Rešitve izpita iz matematike z dne 23. 6. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. Označimo $L(n) := 4^n + 9^{n+1}$. Velja $L(1) = 85$, kar je deljivo s 5.
Privzemimo sedaj, da je $L(n)$ deljivo s 5. Velja:

$$L(n+1) = 4^{n+1} + 9^{n+2} = 4 \cdot 4^n + 9 \cdot 9^{n+1} = 4\,L(n) + 5 \cdot 9^{n+1}\,,$$

kar je po indukcijski predpostavki prav tako deljivo s 5. Trditev je tako dokazana.

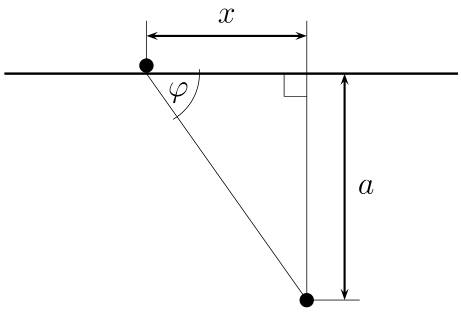
2. Naj bo F električna sila, ki deluje na kroglico. Velja $F = c/r^2$, kjer je r oddaljenost kroglice od naboja. Nadalje je $r = a/\sin\varphi$. Vodoravna komponenta električne sile pa je enaka:

$$F_{\mathrm{v}} = F\cos\varphi = c\sin^2\varphi\cos\varphi\,.$$

Iz:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\varphi} = c(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) = c\sin\varphi\cos^2\varphi(2 - \mathrm{tg}^2\,\varphi)$$

izračunamo, da je sila največja takrat, ko je $\varphi = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$.

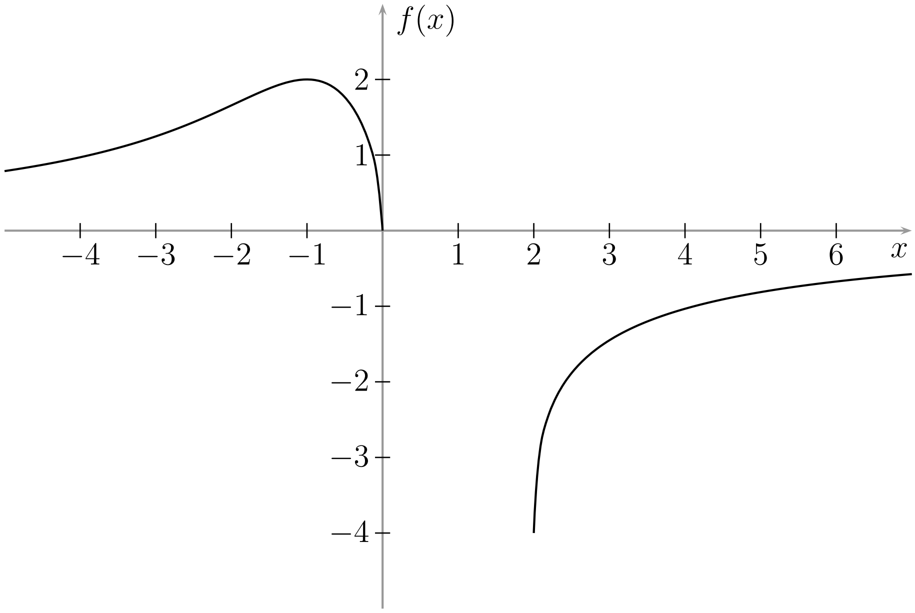


Če z x označimo razdaljo kroglice od točke na podlagi, ki je najbližje naboju (glej sliko, ki prikazuje pravo stanje), torej velja $x = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi = a/\sqrt{2}$.

3. $Df = \big(-\infty, 0\big] \cup \big[2, \infty\big)$, $Zf = [-4, 0) \cup (0, 2]$, ničla: $x = 0$.
Obnašanje na robu definicijskega območja:
Pri $x = 0$ in $x = 2$ je funkcija zvezna s tiste strani, kjer je definirana. Velja $f(0) = 0$ in $f(2) = -4$. Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\big(\sqrt{x^4 - 8x} - x^2\big)\big(\sqrt{x^4 - 8x} + x^2\big)}{\sqrt{x^4 - 8x} + x^2} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8x}{\sqrt{x^4 - 8x} + x^2} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8}{x\Big(\sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} + 1\Big)} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Iz $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 4}{\sqrt{x^4 - 8x}} - 2x$ dobimo stacionarno točko $x = -1$.
Funkcija narašča na $(-\infty, -1]$ in $[2, \infty)$, pada pa na $[-1, 0]$. Pri $x = -1$ je lokalni maksimum. Graf:



4. Velja:

$$V = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x \,.$$

S substitucijo $t = \operatorname{tg}^2 x$ dobimo:

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = 2\pi(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^1 = 2\pi - \frac{\pi^2}{4} \doteq 1{\dot{}}35\,.$$

5. *Prvi način*: iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + \lambda = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -1$ dobimo:

$$y_H = C_1 + C_2\, e^{-x}\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti. V nastavku:

$$y_P = A + Bx + C\, e^x$$

se prvi del prekriva z rešitvijo homogenega dela enačbe, zato moramo nastaviti:

$$y_P = Ax + Bx^2 + C\, e^x\,.$$

Ker je $y_P'' + y_P' = A + 2B + 2Bx + 2C\,e^x$, je $A = -1$, $B = 1/2$ in $C = 1/2$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{e^x}{2} + C_1 + C_2\,e^{-x}\,.$$

Drugi način: s substitucijo $z = y'$ se enačba prevede na $z' + z = x + e^x$. Računamo:
$\dfrac{\mathrm{d}z_H}{z_H} + \mathrm{d}x = 0, \quad \ln\dfrac{z_H}{C} + 1 = 0, \quad y_H = C\,e^{-x}.$
$C'(x)\,e^{-x} = x + e^x, \quad C'(x) = xe^x + e^{2x}, \quad C(x) = (x-1)e^x + \dfrac{e^{2x}}{2} + D,$
$z = x - 1 + \dfrac{e^x}{2} + D\,e^{-x}, \quad y = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{e^x}{2} - D\,e^{-x} + E.$