Optimalno vodenje

Mirko Dobovišek

17.1. 2014

Sistem bi radi vodili od **začetnega stanja** v **končno stanje**. To običajno želimo narediti v nekem končnem času.

Primer:

Avto bi radi pripeljali od enega križišča do drugega. Cilj lahko dosežemo na več načinov. Če začnemo s prav majhnim pospeškom, bomo porabili malo goriva. Potrebovali pa bomo več časa. Če zelo pospešimo, porabimo veliko goriva. Zato pa pridemo do drugega križišča hitro. Odločiti se moramo, kaj je naš cilj, porabiti čim manj goriva, priti na cilj čim prej ali pa je naša prioriteta nekje vmes.

Kombinacijo teh prioritet imenujmo **cena**.

Minimizirali bi radi ceno.

Pojmi s katerimi bomo delali

Čas: V naših izpeljavah bo čas tekel zvezno od časa 0 do končnega časa t_{K}. Končni čas je lahko podan vnaprej. Lahko pa je tudi količina, ki jo hočemo minimizirati.

Stanje: Stanje sistema bomo podali z n realnimi števili: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, ki jih zapišemo kot n-terko $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

Začetno in končno stanje sistema: V času 0 bo sistem v stanju $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ in v končnem stanju v času t_{K}, $\mathbf{x}(t_{\mathrm{K}}) = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}$.

Funkcija vodenja: Za funkcijo vodenja ne bomo dopustili poljubne funkcije. Nič ne izgubimo na splošnosti, če funkcijo vodenja pri teoretični obdelavi omejimo kar z $-1 \leq u(t) \leq 1$.

Enačbe sistema: Vektor $\mathbf{x}(t)$ bo zadoščal sistemu diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t).$$

Cena: Cena je izraz oblike $J = J(u) = \int_0^{t_{\mathrm{K}}} g(\mathbf{x}(t), u(t), t)\, dt$, kjer je g pač primerno izbrana funkcija stanja, vodenja in časa.

Problem optimalnega vodenja

Za dani sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

poišči funkcijo vodenja iz nekega vnaprej določenega razreda funkcij, ki stanje sistema iz začetnega stanja $\mathbf{x}_0$ privede v končno stanje $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}$ in pri tem minimizira (ali maksimizira) ceno

$$J(u) = \int_0^{t_{\mathrm{K}}} g(\mathbf{x}(t), u(t), t)\, dt$$

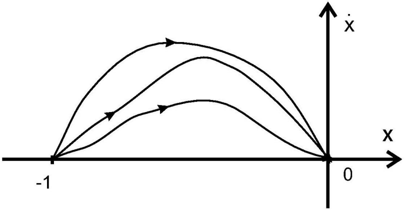
pri podani funkciji g ter končnem času t_{K} in/ali končnem stanju $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}$.

Matematična formulacija problema: "Tem hitreje do naslednjega križišča."

Vektor stanja naj sestoji iz dveh količin. Prva naj bo položaj avtomobila, druga pa njegova hitrost. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$.

Stanje lahko predstavimo na ravnini. Na vodoravno os nanesemo x, na navpično pa $\dot{x}$. Ravnino imenujemo **fazna ravnina fazni prostor** našega sistema.
Naj bo začetni x kar $x(0) = -1$, končni x pa $x(t_\mathrm{K}) = 0$. Masa vozila naj bo 1.
Na začetku in na koncu vozilo miruje, zato sta začetno in končno stanje:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Končni čas t_K bo treba določiti.

Funkcija vodenja bo sila, ki ustvarja pospešek (ali pojemek).
$|u(t)| \le 1, \qquad 0 \le t.$

Enačbo sistema dobimo iz drugega Newtonovega zakona. Ker je $F = m\ddot{x}$, za $m = 1$ dobimo enačbo

$$\ddot{x} = u(t).$$

Cena. Naš cilj je minimizirati čas, ki ga potrebuje vozilo za premik iz začetne točke v končno točko. Zato bomo vzeli za funkcijo $g(\mathbf{x}, u, t)$ kar konstanto 1. Cena bo tako

$$J = J(u) = \int_0^{t_\mathrm{K}} dt = t_\mathrm{K}.$$

Dveh stvari ne poznamo, končnega časa t_K in funkcije vodenja $u(t)$. Kasneje bomo s pomočjo Pontrjaginovega načela maksima dokazali, da je optimalna kontrola vodenje s funkcijo

$$u^*(t) = \begin{cases} 1: & 0 \le t < 1 \\ -1: & 1 \le t \le 2 \end{cases}.$$

Rešitev sistema (diferencialne enačbe) pri kontrolni funkciji u^*

Poiščimo pripadajočo trajektorijo na fazni ravnini.

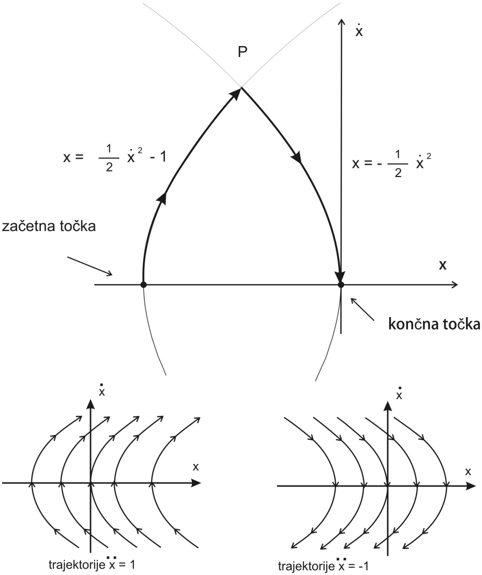
$$\ddot{x} = \begin{cases} 1: & 0 \le t < 1 \\ -1: & 1 \le t \le 2 \end{cases}, \qquad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{1}$$

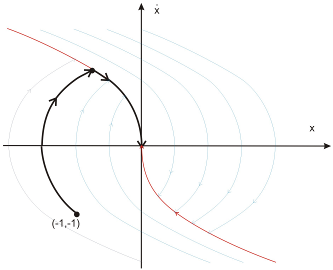
Za $0 \le t < 1$ je rešitev $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - 1$.
Za $1 \le t \le 2$ moramo za začetni pogoj vzeti konec prvega dela rešitve. Pri $t = 1$ je $x(1) = \frac{1}{2}$ in $\dot{x}(1) = 1$. Zato za $1 \le t \le 2$ velja $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 2$.Torej:

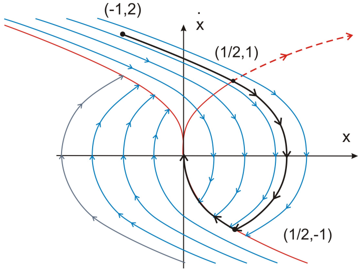
$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - 1: & 0 \le t < 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 2: & 1 \le t \le 2 \end{cases}. \tag{2}$$

Na fazno ravnino rišemo odvisnost med x in $\dot{x}$. Na intervalu $[0, 1)$ je $\dot{x} = t$, zato je tam zveza med x in $\dot{x}$ kar $x = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 1$, na intervalu $[1, 2]$ pa je $\dot{x} = -t + 2$, zato je tam $x = -\frac{1}{2}\dot{x}^2$.
Zato

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{x}^2 - 1: & 0 \le t < 1 \\ -\frac{1}{2}\dot{x}^2: & 1 \le t \le 2 \end{cases}. \tag{3}$$


P
ẋ
x = 1/2 ẋ² - 1
x = - 1/2 ẋ²
začetna točka
x
končna točka
ẋ
x
trajektorije ẍ = 1
ẋ
x
trajektorije ẍ = -1





Optimalna trajektorija iz $(-1,-1)$ v $(0,0)$; optimalna trajektorija iz $(-1,2)$ v $(0,0)$.

Kaj izbrati za ceno?

Čas minimiziramo, če za ceno izberemo $J(u) = \int_0^{t_K} dt = t_K$.

Če za ceno izberemo $J(u) = \int_0^{t_K} (u(t))^2$ bomo minimizirali porabo goriva.

Pri $J(u) = \int_o^{t_K} \dot{x}^2 dt$ minimiziramo obrabo vozila.

V praksi ceno običajno sestavimo iz vseh treh delov. Torej

$$J(u) = \int_0^{t_K} \left[a + b\dot{x}^2 + c(u(t))^2\right] dt, \quad a, b, c > 0.$$

(Preslikavo iz funkcij (vektorjev) v števila imenujemo funkcional.)

Pontrjaginovo načelo o maksimu

Če funkcija vodenja $u^*(t)$ pripelje rešitev sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

v času t_K iz začetnega stanja $\mathbf{x}_0$ v končno stanje $\mathbf{x}_\mathrm{K}$ tako, da hkrati minimizira funkcional

$$J = J(u) = \int_0^{t_\mathrm{K}} g(\mathbf{x}, u)\, dt,$$

potem ta optimalna funkcija vodenja tudi pri vsakem $t \in [0, t_\mathrm{K}]$ maksimizira **Hamiltonovo funkcijo**

$$H(u) = -g(\mathbf{x}, u) + p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 + \cdots + p_n\dot{x}_n,$$

kjer so **pridružene spremenljivke** $p_1, p_2, \dots, p_n$ določene z rešitvami **pridruženih enačb**

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Trajektorija x^* pri optimalni kontroli u^* se imenuje **optimalna trajektorija**.

Minimum energije

Poiščimo kontrolo, ki sistem $\dot{x} = x + u(t)$ pripelje iz začetne točke $x(0) = 1$ v točko $x(10) = 0$ in pri tem minimizira funkcional (ceno)

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{10} u^2(t)\,dt.$$

1. Konstrukcija Hamiltonove funkcije in pridruženih enačb.

$$H(x, p, u) = -g(x, u) + p\dot{x} = -\frac{1}{2}u^2 + p\dot{x} = -\frac{1}{2}u^2 + p(x + u).$$

Ker je $\frac{\partial H}{\partial x} = p$, za pridruženo spremenljivko p dobimo diferencialno enačbo

$$\dot{p} = -p \qquad (1).$$

2. Poiščemo pridruženo spremenljivko.

Diferencialna enačba (1) ima splošno rešitev

$$p = p(t) = ce^{-t} \qquad (2).$$

Konstanto c bomo določili kasneje.

3. Maksimiziramo Hamiltonovo funkcijo.

Ker načelo maksima pove, da mora biti Hamiltonova funkcija maksimizirana pri vsakem $t \in [0, t_{\mathrm{K}}]$ posebej, lahko poiščemo maksimum kar z odvajanjem po u (čas t je pri tem odvajanju fiksen). Odvod Hamiltonove funkcije $H(u) = -\frac{1}{2}u^2 + px + pu$ po u je: $H'(u) = -u + p$. V ekstremu je odvod enak 0. Zato v ekstremu velja

$$u = p.$$

Upoštevanjmo (2) in dobimo optimalno funkcijo vodenja:

$$u = p = ce^{-t} \qquad (3).$$

4. Rešimo enačbo sistema.

Enačba sistema je sedaj nehomogena linearna enačba prvega reda:

$$\dot{x} = x + ce^{-t}.$$

Njena rešitev je

$$x(t) = Ae^{t} - \frac{c}{2}e^{-t}.$$

Konstanti določimo iz začetnega in končnega stanja.

$$c = -2/(1 - e^{-20}), \qquad A = 1 + c/2 = 1 - 1/(1 - e^{-20}).$$

Rezultat

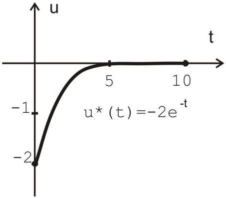
Zelo majhno napako naredimo, če vzamemo kar $c = -2$ in $A = 0$. Dobili smo optimalno kontrolo in optimalno trajektorijo:

$$u^*(t) = -2e^{-t}, \quad x^*(t) = e^{-t}, \qquad t \in [0, 10].$$

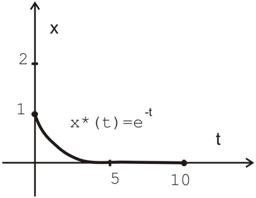
Izračunajmo še vrednost funkcionala:

$$J(u^*) = \frac{1}{2}\int_0^{10} [u^*(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{10} 4e^{-2t} \, dt = 1 - e^{-20} \approx 1.$$

Brez kontrole oziroma s kontrolo $u = 0$ bi rešitev eksponentno rastla proti neskončno. Z izračunano kontrolo pa je videti takole:



Funkcija vodenja



Optimalna trajektorija

Dirkalni avto, ustavljanje rakete

Tako gibanje dirkalnega avtomobila kot rakete v vesolju (kjer ni gravitacije) zadošča isti diferencialni enačbi. Če privzamemo, da je masa 1, dobimo:

$$\ddot{x} = u(t) \qquad (4).$$

Spredaj in zadaj je montiran motor s potisno silo največ 1. S tem smo omejili kontrolno funkcijo $|u(t)| \leq 1$.
Začnimo pri $x(0) = x_0$ in $\dot{x}(0) = y_0$. Končna lega in hitrost pa naj bosta $x(t_\mathrm{K}) = 0$ oziroma $\dot{x}(t_\mathrm{K}) = 0$.
Linearno diferencialno enačbo drugega reda (4) z uvedbo nove spremenljivke $y = \dot{x}$ pretvorimo na sistem dveh linearnih enačb prvega reda:

$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{x} & = & y, & \quad & x(0) & = & x_0, \\ \dot{y} & = & u(t). & & y(0) & = & y_0. \end{array} \qquad (5)$$

Ker želimo minimizirati čas, za funkcional vzamemo

$$J = t_\mathrm{K} = \int_0^{t_\mathrm{K}} dt. \qquad (6)$$

Zato je $g(x, y, u) \equiv 1$.

1. Konstrukcija Hamiltonove funkcije in pridruženih enačb.

$H(u) = -g(x, y, u) + p\dot{x} + q\dot{y} = -1 + py + qu$. Prirejene spremenljivke so določene s $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p$.

2. Poiščemo pridruženi spremenljivki.

$p(t) = A, \qquad q(t) = -At + B$. Konstanti A in B bomo določili kasneje.

3. Maksimiziramo Hamiltonovo funkcijo.

Ko v Hamiltonovo funkcijo vstavimo pridruženi spremenljivki, dobimo:

$$H(u) = -1 + Ay + (-At + B)u, \quad u \in [-1, 1].$$

Če je $(-At + B) \geq 0$, je maksimum pri $u = 1$; če je $(-At + B) < 0$, je maksimum pri $u = -1$.

$$u(t) = \begin{cases} 1 : & -At + B \geq 0 \\ -1 : & -At + B < 0 \end{cases}.$$

Ker je funkcija $-At + B$ linearna, samo enkrat zamenja predznak. Na enem delu intervala $[0, t_{\mathrm{K}}]$ bo zato $u = 1$, na komplementarnem delu pa $u = -1$. (Eden od teh dveh kosov je lahko dolg 0.)

4. Rešimo enačbi sistema.

Najprej pri $u = 1$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= 1,\end{aligned}$$

$y = t + C$, $x = \frac{1}{2}t^2 + Ct + D$ in ko se znebimo t-ja:

$$x = \frac{1}{2}y^2 + \left(D - \frac{1}{2}C^2\right) = \frac{1}{2}y^2 + K, K \in \mathbb{R} \qquad (7).$$

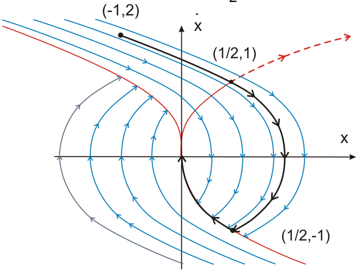
Podobno rešimo še sistem za $u = -1$: $y = -t + E$, $x = -\frac{1}{2}t^2 + Et + F$,

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + L, L \in \mathbb{R} \qquad (8).$$

Trajektorije so nam že znane. Iz začetne točke potujemo po paraboli iz ene družine do tiste parabole iz druge družine, ki gre skozi končno točko, in potem po njej do končne točke.
Čas t_{K} izračunamo na koncu. Nobene lepe poti za njegov izračun ni. Vemo pa, da je to minimalen čas.

Primer:

Izračunajmo do konca primer z začetno točko $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 2$. Najprej bomo vključili raketi na desni strani. Gibali se bomo po parabolah iz družine (8). Ker mora parabola skozi $(-1, 2)$, je $L = 1$. Končali bi radi v $(0, 0)$, zato moramo iz prve družine (7) izbrati parabolo $x = \frac{1}{2}y^2$. Paraboli $x = \frac{1}{2}y^2$ in $x = -\frac{1}{2}y^2 + 1$ se sekata v $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$ in $y = -1$, $x = \frac{1}{2}$. (Pri $y = 1$ bi nas pot po paraboli iz družine (7) odnesla stran od izhodišča (kamor želimo). Zato je preklopna točka $P(\frac{1}{2}, -1)$.



Koliko je t_K?

Izračunajmo še čas t_{K}. Ker smo pri $t = 0$ v točki $(-1, 2)$, potem pa se gibljeno po trajektoriji iz druge družine ($y = -t + E$, $x = -\frac{1}{2}t^2 + Et + F$), pridemo pri $t = 3$ do preklopne točke $P(\frac{1}{2}, -1)$. Potem pa se po trajektoriji iz prve družine gibljeno do $(0, 0)$. Spremenljivka y se tam spreminja kot $y = t + C$. Ker gre skozi 0, je $C = 0$. Za spremembo y-ona od -1 do 0, se čas t spremeni za 1. Celoten čas je zato $t_K = 3 + 1$.