Pogosto zastavljena vprašanja

Naloga. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(5\pi x)}{\sin(2\pi x)} .$$

Rešitev #1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sin(5\pi x)}{\sin(2\pi x)} &\overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(5\pi(y+3))}{\sin(2\pi(y+3))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(5\pi y+15\pi)}{\sin(2\pi y+6\pi)} \\
&\overset{(\dagger)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(5\pi y+\pi)}{\sin(2\pi y)} \overset{(\ddagger)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(5\pi y)}{\sin(2\pi y)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(5\pi y)\cdot 2\pi y\cdot 5}{\sin(2\pi y)\cdot 5\pi y\cdot 2} \overset{(\star)}{=} -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$(*)$: Substitucija $y = x - 3$.

$(\dagger)$: Upoštevamo $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ in $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$.

$(\ddagger)$: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$

$(\star)$: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(5\pi y)}{5\pi y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y} = 1$

□

Rešitev #2. Z uporabo L'Hospitalovega pravila, saj je $\sin(15\pi) = \sin(6\pi) = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sin(5\pi x)}{\sin(2\pi x)} &= \lim_{x\to 3} \frac{\cos(5\pi x)\cdot 5\pi}{\cos(2\pi x)\cdot 2\pi} \\
&= \frac{\cos(15\pi)\cdot 5}{\cos(6\pi)\cdot 2} \overset{(*)}{=} -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$(*)$: $\cos(2k\pi) = 1$ in $\cos(2k\pi + \pi) = -1$ za $k \in \mathbb{Z}$.

□

Naloga. Določi funkcijo $f\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}$, če veste, da za vsak $y \in (-\infty,-1]$ velja:

$$f(y^2 + 2y) = y + 1. \tag{1}$$

Rešitev. Kako bi na primer poiskali $f(3)$? Vzemimo kar $y = -3$. Ker je $y \in (-\infty,-1)$, velja zanj enakost (1), torej:

$$\begin{aligned}
f\left((-3)^2 + 2\cdot(-3)\right) &= -3 + 1 \\
f(3) &= -2
\end{aligned}$$

Kako pa bi poiskali $f(5)$? Iz enačbe (1), le y moramo primerno "izbrati".

Naj bo $x \in [-1, \infty)$ poljuben. Da bi našli ustrezen y, moramo rešiti (kvadratno) enačbo $y^2 + 2y = x$.

$$y^2 + 2y - x = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4x}}{2}$$

Ker velja (1) za $y \leq -1$, moramo vzeti $y = \frac{-2-\sqrt{4+4x}}{2} = -1 - \sqrt{1+x} \leq -1$. Iz (1) sledi

$$f(x) = f(y^2 + 2y) = y + 1 = -1 - \sqrt{1+x} + 1 = -\sqrt{1+x}.$$

□

Naloga. Z uporabo popolne indukcije dokaži, da za $n > 1$ velja

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

Rešitev. Preverimo, da trditev velja za $n = 2$ (tj. baza indukcije):

$$2! \overset{?}{<} \left(\frac{2+1}{2}\right)^2$$
$$2 \overset{?}{<} \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

Vidimo, da trditev res velja za $n = 2$.

Zdaj pa predpostavimo, da trditev velja za $n - 1$ (indukcijska predpostavka), torej da velja

$$(n-1)! < \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} .$$

Radi bi videli, da je $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{2^n}$. Računajmo:

$$n! = n \cdot (n-1)! \overset{(*)}{<} n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} = \frac{n^n}{2^{n-1}} = \frac{2n^n}{2^n} \overset{(\dagger)}{<} \frac{(n+1)^n}{2^n} .$$

$(*)$: Uporabili smo indukcijsko predpostavko.
$(\dagger)$: Upoštevali smo, da je $(n+1)^n > 2n^n$. To moramo posebej dokazati.

Binomski izrek (trditev 1.4.26 na str. 28 v Doboviškovi knjigi) pravi, da za $x, y \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n .$$

Po binomskem izreku je

$$\begin{aligned}
(n+1)^n &= \binom{n}{0}n^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1}n^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}n^{n-2} \cdot 1^2 + \cdots \\
&= n^n + n \cdot n^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}n^{n-2} + \cdots \\
&= n^n + n^n + \frac{n(n-1)}{2}n^{n-2} + \cdots \\
&> 2n^n
\end{aligned}$$

Zdaj smo dokazali, da velja ocena, ki smo jo zgoraj označili z $(\dagger)$. □

Naloga. Poišči limito izraza

$$x + (1 - x^3)^{1/3}$$

pri pogoju $x \to \infty$.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x + (1-x^3)^{1/3} &= \lim_{x\to\infty} x + \sqrt[3]{1-x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x + \sqrt[3]{1-x^3})(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2)}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + (1-x^3)}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + (\sqrt[3]{1-x^3})^2} \\
&\overset{(\dagger)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}\right)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}\right)^2} \overset{(\ddagger)}{=} \frac{0}{1 - (-1) + (-1)^2} = 0
\end{aligned}$$

$(*)$: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(\dagger)$: Števec in imenovalec delimo z x^2.

$(\ddagger)$: $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \qquad \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$\square$