Rešitve kolokvija iz matematike z dne 23. 1. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Spomnimo se formule:

$$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}x + \binom{m}{2} a^{m-2}x^2 + \cdots ,$$

ki velja za $a > 0$ in $|x| < a$. Pri $m = 1/2$ in $a = 1$ tako dobimo:

$$\sqrt{x} = (1 + x - 1)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}(x-1) + \binom{1/2}{2}(x-1)^2 + \cdots ,$$

brž ko je $|x - 1| < 1$. Iskani polinom je tako enak:

$$T_2(x) = 1 + \binom{1/2}{1}(x-1) + \binom{1/2}{2}(x-1)^2 = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} . \qquad (*)$$

Po izračunu dobimo $T_2(1'1) = 1'04875$. Iz formule za ostanek sledi:

$$|R_2(1'1)| \le \frac{0'1^3}{3!} \max_{1\le\xi\le 1.1} \left| f^{(3)}(\xi) \right| ,$$

kjer je $f(\xi) = \sqrt{\xi}$. Ker je funkcija $f^{(3)}(\xi) = 3/(8\xi^{5/2})$ za pozitivne ξ padajoča, velja $\max_{1\le\xi\le 1.1} |f^{(3)}(\xi)| = 3/8$ in zato tudi:

$$|R_2(1'1)| \le \frac{0'001}{16} = 0'0000625 .$$

Iz $\sqrt{1'1} = T_3(1'1) + R_3(1'1)$ ter izračunane vrednosti in ocene sledi:

$$1'0486875 \le \sqrt{1'1} \le 1'0488125 .$$

Torej na tri decimalke za piko natančno velja $\sqrt{1'1} \doteq 1'049$.

Opomba. Polinom $(*)$ lahko izračunamo tudi kot:

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2} .$$

2. Označimo z $x(t)$ količino izotopa ^{14}C v vejici t let po tem, ko so vejico postavili v grob. Diferencialna enačba, ki določa radioaktivni razpad, je podana z $\mathrm{d}x = kx\,\mathrm{d}t$, kjer konstante k še ne poznamo. Ni težko preveriti, da ima enačba splošno rešitev

$x(t) = C\,e^{kt}$. Očitno velja $x(0) = C$, t. j. $x(t) = x(0)\,e^{kt}$. Po $T = 5600$ letih je v vejici le še polovica začetne količine izotopa ^{14}C. Torej velja:

$$\frac{x(0)}{2} = x(T) = x(0)\,e^{kT}\,,$$

iz česar po preureditvi sledi:

$$k = \frac{\ln(1/2)}{T}\,.$$

Zato je:

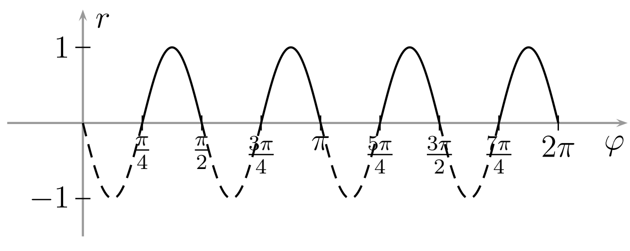
$$x(t) = x(0)\,e^{\frac{t\ln(1/2}{T}} = x(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}\,.$$

Naj bo s starost groba. Ker je v najdeni vejici le še 59% začetne količine izotopa ^{14}C, mora veljati $0{\cdot}59x(0) = x(s) = x(0)(1/2)^{\frac{s}{T}}$. Če iz enačbe izrazimo s, dobimo:

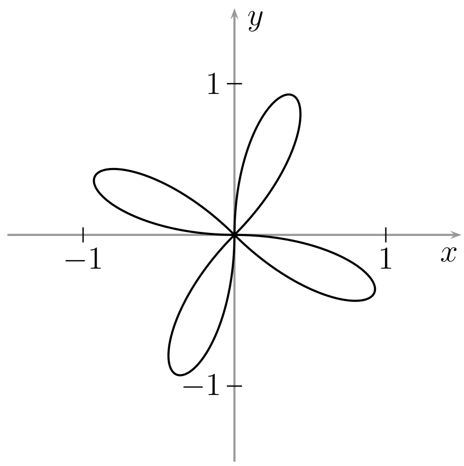
$$s = T\log_{1/2} 0{\cdot}59 = 5600\log_{1/2} 0{\cdot}59 = 5600\cdot\frac{\ln 0{\cdot}59}{\ln 0{\cdot}5} \doteq 4263\,\text{let}\,.$$

3. Ploščina pravokotnika je enaka $p = ab$. Ker je radij polkroga enak 1, po Pitagorevem izreku velja $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 1$ oziroma $a^2 = 4 - 4b^2$ oziroma $p(b) = b\sqrt{4-4b^2}$. Seveda bo ploščina največja natanko tedaj, ko bo kvadrat ploščine največji. Torej lahko obravnavamo kar funkcijo $P(b) = p(b)^2 = b^2(4-4b^2) = 4b^2 - 4b^4$. Seveda mora biti dolžina stranice b nenegativna. Prav tako ne more biti večja od samega radija polkroga, ki je enak 1. Zato moramo poiskati največjo vrednost funkcije $P(b)$ na intervalu $[0,1]$. Ni se težko prepričati, da velja $P(0) = 0 = P(1)$, kar se da sklepati iz same oblike pripadajočih "pravokotnikov". Zato doseže $P(b)$ največjo vrednost v stacionarni točki. Iz enačbe $P'(b) = 8b - 16b^3 = 0$ dobimo $b_1 = \sqrt{2}/2$, $b_2 = -\sqrt{2}/2$ in $b_3 = 0$. Druga vrednost je negativna, tretja vrednost pa je ničelna. Torej je stranica b iskanega pravokotnika enaka $b = \sqrt{2}/2$. Iz enačbe $a^2 = 4 - 4b^2$ izračunamo še $a = \sqrt{2}$.

4. Najprej poskusimo narisati sliko krivulje $r = -\sin(4\varphi)$. Pomagamo si lahko s pomožnim grafov v polarnem koordinatnem sistemu:



Če se omejimo na interval $[0, 2\pi]$, je r nenegativen le na uniji intervalov $[\pi/4, \pi/2] \cup [3\pi/4, \pi] \cup [5\pi/4, 3\pi/2] \cup [7\pi/4, 2\pi]$. Torej bo krivulja definirana le pri kotih iz te unije. S pomočjo pomožnega grafa lahko narišemo:



Ker so vsi štirje "listi" enaki, bo ploščina lika, ki ga omejuje krivulja, enaka:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\sin(4\varphi))^2 \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - \cos(8\varphi)}{2} \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} \, .$$

5. a) Nalogo poskusimo najprej rešiti na običajni način. Iz sistema enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}(1 - x + y^4) = 0 \, ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{-x}y^3 = 0$$

dobimo edino rešitev $x = 1$ in $y = 0$. Torej je $(1, 0)$ edina stacionarna točka in zato tudi edini kandidat za lokalni ekstrem. Nadalje iz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}(2 - x + y^4) \, ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 e^{-x} \, ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = -4y^3 e^{-x}$$

sledi:

$$H(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(1, 0) \right)^2 = 0 \, .$$

Kot vidimo, z običajnim postopkom ne pridemo do konca. Pomagamo si lahko na vsaj dva načina.

Prvi način. Ker je izraz $y^4 e^{-x}$ vedno nenegativen, velja $f(x, y) = y^4 e^{-x} - xe^{-x} \geq -xe^{-x}$. Če poiščemo najmanjšo vrednost funkcije $g(x) = -xe^{-x}$ na celi realni osi, ugotovimo, da je ta vrednost dosežena natanko pri $x = 1$. Izraz $y^4 e^{-x}$ pa je najmanjši natanko tedaj, ko je $y = 0$. Torej zavzame funkcija $f(x, y)$ najmanjšo vrednost (gledano na celi ravnini $\mathbb{R}^2$) natanko v točki $(1,0)$. To pomeni, da je v točki $(1,0)$ globalni (in seveda tudi lokalni) minimum.

Drugi način. Uvedemo novo neodvisno spremenljivko $t = y^2$ in iščemo lokalne ekstreme funkcije $g(x,t) = f(x,y) = (t^2 - x)e^{-x}$. Iz ugotovitev za funkcijo f sledi, da je dovolj gledati Hessejevo determinanto pri $x = 1$ in $t = 0$. Velja:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{-x}(2 - x + t^2)\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2e^{-x}\,,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= -2e^{-x}y\,,
\end{aligned}
$$

torej je:

$$
H(1,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,0) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial t}(1,0)\right)^2 = 2e^{-2} > 0\,.
$$

Ker je $(\partial^2 g/\partial t^2)(1,0) = e^{-1} > 0$, ima funkcija f v točki $(1,0)$ lokalni minimum.

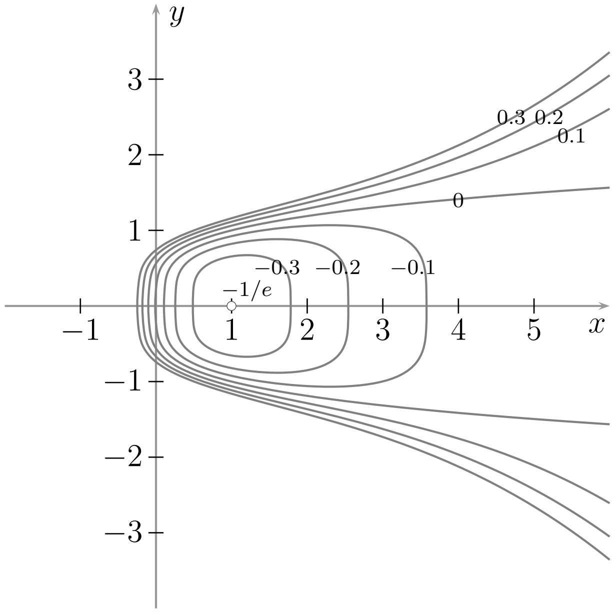
b) *Prvi način.* Če smo pri točki a) opazili, da je v $(1,0)$ globalni minimum, smo že končali, saj dobljena točka leži v našem kvadratu.

Drugi način. Funkcija f lahko na danem kvadratu zavzame najmanjšo vrednost le v stacionarnih točkah ali pa na robu kvadrata. V točki a) smo izračunali, da ima f edino stacionarno točko (1,0). H kandidatom za najmanjšo vrednost takoj dodamo oglišča kvadata. Rob je določen s štirimi premicami: $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$ in $y = 1$. Velja:

$$
\begin{aligned}
f(0,y) &= y^4\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y) &= 4y^3 = 0 & &\text{za } y = 0\,,\\
f(2,y) &= (y^4 - 2)e^{-2}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(2,y) &= 4e^{-2}y^3 = 0 & &\text{za } y = 0\,,\\
f(x,-1) &= (1 - x)e^{-x}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,-1) &= (x - 2)e^{-x} = 0 & &\text{za } x = 2\,,\\
f(x,1) &= (1 - x)e^{-x}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1) &= (x - 2)e^{-x} = 0 & &\text{za } x = 2\,,
\end{aligned}
$$

Tako se kandidatom $(0,-1)$, $(0,1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ in $(1,0)$ za globalni minimum pridružijo še $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ in $(2,-1)$. Ni težko preveriti, da je najmanjša vrednost $f(1,0) = -1/e$.

c) Najprej opazimo, da za $z < -1/e = f(1,0)$ ni nivojnic (v točki (1,0) je globalni minimum). Nivojnice se razlikujejo glede na to, ali je $z = 0$, $z > 0$ oz. $-1/e < z < 0$ (pri $z = -1/e$ se nivojnica stisne v točko).


y
3
2
1
−1
−2
−3
−1
1
2
3
4
5
x
0.3
0.2
0.1
0
−0.3
−0.2
−0.1
−1/e