



Pri lociranju ničel izkoristimo, da ima zvezna funkcija med točkama, kjer se predznak zamenja, vsaj eno ničlo, in še to, da odvedljiva funkcija med zaporednima stacionarnima točkama le narašča ali pa le pada. Tako dobimo, da ima funkcija dve ničli, in sicer $0 < x_1 < 1$ in $1 < x_2 < 2$.

3. Velja:

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = x^2 + 1$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ dobimo:

$$V = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_1^2 (t^{-1} - t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\ln t + \frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^2 = \pi\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

4. Velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2} + e^{x-y}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - \frac{1}{(x+y)^2} - e^{x-y}\,.$$

Iz $\partial f/\partial x = 0$ dobimo $1/(x+y)^2 = e^{x-y}$. Ko to vstavimo v $\partial f/\partial y = 0$, dobimo $2 - 2\,e^{x-y} = 0$, torej $e^{x-y} = 1$, torej $x - y = 0$, torej $x = y$. Ko to vstavimo v $\partial f/\partial x = 0$, dobimo $(2x)^2 = 1$, od koder dobimo $x = \pm\frac{1}{2}$, torej sta stacionarni točki $T_1\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ in $T_2\big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$. Za klasifikacijo izračunajmo še druge parcialne odvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+y)^3} + e^{x-y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2}{(x+y)^3} - e^{x-y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x+y)^3} + e^{x-y}\,.$$

V $T_1\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ dobimo $H = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$, torej je tam lokalni minimum.

V $T_1\big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$ pa dobimo $H = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -8$, torej tam ni ekstrema.

5. Če z v označimo hitrost, s t pa čas, iz zveze med pojemkom in hitrostjo dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2\,, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\,\mathrm{d}t\,, \quad -\frac{1}{v} = c - kt\,.$$

Ko vstavimo $t = 0, v = 20$ in še $t = 5, v = 15$, po nekaj računanja dobimo $c = -1/20$ in $k = 1/300$, torej $v = \dfrac{1}{\frac{1}{20} + \frac{t}{300}}$. Pri $t = 10$ s je torej $v = 12$ km/h.