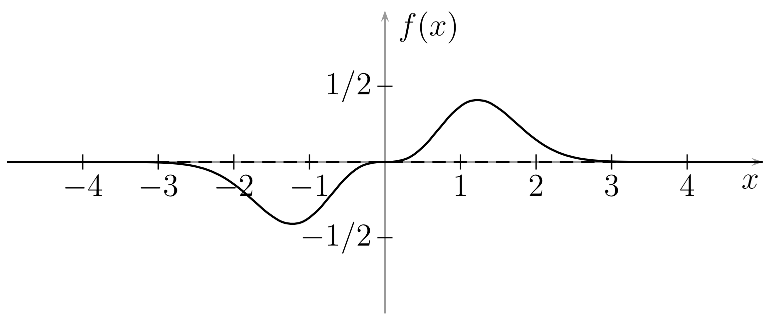
Rešitve izpita iz matematike z dne 17. 9. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Po kvocientnem kriteriju ugotovimo, da vrsta konvergira, brž ko je $|\cos x| < 1$, torej takrat, ko **ni** $x = k\pi$ za noben $k \in \mathbb{Z}$. Po Leibnizevem kriteriju vrsta konvergira, če je $\cos x = -1$, kar velja za $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za $\cos x = 1$, t. j. $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vrsta divergira, saj je tedaj enaka harmonični vrsti.

Sklep: vrsta konvergira natanko tedaj, ko x pripada kateremu od intervalov $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Iz $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ sledi, da ima funkcija asimptoto $y = 0$.
$f'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2}$.
Funkcija narašča na $[-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}]$, pada pa na $(-\infty, -\sqrt{3/2}]$ in na $[\sqrt{3/2}, \infty)$. Pri $x = -\sqrt{3/2}$ je lokalni minimum, pri $x = \sqrt{3/2}$ pa lokalni maksimum. Graf:



3. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x, \quad \ln \dfrac{y_H}{C} = -\ln\cos x, \quad y_H = \dfrac{C}{\cos x}.$

Partikularno rešitev $y = \sin x$ lahko uganemo ali pa uporabimo variacijo konstant, iz katere dobimo $C'(x) = \cos(2x)$, torej $C(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + D = \sin x \cos x + D$.

Splošna rešitev: $y = \sin x + \dfrac{D}{\cos x}$.

Rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju: $D = 1, \quad y = \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$.

4. Če našo limito označimo z L, najprej velja:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[-x\sqrt{n} - n \ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Prvi način. Uporabimo Taylorjev razvoj:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[-x\sqrt{n} + n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{x^2}{3n^{3/2}} + \cdots\right)\right] = \frac{x^2}{2}.$$

Drugi način. Zapišemo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 - \frac{x}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}}$$

ter po uporabi L'Hospitalovega pravila in ureditvi dobimo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{x^2}{2}\,.$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3.$

Stacionarne točke: $T_1(0,0)$, $T_2(-1,-1)$ in $T_3(1,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -4, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad H = 144x^2y^2 - 16.$

V T_1 je $H = -16$, zato tam ni ekstrema.

V T_2 in T_3 pa je $H = 128$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$, torej gre za lokalni minimum.