Rešitve kolokvija iz matematike z dne 16. 1. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo:

$$L(n) := 1\cdot 4 + 2\cdot 4^2 + 3\cdot 4^3 + \cdots + n\cdot 4^n\,, \quad D(n) := \frac{(3n-1)4^{n+1}}{9}\,.$$

Ker je $L(1) = 4$ in $D(1) = 16/9$, je očitno $L(1) > D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) > D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) > D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (n+1)\cdot 4^{n+1}\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) > D(n) + (n+1)\cdot 4^{n+1} = \frac{(12n+8)4^{n+1}}{9} = \frac{(3n+2)4^{n+2}}{9}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(3n+2)4^{n+2}}{9}\,,$$

je zahtevana neenakost $L(n+1) > D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Če je $x \le -5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &< 6 \\ (x+2)(x+3) &> 0 \\ x < -3 \text{ ali } x &> -2 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in (-\infty, -5]$.

Če pa je $x \ge -5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &< 6 \\ (x+6)(x-1) &< 0 \\ -6 < x &< 1 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in [-5, 1)$.

Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, 1)$.

3. a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2-3n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-3n+2)}{n+\sqrt{n^2-3n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2}.$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+5}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}}{\left(1+\frac{5}{2^n}\right)^{2^n}} = \frac{e^{-1}}{e^5} = \frac{1}{e^6}$ ali tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+5}\right)^{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{2^n+5}\right)^{-\frac{2^n+5}{6}}\right]^{-\frac{6\cdot 2^n}{2^n+5}}=\frac{1}{e^6}.$$

4. Označimo $a_n := \dfrac{3^n}{x^n(n^3+n)}$. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Izračunajmo:

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(n^3+n)}{x\big((n+1)^3+n+1\big)}\right|=\frac{3}{|x|}\,.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira za $3/|x|<1$ oz. za $|x|>3$, divergira pa za $3/|x|<1$ oz. za $|x|>3$. Za $x=\pm 3$ pa je:

$$a_n=\pm\frac{1}{n^3+n}\,,\quad |a_n|<\frac{1}{n^3}\,,\tag{1}$$

torej vrsta konvergira po primerjalnem kriteriju (za $x=-3$ lahko uporabimo tudi Leibnizev kriterij).

Torej vrsta konvergira za $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 0. Izračunajmo:

$$f(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f(x)=4\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2}\,.$$

S substitucijo $t=a^2x^2$ dobimo, da je slednja limita enaka $\lim\limits_{t\to 0}a^2\dfrac{\ln(1+t)}{t}=a^2$, torej je naša funkcija zvezna natanko tedaj, ko je $a^2=4$ oziroma $a\in\{-2,2\}$.