Rešitve kolokvija iz matematike z dne 23. 1. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Ker za $-1 < x \le 1$ velja:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\,,$$

velja tudi:

$$\ln x = \ln(1 + x - 1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots\,,$$

če je $-1 < x - 1 \le 1$ oz. $0 < x \le 2$. Iskani polinom je tako enak:

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}\,. \tag{$*$}$$

Po izračunu dobimo $T_3(0\text{'}9) = 0\text{'}105\overline{3}$. Iz formule za oceno ostanka sledi:

$$|R_3(0\text{'}9)| \le \frac{0\text{'}1^4}{4!} \max_{0.9 \le \xi \le 1} \left|f^{(4)}(\xi)\right|,$$

kjer je $f(\xi) = \ln \xi$. Ker je funkcija $|f^{(4)}(\xi)| = 6/\xi^4$ za pozitivne ξ padajoča, velja $\max_{0.9 \le \xi \le 1} |f^{(4)}(\xi)| = 6/0\text{'}9^4$ in zato tudi:

$$|R_3(0\text{'}9)| \le \frac{0\text{'}0001}{4 \cdot 0\text{'}9^4} = \frac{0\text{'}0001}{4 \cdot 0\text{'}6561} \le \frac{0\text{'}0001}{4 \cdot 0\text{'}5} = 0\text{'}00005\,.$$

Iz $\ln 0\text{'}9 = T_3(0\text{'}9) + R_3(0\text{'}9)$ ter izračunane vrednosti in ocene sledi:

$$-0\text{'}10538\overline{3} \le \ln(0\text{'}9) \le -0\text{'}10528\overline{3}\,.$$

Torej na tri decimalke natančno velja $\ln 0\text{'}9 \doteq -0\text{'}105$.

Opomba. Polinom $(*)$ lahko izračunamo tudi kot:

$$T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1)\,\frac{(x-1)^3}{6}\,.$$

2. Označimo z $x(t)$ količino izotopa ^{14}C v vejici t let po tem, ko so vejico postavili v grob. Diferencialna enačba, ki določa radioaktivni razpad, je podana z $\mathrm{d}x = kx\,\mathrm{d}t$, kjer konstante k še ne poznamo. Ni težko preveriti, da ima enačba splošno rešitev

$x(t) = C\,e^{kt}$. Očitno velja $x(0) = C$, t. j. $x(t) = x(0)\,e^{kt}$. Po $T = 5600$ letih je v vejici le še polovica začetne količine izotopa ^{14}C. Torej velja:

$$\frac{x(0)}{2} = x(T) = x(0)\,e^{kT}\,,$$

iz česar po preureditvi sledi:

$$k = \frac{\ln(1/2)}{T}\,.$$

Zato je:

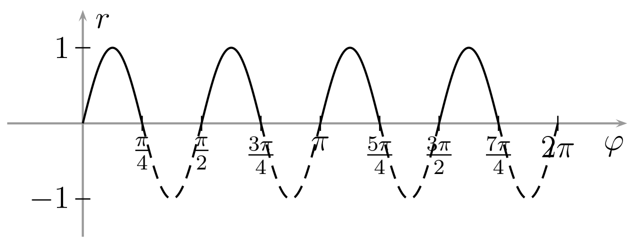
$$x(t) = x(0)\,e^{\frac{t\ln(1/2)}{T}} = x(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}\,.$$

Naj bo s starost groba. Ker je v najdeni vejici le še 55% začetne količine izotopa ^{14}C, mora veljati $0\text{'}55x(0) = x(s) = x(0)(1/2)^{s/T}$. Če iz enačbe izrazimo s, dobimo:

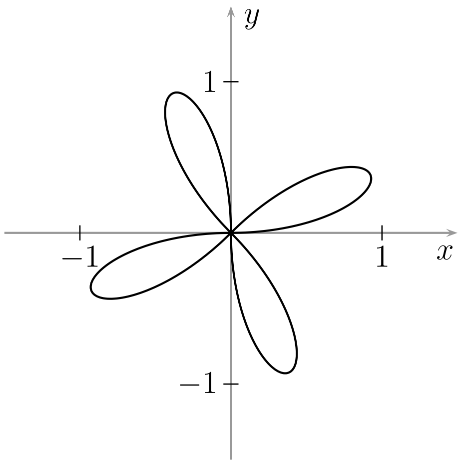
$$s = T\log_{1/2} 0\text{'}55 = 5600\log_{1/2} 0\text{'}55 = 5600\cdot\frac{\ln 0\text{'}55}{\ln 0\text{'}5} \doteq 4830\,\mathrm{let}\,.$$

3. Volumen stožca je enak $V = \pi r^2 h/3$, kjer je r radij osnovne ploskve, h pa višina stožca. Ker je stranica stožca enaka 1, po Pitagorevem izreku velja $r^2 = 1 - h^2$ oziroma $V(h) = \pi h(1-h^2)/3 = \pi(h-h^3)/3$. Seveda je višina iskanega stožca nenegativna. Prav tako ni večja od stranice $s = 1$. Torej moramo poiskati največjo vrednost funkcije $V(h)$ na intervalu $[0,1]$. Ni se težko prepričati, da velja $V(0) = V(1) = 0$, kar se da sklepati iz same oblike pripadajočih "stožcev". Torej doseže $V(h)$ največjo vrednost v stacionarni točki. Iz enačbe $V'(h) = \pi(1-3h^2)/3 = 0$ dobimo $h = \pm\sqrt{3}/3$. Ker je višina vedno nenegativna, je višina iskanega stožca enaka $h = \sqrt{3}/3$. Iz enačbe $r^2 = 1 - h^2$ izračunamo še $r = \sqrt{6}/3$.

4. Najprej poskusimo narisati sliko krivulje $r = \sin(4\varphi)$. Pomagamo si lahko s pomožnim grafom v polarnem koordinatnem sistemu:



Če se omejimo na interval $[0,2\pi]$, je r nenegativen le na uniji intervalov $[0,\pi/4]\cup[\pi/2,3\pi/4]\cup[\pi,5\pi/4]\cup[3\pi/2,7\pi/4]$. Torej bo krivulja definirana le pri kotih iz te unije. S pomočjo pomožnega grafa lahko narišemo:



Ker so vsi štirje "listi" enaki, bo ploščina lika, ki ga omejuje krivulja, enaka:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2(4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos(8\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

5. a) Iz sistema enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x}(1 - x + y^2) = 0\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{-x}y = 0$$

dobimo edino rešitev $x = 1$ in $y = 0$. Torej je $(1, 0)$ edina stacionarna točka in zato tudi edini kandidat za lokalni ekstrem. Nadalje iz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{-x}(2 - x + y^2)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-x}\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2e^{-x}y$$

sledi:

$$H(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,0)\right)^2 = 2e^{-2} > 0\,.$$

Ker je $(\partial^2 f/\partial x^2)(1,0) = -e^{-1} < 0$, ima funkcija f v točki $(1, 0)$ lokalni maksimum.

b) *Prvi način.* Ker je izraz $e^{-x}y^2$ vedno nenegativen, velja $f(x,y) = e^{-x}x - e^{-x}y^2 \le e^{-x}x$. Če poiščemo največjo vrednost funkcije $g(x) = xe^{-x}$ na celi realni osi, ugotovimo, da je ta vrednost dosežena natanko pri $x = 1$. Izraz $-e^{-x}y^2$ pa je največji natanko tedaj, ko je $y = 0$. Torej zavzame funkcija $f(x, y)$ največjo vrednost (gledano na celi ravnini $\mathbb{R}^2$) natanko v točki $(1, 0)$. Ker točka $(1, 0)$ leži na našem trikotniku, bo seveda v njej dosežena največja vrednost, četudi se omejimo le na dani trikotnik.

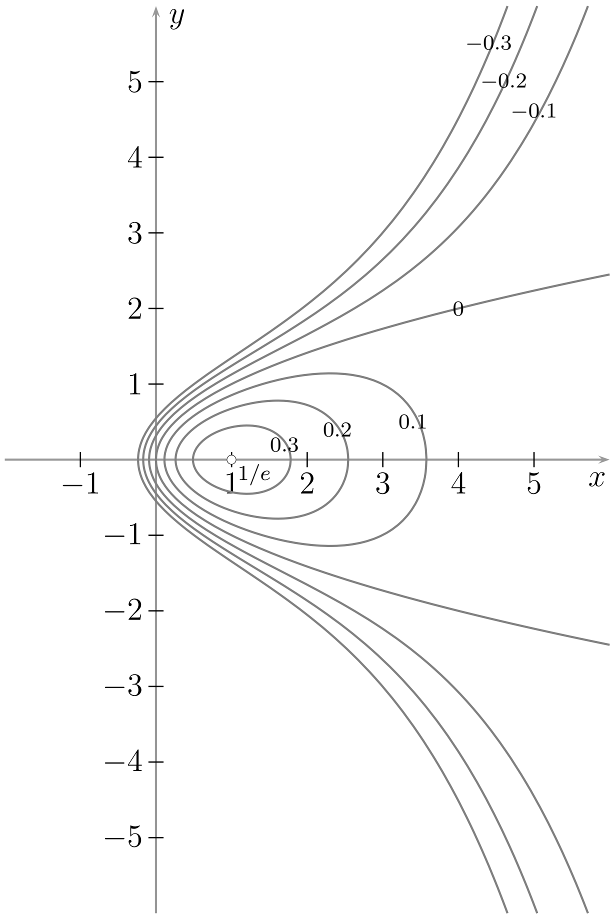
Drugi način. Funkcija f lahko na danem trikotniku zavzame največjo vrednost le v stacionarnih točkah ali pa na robu trikotnika. V točki a) smo izračunali, da ima f edino stacionarno točko (1,0) in le-ta leži v trikotniku. H kandidatom za največjo vrednost takoj dodamo oglišča trikotnika. Rob je določen s tremi premicami: $x = 0$, $y = -1$ in $y = 5 - x$. Velja:

$$\begin{aligned}
f(0, y) &= -y^2\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0, y) &= -2y = 0 && \text{za } y = 0\,, \\
f(x, -1) &= e^{-x}(x - 1)\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, -1) &= e^{-x}(2 - x) = 0 && \text{za } x = 2\,, \\
f(x, 5 - x) &= -e^{-x}(x^2 - 11x + 25)\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, -1) &= e^{-x}(x^2 - 13x + 36) = 0 \quad \text{za } x = 4 \text{ in } x = 9.
\end{aligned}$$

Tako se kandidatom $(0, -1)$, $(6, -1)$, $(0, 5)$ in $(1, 0)$ za globalni maksimum pridružita še $(2, -1)$ in $(4, 1)$ (točka $(9, -4)$ ni v definicijskem območju). Ni težko preveriti, da je največja vrednost $f(1, 0) = 1/e$.

Opomba. Kandidate za ekstreme na robovih lahko poiščemo tudi s pomočjo vezanih ekstremov. Tako npr. za rob $x + y = 5$ nastavimo sistem $\partial F/\partial x = 0$, $\partial F/\partial y = 0$ in $x + y = 5$, kjer je $F(x, y) = f(x, y) - \lambda(x + y - 5)$. Dobimo točki $(4, 1)$ in $(9, -4)$.

c) Najprej opazimo, da za $z > 1/e = f(1, 0)$ ni nivojnic (v točki (1,0) je globalni maksimum). Nivojnice se razlikujejo glede na to, ali je $z = 0$, $z < 0$ oz. $0 < z \leq 1/e$ (pri $z = 1/e$ se nivojnica stisne v točko).



y
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
x
−1
1
2
3
4
5
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
1/e