Rešitve kolokvija iz matematike z dne 16. 1. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo:

$$L(n) := 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n\,, \quad D(n) := \frac{(2n-1)3^{n+1}}{4}\,.$$

Ker je $L(1) = 3$ in $D(1) = 9/4$, je očitno $L(1) > D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) > D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n{+}1) > D(n{+}1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (n+1) \cdot 3^{n+1}\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) > D(n) + (n+1) \cdot 3^{n+1} = \frac{(6n+3)3^{n+1}}{4} = \frac{(2n+1)3^{n+2}}{4}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(2n+1)3^{n+2}}{4}\,,$$

je zahtevana neenakost $L(n+1) > D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Če je $x \leq 5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x &< 6 \\ (x-2)(x-3) &> 0 \\ x < 2 \text{ ali } x &> 3 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 5]$.

Če pa je $x \geq 5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &< 6 \\ (x-6)(x+1) &< 0 \\ -1 < x &< 6 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in [5, 6)$.

Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 6)$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+3} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n+3-n^2)}{\sqrt{n^2+4n+3}-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = 2.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^n-2}{3^n+4}\right)^{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1-\frac{2}{2^n}\right)^{3^n}}{\left(1+\frac{4}{2^n}\right)^{3^n}} = \dfrac{e^{-2}}{e^4} = \dfrac{1}{e^6}$ ali tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n-2}{3^n+4}\right)^{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{3^n+4}\right)^{-\frac{3^n+4}{6}}\right]^{-\frac{6\cdot 3^n}{3^n+4}} = \frac{1}{e^6}.$$

4. Označimo $a_n := \dfrac{(-2x)^n}{\sqrt{n}-1}$. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Izračunajmo:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2x\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n+1}-1}\right| = 2|x|\,.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira za $2|x|<1$ oz. za $|x|<1/2$, divergira pa za $2|x|<1$ oz. za $|x|>1/2$. Za $x=1/2$ dobimo:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}\,. \tag{2}$$

Ni težko preveriti, da absolutne vrednosti členov vrste tvorijo padajoče zaporedje z limito nič, torej vrsta konvergira po Leibnizevem kriteriju. Za $x=-1/2$ pa dobimo:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \tag{3}$$

torej vrsta po primerjalnem kriteriju divergira.
Torej vrsta konvergira za $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 0. Izračunajmo:

$$f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 9\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2}\,.$$

S substitucijo $t=a^2x^2$ dobimo, da je slednja limita enaka $\lim_{t\to 0} a^2\dfrac{\ln(1+t)}{t} = a^2$, torej je naša funkcija zvezna natanko tedaj, ko je $a^2=9$ oziroma $a\in\{-3,3\}$.