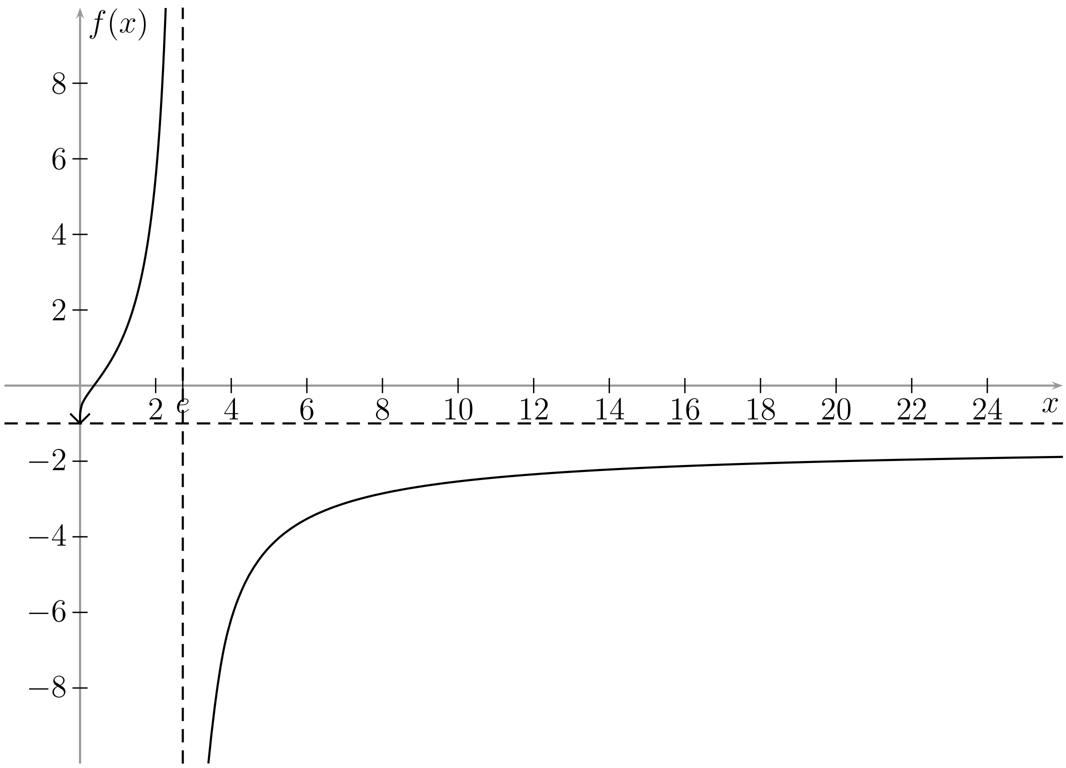
Rešitve izpita iz matematike z dne 18. 2. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. $Df = (0, e) \cup (e, \infty)$, $\quad Zf = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ničla: $x = 1/e$, pol: $x = e$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$, asimptota: $y = -1$.
$f'(x) = \dfrac{2}{x(1 - \ln x)^2}$.
Funkcija narašča na vseh intervalih, kjer je definirana. Graf:



2. Označimo s T temperaturo čaja, s $T_0 = 20°\mathrm{C}$ temperaturo okolice, s T_1 začetno temperaturo čaja, s T_2 pa temperaturo čaja po času $t_1 = 1$ h. Tedaj temperatura zadošča diferencialni enačbi $\mathrm{d}T = c(T - T_0)\,\mathrm{d}t$, ki ima rešitev $T = T_0 + k\,e^{ct}$. Iz podatkov izračunamo $k = T_1 - T_0$ in $c = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}$. Sledi:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} \right)^{t/t_1} .$$

Če vstavimo $t = 3$ h, dobimo $T = 45{\cdot}6°\mathrm{C}$.

3. Iz Lagrangeove funkcije za pripadajoči vezani ekstrem:

$$F(x, y, t) = \sin x \sin y - t(x + y - \pi)$$

dobimo enačbe $F_x = \cos x \sin y - t = 0$, $F_y = \cos y \sin x - t = 0$, $F_t = x + y - \pi = 0$. Po nekaj računanja dobimo $\sin(2x - \pi) = 0$. Rešitve so torej $x = (1 + k)\pi/2$ in $y = (1 - k)\pi/2$. Oboje je strogo pozitivno le za $k = 0$, torej ekstrem nastopi pri $x = y = \pi/2$.

Opomba. Nalogo lahko rešimo tudi z iskanjem ekstrema izraza $f(x, \pi - x) = \sin^2 x$.

4. $l = \int_0^\infty \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\infty \sqrt{e^{-6\varphi} + 9e^{-6\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{1+9}\int_0^\infty e^{-3\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$
$= -\frac{\sqrt{10}}{3}e^{-3\varphi}\Big|_0^\infty = \frac{\sqrt{10}}{3}.$

5. Iz kvocientnega kriterija dobimo, da vrsta za $x < 0$ konvergira, za $x > 0$ pa divergira. Za $x = 0$ vrsta konvergira po Leibnizevem kriteriju.