Rešitve izpita iz matematike z dne 1. 9. 2008

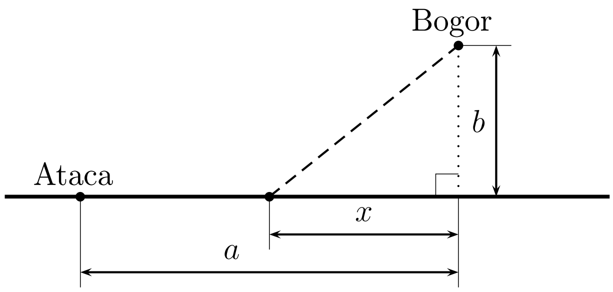
Farmacija – univerzitetni študij

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4^n+1}-\sqrt{2^{2n}+2^{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(4^n+1\right)-\left(2^{2n}+2^{n-1}\right)}{\sqrt{4^n+1}+\sqrt{2^{2n}+2^{n-1}}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+4^{-n}}+\sqrt{1+2^{-n-1}}}=-\dfrac{1}{4}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{\sin^2(3x)}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin(3x)}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{3\cos(3x)}\right)^2=\dfrac{1}{9}.$

2. Označimo z u porabo goriva na asfaltirani cesti, z v pa porabo goriva na brezpotju. S črkami a, b in x pa označimo razdalje, kot kaže slika:



Če z y označimo porabo goriva na poti od Atace do Bogorja, velja:

$$y=u(a-x)+v\sqrt{b^2+x^2}\,.$$

Enačba $y'=-u+\dfrac{vx}{\sqrt{b^2+x^2}}=0$ ima pri $0<u<v$ *edino* rešitev $x=\dfrac{bu}{\sqrt{v^2-u^2}}$. Ko vstavimo ustrezne vrednosti, dobimo $x=2{\cdot}25\,\mathrm{km}$. Z drugimi besedami, z asfalta moramo zaviti $7{\cdot}75\,\mathrm{km}$ vzhodno od Atace.

3. $V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\,x^3(\ln x)^2\Big|_0^1-\frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x=$

$=-\dfrac{2\pi}{9}\,x^3\ln x\Big|_0^1+\dfrac{2\pi}{9}\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{27}.$

4. Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(2x+x^2-3y^2)e^x\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-6y\,e^x$$

dobimo stacionarni točki $A(0,0)$ in $B(-2,0)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+4x+x^2-3y^2)e^x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-6y\,e^x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6\,e^x\,.$$

Ker v točki A velja $H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=-12$, tam ni ekstrema. V točki B pa je $H=12e^{-4}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2e^{-2}$, zato je tam maksimum.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = -3$ in $\lambda_2 = 1$ dobimo:

$$y_H = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^x\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, toda člen z e^x se prekriva z y_H, zato je treba nastaviti:

$$y_P = Ax + B + Cx\, e^x\,.$$

Ker je $y_P'' + 2y_P' - 3y_P = -3Ax + 2A - 3B + 4C\, e^x$, je $A = -1$, $B = -1$ in $C = -1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = -x - 1 - \frac{x}{4}\, e^x + C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^x\,.$$