Rešitve kolokvija iz matematike z dne 24. 5. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

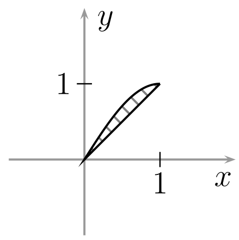
Skupina B

1. $\dot{x} = -2\,e^{t/2}, \quad \dot{y} = 1 - e^{-t},$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1 + 2\,e^{-t} + e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 + e^{-t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left(t - e^{-t}\right)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{e}.$$

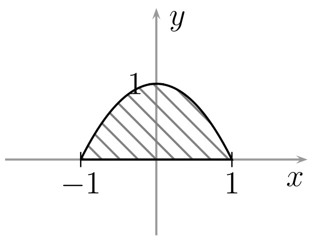
2. Skica območja, ki se zavrti okoli osi x:



$$V = \pi \int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{2} x^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3.



Oglišči: $f(-1,0) = f(1,0) = 0$.
Rob $y = 0$, $-1 < x < 1$: $f(x,0) = 0$.
Rob $y = 1 - x^2$, $-1 < x < 1$:
$f(x, 1 - x^2) = 2(x^2 - x^4)$.
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 1-x^2) = 4x - 8x^3$, v notranjosti roba so točke $\left(-\sqrt{2}/2, 1/2\right)$, $(0,1)$ in $\left(\sqrt{2}/2, 1/2\right)$. Velja:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(0,1) = 0\,.$$

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y + 1,$ od koder dobimo točko $(0, 1/2)$. Velja $f(0,1/2) = 1/4$.
Torej je $\min\limits_D f = f(x,0) = 0$ (za $-1 \le x \le 1$) in $\max\limits_D f = f\left(-\sqrt{2}/2, 1/2\right) = f\left(\sqrt{2}/2, 1/2\right) = 1/2$.

4. Označimo s T temperaturo vode ob danem času t, s $T_1 = 0°\mathrm{C}$ začetno temperaturo vode v posodi, s $T_2 = 25°\mathrm{C}$ temperaturo v sobi, s $T_3 = 15°\mathrm{C}$ pa temperaturo vode ob času $t_3 = 1\,\mathrm{h}$. Ker je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur, velja:

$$\mathrm{d}T = -k(T - T_2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_2} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_2}{C} = -kt$$

oziroma:

$$T = T_2 - C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je temperatura ob času $t = 0$ enaka T_1, je $C = T_2 - T_1$. Odvisnost temperature od časa je tako določena s formulo:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\,e^{-kt}\,.$$

Ker pri $t = T_3$ velja $T = T_3$, velja:

$$e^{-kt_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\,,$$

torej je:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\left(e^{-kt_3}\right)^{t/t_3} = T_2 - (T_2 - T_1)\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right)^{t/t_3}\,.$$

Ko vstavimo konkretne številke iz naloge, dobimo, da temperatura čez dve uri znaša $21°\mathrm{C}$.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ z rešitvama $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ dobimo:

$$y_H = e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + C_2\cos\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, zato nastavimo:

$$y_P = A\,e^{-x}\,.$$

Ker je $y_P'' - y_P' + 2y_P = 4A\,e^{-x}$, je $A = 1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \frac{e^{-x}}{4} + e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + C_2\cos\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)\,.$$