1. izpit iz Matematike

10. 2. 2014

1. Ugotovi, ali konvergirata vrsti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{n^{n-1}(n+1)^{n-2}}$

Rešitev: (a) Vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ bo približno enaka vrsti $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum \frac{1}{n}$, ki divergira. Odtod dobimo idejo, da tudi prvotna vrsta divergira. S primerjalnim kriterijem poskusimo $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{n}$, vendar ta neenakost ne drži, saj $\sqrt{n(n+2)}$ ni manjše od n. Zato poskusimo npr. $\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \geq \frac{1}{2n}$, to pa hitro lahko preverimo, da drži. Po primerjalnem kriteriju torej vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ divergira, saj $\sum \frac{1}{2n}$ divergira.

(b) Uporabimo kvocientni kriterij. Pišimo $a_n = \frac{n!^2}{n^{n-1}(n+1)^{n-2}}$. Izračunamo $\frac{a_{n+1}}{a_n}$; ko poenostavimo izraz, dobimo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n}{n+2})^{n-1}$. Želimo izračunati limito tega izraza. Gre za izraz 1^∞, torej pričakujemo rezultat $e^{\cdots}$. Računamo $\lim(\frac{n}{n+2})^{n-1} = \lim(1-\frac{2}{n+2})^{n-1} = \lim(1-\frac{2}{n+2})^{(-\frac{n+2}{2})(-\frac{2(n-1)}{n+2})} = e^{\lim(-\frac{2(n-1)}{n+2})} = e^{-2} < 1$. Po kvocientnem kriteriju vrsta konvergira.

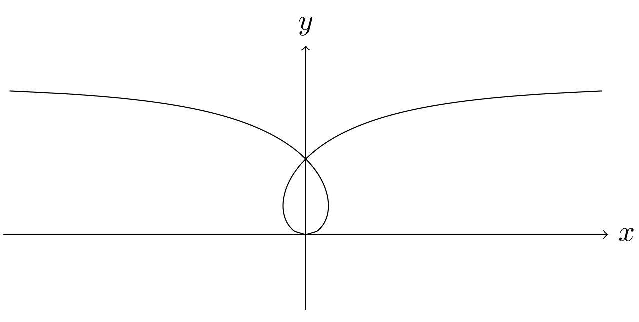
2. Razvij funkcijo $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in s pomočjo razvoja izračunaj $f^{(30)}(0)$ (to je, 30. odvod funkcije v točki 0).

Rešitev: Pri iskanju razvoja funkcij v Taylorjevo vrsto si ponavadi pomagamo z razvojem znanih vrst (redki so primeri, ko funkcijo neposredno odvajamo). V konkretnem primeru si pomagamo z znanim razvojem $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$. Dobimo

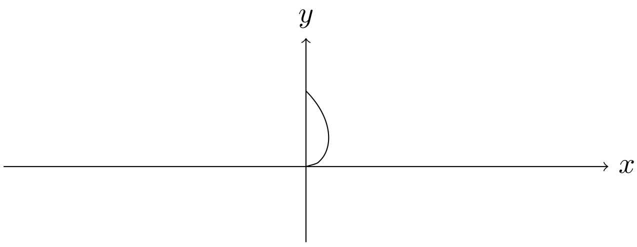
$$\frac{x^3}{2+x^2} = \frac{x^3}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{2})} = \frac{x^3}{2}(1+(-\frac{x^2}{2})+(-\frac{x^2}{2})^2+(-\frac{x^2}{2})^3+\ldots) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4} + \frac{x^7}{8} - \ldots$$

Odtod seveda tudi dobimo $f^{(30)}(0) = 0$.

3. Na spodnji sliki je skicirana krivulja, ki ima v polarni obliki enačbo $r(\varphi) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, kjer je $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje zanka te krivulje.



Rešitev: Pri tej nalogi je pomembno, da ugotovimo prave meje za integracijo. Ko kot φ preteče interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, dobimo graf:



Ploščina pod zanko je torej ravno dvakratnik ploščine, ki jo določa podinterval $[0, \frac{\pi}{2}]$, torej

$$S = 2 \cdot (\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Pri računanju integrala, v katerem nastopa tangens, le-tega ponavadi izrazimo s sinusom in kosinusom:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi.$$

Pri računanju potem izrazimo $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ in upoštevamo $\int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \operatorname{tg} t$. Dobimo $S = 2 - \frac{\pi}{2}$.

4. Poišči minimum in maksimum funkcije $f(x, y) = (x - 3)y$ na omejenem območju med krivuljama $y = x^2 + 5x$ in $y = 3x^2 - 3x$.

   Rešitev: Najprej narišemo skico z obema parabolama. Prva parabola je položna, druga je bolj strma. Omejeno območje med parabolama je pod parabolo $y = x^2 + 5x$ in nad $y = 3x^2 - 3x$, x pa teče po intervalu $[0, 4]$.

   Če želimo poiskati ekstreme, moramo preveriti vse možnosti: ekstremi v notranjosti, ekstremi na paraboli $y = x^2 + 5x$, ekstremi na paraboli $y = 3x^2 - 3x$, ter obe krajišči $(0, 0)$ in $(4, 36)$.

   Edini kandidat za ekstrem v notranjosti je $(3, 0)$, vendar je ta zunaj območja.

   Ekstreme na paraboli $y = x^2 + 5x$ lahko iščemo kot vezani ekstrem (torej $F(x, y, \lambda) = (x-3)y + \lambda(x^2 + 5x - y)$) ali kot običajni ekstrem funkcije ene spremenljivke (računamo ekstrem funkcije $f(x, x^2+5x) = (x-3)(x^2+5x)$). Podobno naredimo za drugo parabolo. Na koncu izračunamo funkcijske vrednosti funkcije $f(x, y)$ v vseh dobljenih točkah ter v krajiščih $(0, 0)$ in $(4, 36)$. Največja vrednost je 36, dosežena v $(4, 36)$, najmanjša pa $-\frac{400}{27}$, dosežena v $(\frac{5}{3}, \frac{100}{9})$.

5. Poišči rešitev diferencialne enačbe $xy' + y = x^2y^3$ z začetnim pogojem $y(1) = 1$.

   Rešitev: Enačba je Bernoulijeva (ta ugotovitev je pomemben korak naloge). Uvedemo novo spremenljivko $u = y^{1-3} = y^{-2}$, $u' = -2y^{-3}y'$. Zgornjo enačbo delimo z y^3 in vstavimo u in u'. Dobimo $-\frac{x}{2}u' + u = x^2$. Ta enačba pa je linearna. Najprej poiščemo rešitev homogene enačbe: $u_H = Dx^2$. Pri partikularni dobimo $D(x) = -2\ln x$, torej $u_P = -2x^2\ln x$. Dobimo $u = u_H + u_P = x^2(D - 2\ln x)$, torej $y = u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{D-2\ln x}}$. Vstavimo $y(1) = 1$ in dobimo $D = 1$, torej $y = \frac{1}{x\sqrt{1-2\ln x}}$.