Rešitve kolokvija iz matematike z dne 28. 11. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo:

$$L(n) := 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)\,, \qquad D(n) := \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\,.$$

Velja $L(1) = D(1) = 3$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (2n+1)(2n+3)\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (2n+1)(2n+3) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3} + (2n+1)(2n+3) = \\ = \frac{4n^3+18n^2+23n+9}{3}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(n+1)(4n^2+14n+9)}{3} = \frac{4n^3+18n^2+23n+9}{3}\,,$$

je zahtevana enakost $L(n+1) = D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Velja:

$$a_n = \ln\frac{n+3}{2n-1}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln\frac{(n+4)(2n-1)}{(n+3)(2n-1)} = \ln\frac{2n^2+7n-4}{2n^2+7n+3} < 0\,,$$

zato je zaporedje padajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,.$$

Končno je neenačba:

$$|a_n + \ln 2| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$-\ln 2 - \varepsilon < a_n < -\ln 2 + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$-2\ln 2 < \ln\frac{n+3}{2n-1} < 0$$

in po antilogaritmiranju:

$$\frac{1}{4} < \frac{n+3}{2n-1} < 1\,.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ je $2n-1>0$, zato se pri množenju predznak ohrani. Iz prve neenakosti dobimo $n > -13/2$, iz druge pa $n > 4$. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 5. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := n!\,3^n\,x^n/(2n)!$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3|x|(n+1)!(2n)!}{n!(2n+2)!} = \frac{3(n+1)|x|}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 0$ in vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x=-2$, dobimo $2y-6=0$, torej $y=3$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2+4x)y^3 + 3(x^3+2x^2)y^2y' + 2y' = 0\,,$$

torej:

$$y' = -\frac{(3x^2+4x)y^3}{3(x^3+2x^2)+2}\,.$$

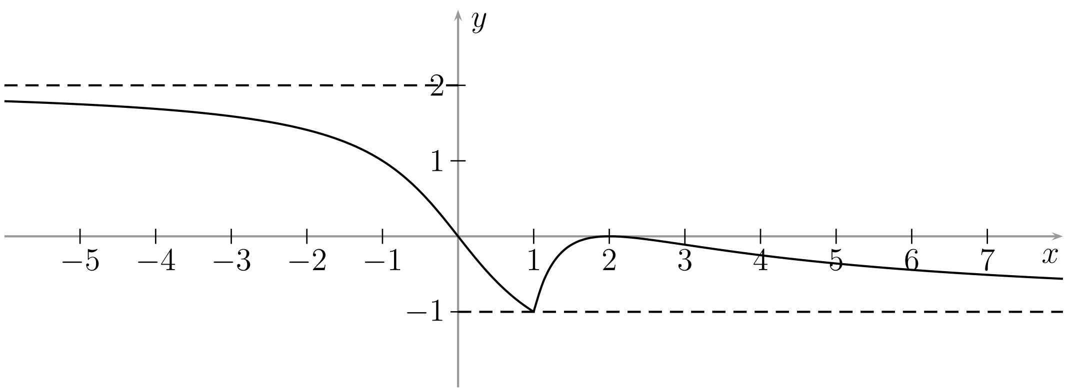
Vstavimo $x=-2$, $y=3$ in dobimo $y'=-54$.

Enačba tangente: $y=-54x+105$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 1. Iz:

$$f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{4}\,c\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>1}} f(x) = -1$$

dobimo $c=-4/\pi$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = [-1,2)$.