Rešitve kolokvija iz matematike z dne 24. 5. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

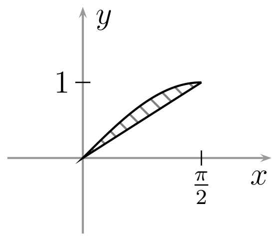
Skupina A

1. $\dot{x} = 4\,e^t, \quad \dot{y} = 2 - 2\,e^{2t},$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{4 + 8\,e^{2t} + 4\,e^{4t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(2 + 2\,e^{2t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left(2t + e^{2t}\right)\Big|_0^1 = e^2 + 1.$$

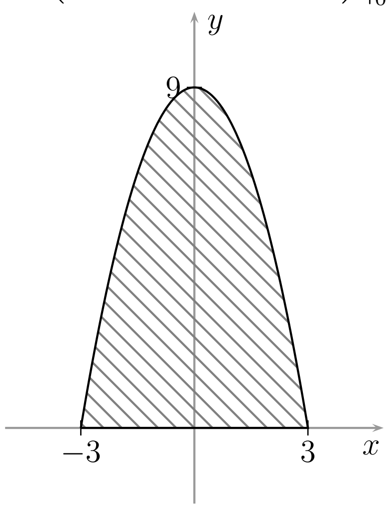
2. Skica območja, ki se zavrti okoli osi x:



$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}\,x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi\big(1 - \cos(2x)\big)}{2} - \frac{4x^2}{\pi}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.



Oglišči: $f(-3,0) = f(3,0) = 0$.
Rob $y = 0$, $-3 < x < 3$: $f(x,0) = 0$.
Rob $y = 9 - x^2$, $-3 < x < 3$:
$f(x, 9 - x^2) = 2(9 - x^2)^2$.
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 9 - x^2) = 4x(x^2 - 9)$, v notranjosti roba je točka $(0,9)$ in $f(0,9) = 162$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xy, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^2 + 9,$
od koder dobimo točke $(0, -9/2)$, $(-3,0)$ in $(3,0)$, ki niso v notranjosti.
Torej je $\min\limits_D f = f(x,0) = 0$ (za $-3 \le x \le 3$) in $\max\limits_D f = f(0,9) = 162$.

4. Označimo s T temperaturo vode ob danem času t, s $T_1 = 10°\mathrm{C}$ začetno temperaturo vode v posodi, s $T_2 = 30°\mathrm{C}$ temperaturo v sobi, s $T_3 = 20°\mathrm{C}$ pa temperaturo vode ob času $t_3 = 1\,\mathrm{h}$. Ker je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur, velja:

$$\mathrm{d}T = -k(T - T_2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_2} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_2}{C} = -kt$$

oziroma:

$$T = T_2 - C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je temperatura ob času $t = 0$ enaka T_1, je $C = T_2 - T_1$. Odvisnost temperature od časa je tako določena s formulo:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\,e^{-kt}\,.$$

Ker pri $t = T_3$ velja $T = T_3$, velja:

$$e^{-kt_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\,,$$

torej je:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\left(e^{-kt_3}\right)^{t/t_3} = T_2 - (T_2 - T_1)\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right)^{t/t_3}\,.$$

Ko vstavimo konkretne številke iz naloge, dobimo, da temperatura čez dve uri znaša $25°\mathrm{C}$.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -3$ dobimo:

$$y_H = C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x}\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, a se prekriva z y_H, zato je treba nastaviti:

$$y_P = Ax\,e^x\,.$$

Ker je $y_P'' + 2y_P' - 3y_P = 4A\,e^x$, je $A = 1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \left(\frac{x}{4} + C_1\right)e^x + C_2\,e^{-3x}\,.$$