Rešitve kolokvija iz matematike z dne 28. 11. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo:

$$L(n) := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2\,, \quad D(n) := \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}\,.$$

Velja $L(1) = 1^2 + 3^2 = 10 = D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (2n+3)^2\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (2n+3)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 = $$
$$= \frac{(2n+3)(2n^2+9n+10)}{3}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} = \frac{(2n+3)(2n^2+9n+10)}{3}\,,$$

je zahtevana enakost $L(n+1) = D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Velja:

$$a_n = \ln\frac{3n-2}{2n+1}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln\frac{(3n+1)(2n+1)}{(2n+3)(3n-2)} = \ln\frac{6n^2+5n+1}{6n^2+5n-6} > 0\,,$$

zato je zaporedje naraščajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \ln\frac{3}{2}\,.$$

Končno je neenačba:

$$\left|a_n - \ln\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$\ln\frac{3}{2} - \varepsilon < a_n < \ln\frac{3}{2} + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$0 < \ln \frac{3n-2}{2n+1} < \ln \frac{9}{4}$$

in po antilogaritmiranju:

$$1 < \frac{3n-2}{2n+1} < \frac{9}{4}\,.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ je $2n+1 > 0$, zato se pri množenju predznak ohrani. Iz prve neenakosti dobimo $n > 3$, iz druge pa $n > -17/6$. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 4. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := x^n/n^n$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^n|x|}{(n+1)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{|x|}{n+1}\,.$$

Ker je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1/e$, je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$. Vrsta torej konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x = 2$, dobimo $2y+6 = 0$, torej $y = -3$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2 - 4x)y^3 + 3(x^3 - 2x^2)y^2y' + 2y' = 0\,,$$

torej:

$$y' = \frac{(4x-3x^2)y^3}{3(x^3-2x^2)+2}\,.$$

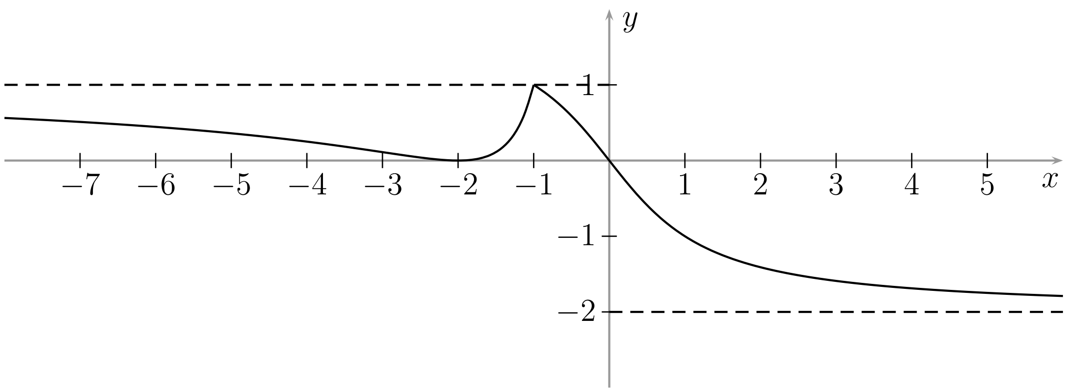
Vstavimo $x = 2$, $y = -3$ in dobimo $y' = 54$.

Enačba tangente: $y = 54x - 111$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v -1. Iz:

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\frac{\pi}{4}\,c$$

dobimo $c = -4/\pi$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = (-2, 1]$.