Rešitve izpita iz matematike z dne 11. 3. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Označimo $D(n) = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Očitno je $D(1) = 133$ deljivo s 133. Pri indukcijskem koraku z n na $n+1$ lahko indukcijsko predpostavko formuliramo tako, da je $D(n) = 133k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, ker je ekvivalentno $11^{n+1} = 133k - 12^{2n-1}$. Velja:

$$\begin{aligned} D(n+1) &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = \\ &= 11(133k - 12^{2n-1}) + 144 \cdot 12^{2n-1} = \\ &= 11 \cdot 133k + 133 \cdot 12^{2n-1}\,, \end{aligned}$$

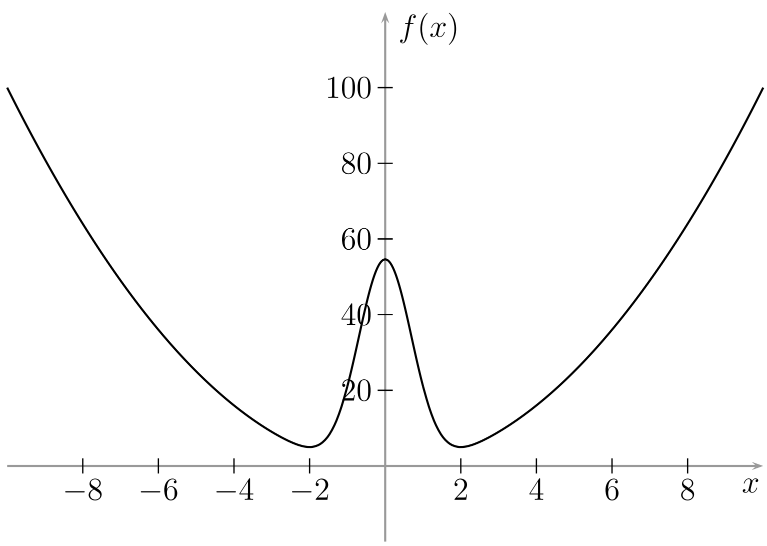
kar je gotovo deljivo s 133. S tem je dokaz zaključen.

2. $\dfrac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = \dfrac{4\,\mathrm{d}x}{x^2-4} = \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x, \qquad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y^2}{C} = \ln\dfrac{x-2}{x+2}.$

Splošna rešitev: $y = \pm\sqrt{C\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 - 1}$.

Partikularna rešitev: $y = -\sqrt{2\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 - 1}$.

3. Iz $f'(x) = 2x\big(1 - e^{4-x^2}\big)$ dobimo, da funkcija narašča na intervalih $[-2, 0]$ in $[2, \infty)$, pada pa na intervalih $(-\infty, -2]$ in $[0, 2]$. Pri $x = -2$ in $x = 2$ je lokalni minimum, pri $x = 0$ pa lokalni maksimum. Graf:



4. Opazimo, da je $a_n = 1 + q_n + q_n^2 + \cdots + q_n^{n-1}$, kjer je $q_n = -\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Torej je:

$$a_n = \frac{1-q_n^n}{1-q_n} = \frac{n+1}{2n+1}\left[1 - \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] .$$

Stekališči sta dve, in sicer $\dfrac{e \pm 1}{2e}$.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2} - 2(x-y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x-y).$

Stacionarna točka: $T(0,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2} - 2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$

V edini stacionarni točki je $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$ in $H = -4$, torej tam ni ekstrema.