Rešitve izpita iz matematike z dne 9. 6. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. a) Velja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}=$$

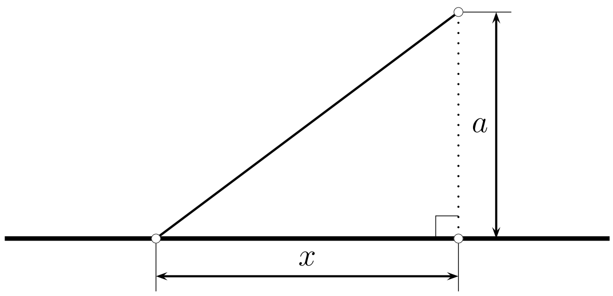
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,.$$

b) Z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x)-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

2. Označimo z a oddaljenost naselja od avtoceste, z x pa pomaknjenost priključka proti zahodu, gledano od točke na avtocesti, ki je najbližje naselju:



Nadalje naj bo v_1 največja dovoljena hitrost na lokalni cesti, v_2 pa na avtocesti. Tedaj je poraba časa, ki ga porabimo za vožnjo v kraj na avtocesti, ki je od točke, ki je najbližje naselju, pomaknjen za dovolj veliko razdaljo b proti zahodu, enaka:

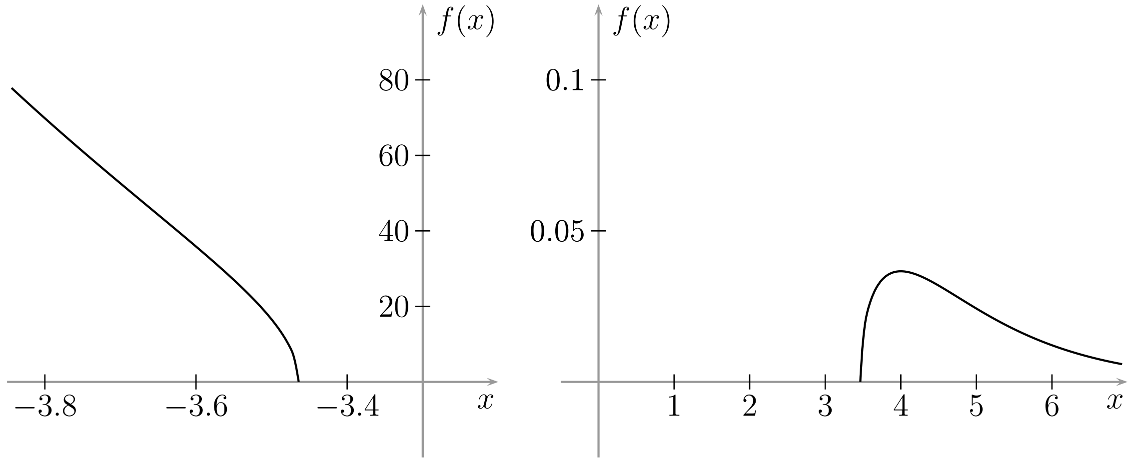
$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{b-x}{v_2}\,,$$

kar bo minimalno, če bo:

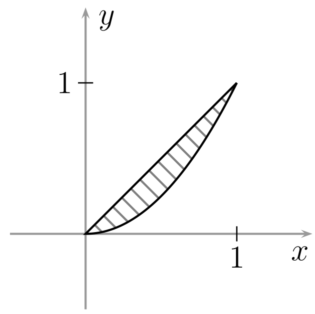
$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0$$

oziroma $x = \dfrac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}\, a = 4\,\mathrm{km}$.

3. $Df = \big(-\infty, -\sqrt{12}\big] \cup \big[\sqrt{12}, \infty\big)$, $\quad Zf = [0, \infty)$. Ničli: $x = \pm\sqrt{12}$,
Obnašanje na robu definicijskega območja:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\quad f\big(-\sqrt{12}\big) = f\big(\sqrt{12}\big) = 0$, $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
$f'(x) = -\dfrac{(x+3)(x-4)e^{-x}}{\sqrt{x^2-12}}$.
Funkcija narašča na $\big[\sqrt{12}, 4\big]$, pada pa na $\big(-\infty, -\sqrt{12}\big]$ in $[4, \infty)$. Pri $x = 4$ je lokalni maksimum. Graf (v dveh delih):



4. Skica definicijskega območja, ki ga označimo z D:



Oglišči: $f(0,0) = f(1,1) = 0$.
Rob $y = x$, $0 < x < 1$: $f(x,x) = 0$.
Rob $y = x^2$, $0 < x < 1$: $f(x,x^2) = (x^2 - x^3)(x - x^2) = x^3(x-1)^2$,
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = x^2(x-1)(5x-3)$, v notranjosti roba je le točka $(3/5, 9/25)$ in
$f(3/5, 9/25) = 3^3 \cdot 2^2/5^5 = 108/3125$.

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x - 3x^2)(x - y) + x^2 - x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x^2$, od koder dobimo točki $(0, 0)$ in $(1, 1)$, ki nista v notranjosti.

Torej je $\min\limits_D f = f(0, 0) = f(1, 1) = 0$ in $\max\limits_D f = f(3/5, 9/25) = 108/3125 =$ $= 0\text{'}03456$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} + x\,\mathrm{d}x = 0$, $\ln \dfrac{y_H}{C} + \dfrac{x^2}{2} = 0$, $y_H = C\,e^{-x^2/2}$.

$C'(x)\,e^{-x^2/2} = (x + 1)e^x$, $C'(x) = (x + 1)e^{x+x^2/2}$, $C(x) = e^{x+x^2/2} + D$,

Splošna rešitev: $y = e^x + D\,e^{-x^2/2}$.

Partikularna rešitev: $D = -1$, $y = e^x - e^{-x^2/2}$.