Rešitve kolokvija iz matematike z dne 9. 12. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina C

1. Označimo:

$$L(n) := -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2\,, \quad D(n) := \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}\,.$$

Velja $L(1) = D(1) = -1$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (-1)^{n+1}(n+1)^2\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2} = D(n+1)$$

in naša trditev je dokazana.

2. Velja:

$$a_n = \ln \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln \frac{2^{n+2}-1}{2\big(2^{n+1}-1\big)} = \ln \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}-2} > 0\,,$$

zato je zaporedje naraščajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\big(2 - 2^{-n}\big) = \ln 2\,.$$

Končno je neenačba:

$$|a_n - \ln 2| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$\ln 2 - \varepsilon < a_n < \ln 2 + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$\ln 2 - \ln \frac{11}{10} < \ln \frac{2^{n+1}-1}{2^n} < \ln 2 + \ln \frac{11}{10}$$

in po antilogaritmiranju:

$$\frac{20}{11} < \frac{2^{n+1}-1}{2^n} < \frac{11}{5}\,.$$

Iz prve neenakosti dobimo $2^{n+1} > 11$, kar v naravnih številih velja za $n \geq 3$. Iz druge neenakosti pa dobimo $2^n > -5$, kar velja za vse n. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 3. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := n!\, x^n / 2^{n^2}$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n^2}(n+1)!\,|x|}{2^{n^2+2n+1}n!} = \frac{(n+1)|x|}{2^{2n+1}}\,.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$ in vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x = 3$, dobimo $y + 1 = 0$, torej $y = -1$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2 - 4x - 3)y^4 + 4(x^3 - 2x^2 - 3x)y^3 y' + y' = 0\,,$$

torej:

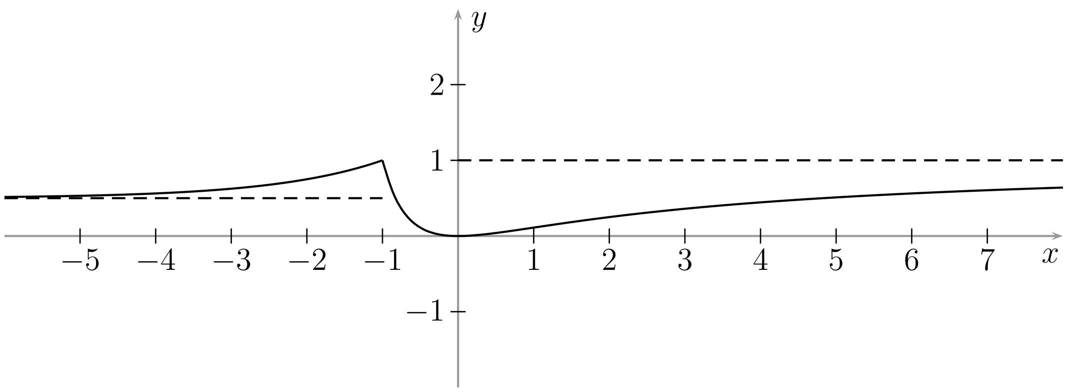
$$y' = -\frac{(3x^2 - 4x - 3)y^4}{4(x^3 - 2x^2 - 3x) + 1}\,.$$

Vstavimo $x = 3$, $y = -1$ in dobimo $y' = -12$.
Enačba tangente: $y = -12x + 35$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v -1. Iz:

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{2} + c\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>1}} f(x) = 1$$

dobimo $c = -1/2$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = [0, 1]$.