Rešitve kolokvija iz matematike z dne 5. 4. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo $y_1 = ax\,e^{2x}$ in $y_2 = 6ax\,e^{2x}$. Krivulji se sekata pri $x = 0$. Iz:

$$y_1' = a(1 + 2x)e^{2x}\,, \qquad y_2 = 6a(1 + 2x)e^{2x}$$

izračunamo $k_1 = y_1'(0) = a$ in $k_2 = y_2'(0) = 6a$. Krivulji se sekata pod kotom 45°, če je:

$$\left|\frac{k_2 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{tg} 45^\circ$$

oziroma $\dfrac{5|a|}{1 + 6a^2} = 1$, kar je res pri $a = \pm\frac{1}{2}$ in $a = \pm\frac{1}{3}$.

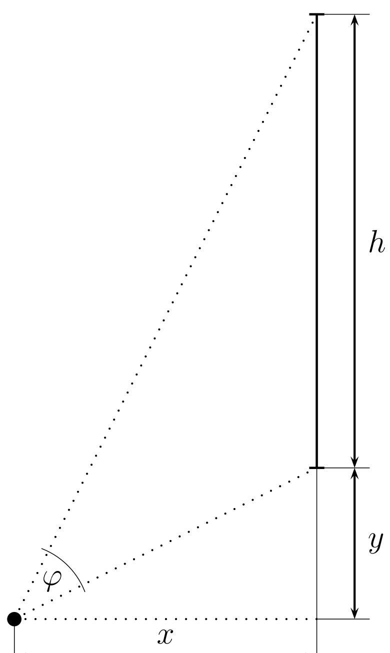
2. Označimo s $h = 16$ m višino plakata, z $y = 2$ m višino spodnjega roba plakata glede na naše oči, z x pa našo oddaljenost od zidu (glej sliko). Kot φ, ki mora biti maksimalen, je ugodno izraziti s funkcijo arkus kotangens:

$$\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y + h} - \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}\,.$$

Če odvajamo po x, po nekaj računanja dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{yh(y + h) - hx^2}{(y^2 + x^2)\big((y + h)^2 + x^2\big)}\,.$$

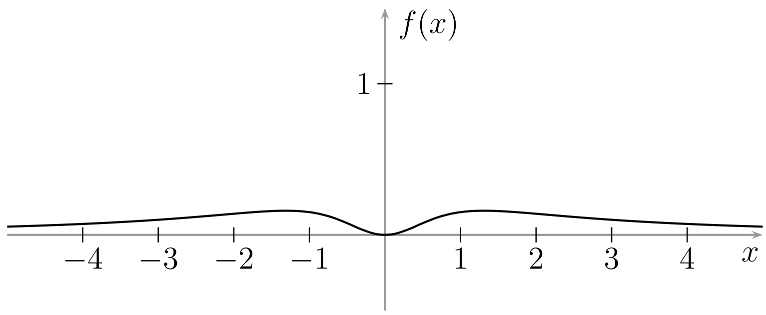
od koder sledi, da je kot maksimalen pri $x = \sqrt{y(y + h)} = 6$ m.



3. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [0, 1/e]$, $\quad$ ničla: $x = 0$.

Iz $f'(x) = \dfrac{2x\big(1 - \ln(1 + x^2)\big)}{(1 + x^2)^2}$ dobimo stacionarne točke $x = -\sqrt{e - 1}$, $x = 0$ in $x = \sqrt{e - 1}$.

Funkcija narašča na $\big(-\infty, -\sqrt{e - 1}\big]$ in na $\big[0, \sqrt{e - 1}\big)$, pada pa na $\big[-\sqrt{e - 1}, 0\big]$ in na $\big[\sqrt{e - 1}, \infty\big)$. Pri $x = 0$ je globalni minimum, pri $x = \pm\sqrt{e - 1}$ pa je globalni maksimum. Graf:



4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6+x^2)\sin x - 6x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6+x^2)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \ldots\right) - 6x}{x^5} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{6}{120} - \dfrac{1}{6}\right)x^5 + \ldots}{x^5} = -\dfrac{7}{60}.$

5. a) S substitucijo $t = \dfrac{x-1}{x+1}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$, dobimo:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2} + C\,.$$

b) Z razčlenitvijo ulomka dobimo:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C\,.$$