Rešitve kolokvija iz matematike z dne 5. 4. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo $y_1 = ax\,e^{-x}$ in $y_2 = 6ax\,e^{-x}$. Krivulji se sekata pri $x = 0$. Iz:

$$y_1' = a(1-x)e^{-x}\,, \qquad y_2 = 6a(1-x)e^{-x}$$

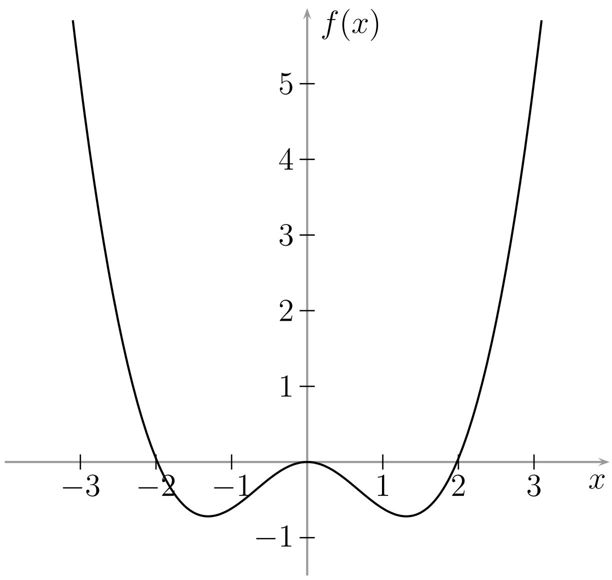
izračunamo $k_1 = y_1'(0) = a$ in $k_2 = y_2'(0) = 6a$. Krivulji se sekata pod kotom 45°, če je:

$$\left|\frac{k_2 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{tg} 45^\circ$$

oziroma $\dfrac{5|a|}{1+6a^2} = 1$, kar je res pri $a = \pm\frac{1}{2}$ in $a = \pm\frac{1}{3}$.

2. Če s $h = 12$ m označimo višino plakata, z $y = 4$ m višino spodnjega roba plakata glede na naše oči, z x pa našo oddaljenost od zidu, tako kot pri skupini A dobimo, da je kot maksimalen, če je $x = \sqrt{y(y+h)} = 4$ m.

3. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [2-e, \infty)$.
Iz $f'(x) = 2x\big(\ln(1+x^2) - 1\big)$ dobimo stacionarne točke $x = -\sqrt{e-1}$, $x = 0$ in $x = \sqrt{e-1}$.
Funkcija narašča na $\big[-\sqrt{e-1}, 0\big]$ in na $\big[\sqrt{e-1}, \infty\big)$, pada pa na $\big(-\infty, -\sqrt{e-1}\big]$ in na $\big[0, \sqrt{e-1}\big)$. Pri $x = 0$ je lokalni maksimum, pri $x = \pm\sqrt{e-1}$ pa globalni minimum. Graf:



4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x^2)\cos(2x)-1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+2x^2\right)\left(1-2x^2+\dfrac{x^4}{6}-\dots\right)-1}{x^4} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1}{6}-4\right)x^4+\dots}{x^4} = -\frac{23}{6}.$

5. a) S substitucijo $t = \dfrac{x+1}{x-1}$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$, dobimo:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{3/2}}{3} + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/2} + C\,.$$

b) Z razčlenitvijo ulomka dobimo:

$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \left(1-\frac{x}{x^2+2}-\frac{3}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C\,.$$