Rešitve izpita iz matematike z dne 20. 5. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Iz:

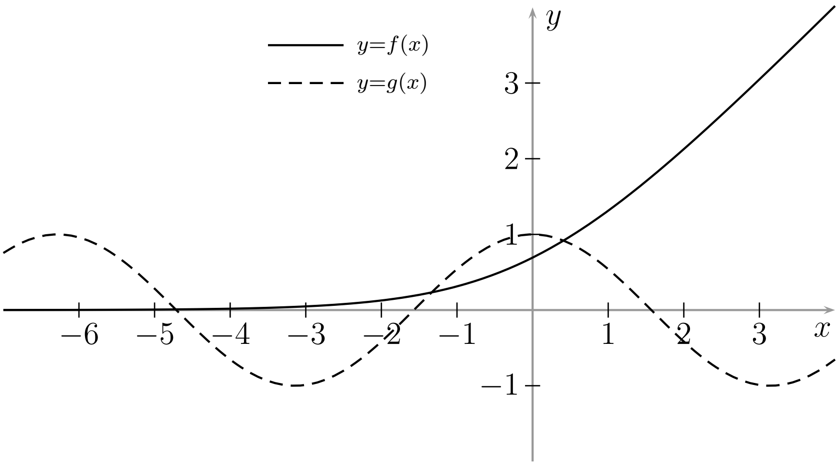
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}\,, & f(25) &= 5\,,\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, & f'(25) &= \frac{1}{10}\,,\\
f''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,, & f''(25) &= -\frac{1}{500}
\end{aligned}
$$

dobimo $T_2(x) = 5 + \dfrac{x-25}{10} - \dfrac{(x-25)^2}{1000}$.

Od tod pride približek $\sqrt{24} \approx T_2(24) = 4\text{˙}899$.

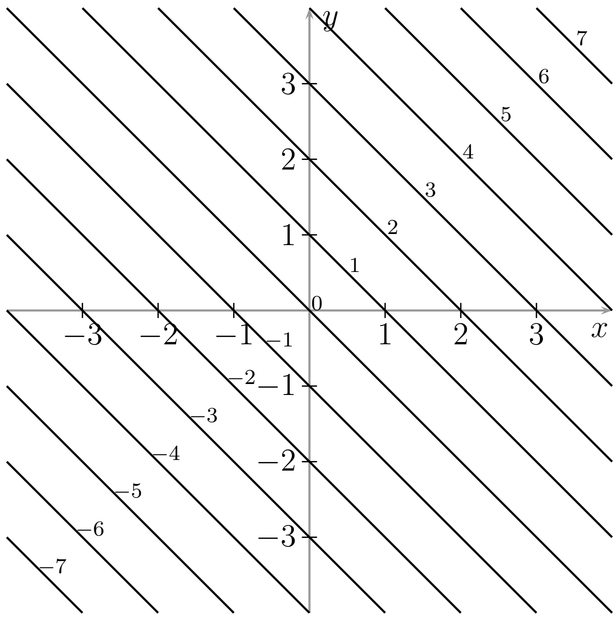
Vse decimalke so točne, natančnejši približek: 4˙89897948556635619 64.

2. Grafa:



Ker je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, obstaja tak m, da za vsak $x < m$ velja $-1 < f(x) < 1$. Če je torej k celo število in $x = 2k\pi < m$, je $g(x) = 1$ in zato $g(x) - f(x) > 0$. Za $x = (2k+1)\pi < m$ pa je $g(x) = -1$ in zato $g(x) - f(x) < 0$. Zaradi zveznosti ima potem enačba $f(x) = g(x)$ vsaj eno rešitev na intervalu $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$. Ker je takih intervalov na negativni polosi neskončno mnogo, ima enačba neskončno mnogo negativnih rešitev.

3. Nivojnice:



Poiščimo še točko na ravnini, ki je najbližje točki A. Njeni koordinati x in y sta tam, ker funkcija:

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+y-2)^2$$

doseže minimum (vzeli smo kvadrat razdalje, da je manj računanja). Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y - 8\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y - 8$$

dobimo $x = y = 4/3$. Iskana točka je torej $T(4/3, 4/3, 8/3)$.

Najbližjo točko pa lahko poiščemo tudi bolj geometrijsko, kot presečišče ravnine π in premice, ki gre skozi točko A in je pravokotna na ravnino. Ker ima ravnina normalni vektor $\vec{n} = (1, 1, -1)$, ima premica parametrično enačbo $x = y = 2 + t, z = 2 - t$. Ko to vstavimo v enačbo ravnine $z = x + y$, dobimo $t = -2/3$ in od tod $x = y = 4/3, z = 8/3$.

4. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \mathrm{d}x\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln|y| - \ln|y-1| = x + C\,.$$

Iz začetnega pogoja dobimo $C = \ln 2$. Integrirali smo lahko tam, kjer se predznak količin y in $y-1$ ne spremeni, torej dobimo:

$$\ln\frac{y}{y-1} = x + \ln 2\,, \quad y > 1$$

in od tod:

$$y = \frac{2\,e^x}{2\,e^x - 1}\,.$$

Dobljena funkcija ima pol pri $x = -\ln 2$, kar pomeni, da je rešitev diferencialne enačbe za dani začetni pogoj definirana le za $x > -\ln 2$. Tam sta števec in imenovalec pozitivna, števec pa je večji od imenovalca, torej je res $y > 1$. Velja pa $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

5. Velja:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \\
&= -x + \ln|x+1| - \ln|x-1|\Big|_0^{1/2} = \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$