Rešitve izpita iz matematike z dne 15. 9. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. Če je $x \leq -1$, se naša neenačba prevede na

$$\begin{aligned} x^2 + x &> 0 \\ x(x+1) &> 0 \\ x < -1 \text{ ali } x &> 0\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (-\infty, -1)$.
Če je $-1 \leq x \leq 1$, se neenačba prevede na

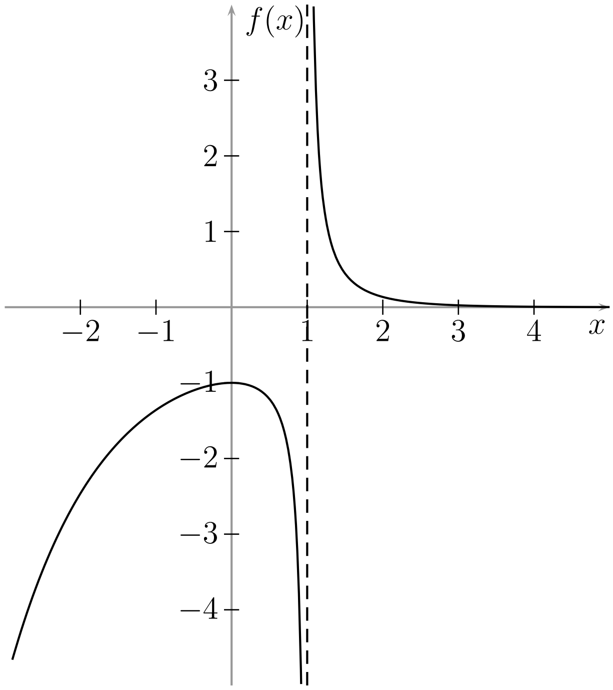
$$\begin{aligned} -x^2 - x &> 0 \\ x(x+1) &< 0 \\ -1 < x &< 0\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (-1, 0)$.
Če pa je $x \geq 1$, se neenačba prevede na $x^2 - x - 2 > 0$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &> 0 \\ (x-1)(x+2) &> 0 \\ x < -1 \text{ ali } x &> 2\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (2, \infty)$.
Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$.

2. $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\quad Zf = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $\quad$ ničel ni.
Iz $f'(x) = -\dfrac{x\,e^{-x}}{(x-1)^2}$ dobimo stacionarno točko $x = 0$.
Funkcija narašča na $(-\infty, 0]$, pada pa na $[0, 1)$ in na $(1, \infty)$. Pri $x = 0$ je lokalni maksimum. Graf:



3. Krivulja ima ničle $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ker je periodična s periodo 2π, je vseeno, kateri dve ničli vzamemo. Zato je:

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \sin x)^2 \, \mathrm{d}x = J_1 + J_2 + J_3 \,,$$

ker je:

$$J_1 = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}x = 2\pi^2, \quad J_2 = 2\pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin x \, \mathrm{d}x = -2\pi \cos x \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = 0,$$

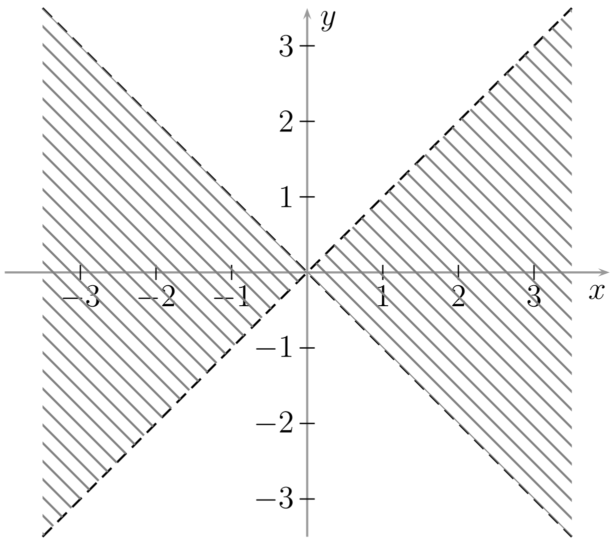
$$J_3 = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \,.$$

Z uporabo formule za dvojne kote dobimo:

$$J_3 = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \big(1 - \cos(2x)\big) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\, x - \frac{\pi}{4} \sin(2x) \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = \pi^2 \,.$$

Sledi $V = 3\pi^2$.

4. a) Definicijsko območje je določeno z neenačbo $x^2 - y^2 > 0$, kar je ekvivalentno $-x < y < x$ ali $x < y < -x$. Skica:



b) Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2} + 2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$$

dobimo stacionarno točko $T(-1, 0)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}\,.$$

Ker v točki T velja $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 4$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, je tam maksimum.

5. Označimo s q delež prvotne snovi, ki se je *ohranila* do časa t, s $t_0 = 100$ pa čas, v katerem se je ohranilo še $q_0 = 0{\cdot}25$ prvotne snovi. Ker je intenzivnost razpadanja sorazmerna z deležem še ohranjene snovi, velja:

$$\mathrm{d}q = -kq\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{q}{C} = -kt$$

oziroma:

$$q = C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je delež ohranjene snovi času $t = 0$ enak 1, je $C = 1$. Nadalje je delež ohranjene snovi ob času t_0 enak q_0, zato je $k = -\ln(q_0)/t_0$. Torej velja:

$$q = e^{(t \ln q_0)/t_0} = q_0^{t/t_0}\,.$$

Razpolovni čas $t_{1/2}$ dobimo pri $q = 1/2$. Po krajšem računu dobimo:

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln q_0}\, t_0$$

Izraz je pri $t > 0$ pozitiven, ker je $\ln q_0$ negativen. Ko vstavimo številke, dobimo:

$$t_{1/2} = -100\,\frac{\ln 2}{\ln(1/4)} = 100\,\frac{\ln 2}{\ln 4} = 50\,.$$

Razpolovni čas naše snovi je torej 50 let.