

# MATEMATIKA S STATISTIKO

UNIVERZITETNA ŠTUDIJSKA PROGRAMA  
LABORATORIJSKA BIOMEDICINA IN  
KOZMETOLOGIJA  
1. LETNIK



# INTEGRAL

Rešujemo nalog:

Dana je funkcija  $f$ . Poišči funkcijo  $F$ , katere odvod je enak  $f$ .

Kadar je  $F'(x)=f(x)$  pravimo, da je  $F(x)$  **primitivna funkcija za funkcijo  $f(x)$** .

$$f(x) \overset{\text{OLE}}{=} \cos x$$



$$F(x) \overset{\text{OLE}}{=} \sin x$$

$$f(x) \overset{\text{OLE}}{=} \sin x$$



$$F(x) \overset{\text{OLE}}{=} -\cos x$$

$$f(x) \overset{\text{OLE}}{=} e^x$$



$$F(x) \overset{\text{OLE}}{=} e^x$$

$$f(x) \overset{\text{OLE}}{=} 3$$



$$F(x) \overset{\text{OLE}}{=} 3x$$

$$f(x) \overset{\text{OLE}}{=} x^2$$



$$F(x) \overset{\text{OLE}}{=} \frac{x^3}{3}$$

Za vsako funkcijo obstaja več primitivnih funkcij:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(3 + \sin x)' = 3' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x$$

primitivni funkciji za  $\cos x$   
sta tako  $\sin x$ , kot  $3 + \sin x$

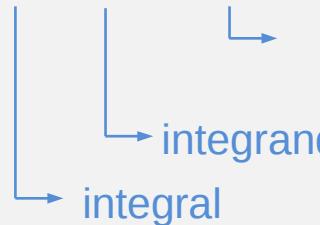
Če poznamo eno primitivno funkcijo za  $f$ , dobimo vse druge tako, da tej prištejmo vse možne konstante.

Množico vseh primitivnih funkcij za  $f(x)$  označimo z  $F(x) + c$ , kjer je  $F(x)$  neka primitivna funkcija za  $f(x)$ ,  $c$  pa je poljubno realno število.

Postopek določanja primitivne funkcije imenujemo **integriranje**.

Pišemo:

$$F(x) = \int f(x) dx$$



pove po kateri spremenljivki integriramo in nastopa pri formulah za računanje integralov

Pri računanju integralov uporabljamo pravila za integriranje in integrale osnovnih funkcij.

## OSNOVNI

## INTEGRALI

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x$$

PRAVILA  
INTEGRIRANJA

$$\int k \times f(x) \, dx = k \times \int f(x) \, dx$$

produkt s konstanto

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

vsota

$$\int (x^3 + x^2) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

$$\int \left( t - \frac{1}{t} \right)^2 dt = \int t^2 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} dt = \frac{t^3}{3} - 2t - \frac{1}{t}$$

$$\int (2x + 1)^4 dx = \int 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1 dx =$$

$$= \frac{16}{5} x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 4x^2 + x$$

## UVEDBA NOVE SPREMENLJIVKE

Če je  $\int f(x) dx = F(x)$ , potem je

$$\int f(g(x)) \times g'(x) dx = F(g(x))$$

pravilo: funkcija  $u(x)$   $\longrightarrow$   $du = u'(x) dx$

Novo spremenljivko  $u$  vpeljemo tako, da povsod, kjer v integralu nastopa spremenljivka  $x$ , jo zamenjamo z ustreznim izrazom v spremenljivki  $u$ .

$$\int (2x+1)^4 dx =$$

$$u = 2x+1$$

$$du = 2 dx$$

$$dx = \frac{1}{2} du$$

$$= \int u^4 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} = \frac{(2x+1)^5}{10}$$

$$\left( = \frac{16}{5} x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 4x^2 + x + \frac{1}{10} \right)$$

$$\int \sin(4x - 3) dx = \int \sin u \frac{1}{4} du = -\frac{1}{4} \cos u = -\frac{1}{4} \cos(4x - 3)$$



$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$u = -x^2 \quad du = -2x dx$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{u} du = -\ln u = -\ln(\cos x)$$

$$u = \cos x \quad du = -\sin x dx$$

## INTEGRACIJA 'PO

DELIH'

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

(integriranje produktov določene oblike.)

krajše:  $\int u \times dv = u \times v - \int v \times du$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= e^x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \times \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= x dx & v &= \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

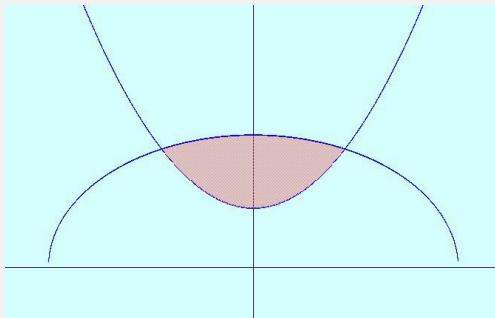
$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 & du &= 2x dx \\ dv &= \cos x dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

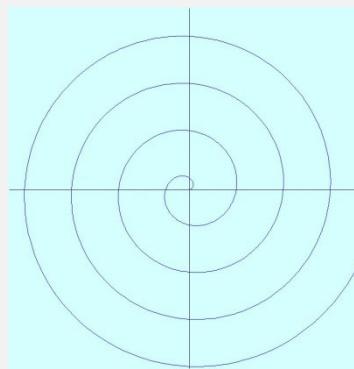
$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= \sin x dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$$

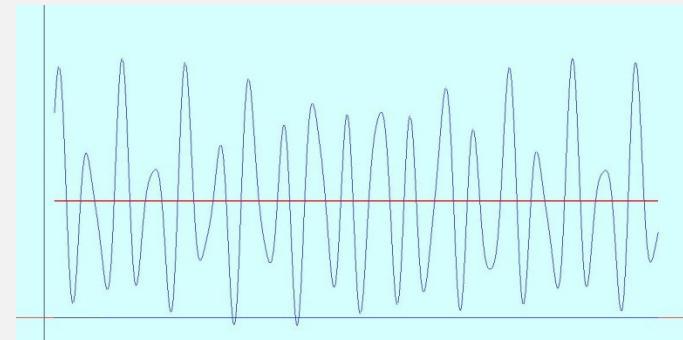
## UPORABA INTEGRALA



Ploščine likov



Dolžine krivulj



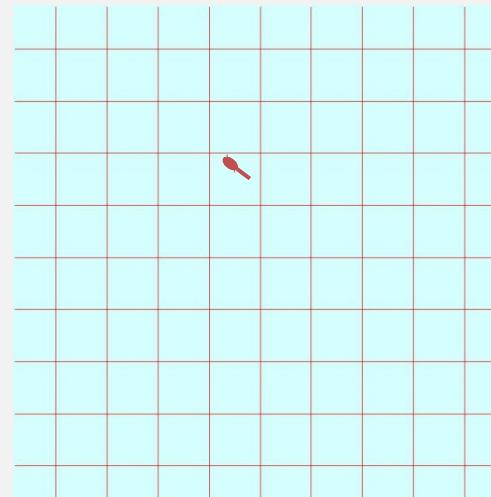
Povprečja

Hitrost ohlajanja nekega telesa je sorazmerna razlike med temperaturo telesa in temperaturo okolice:

$$T = k(T - T_0)$$

Kako hitro se bo vreda juha v prostoru, kjer je  $20^{\circ}\text{C}$  ohladila do užitnih  $50^{\circ}\text{C}$ ?

Diferencialne enačbe



Verjetnost

Kolikšna je verjetnost, da bo žlica, ki pada na tla obležala na eni sami ploščici?

## TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV IN PRAVIL ZA INTEGRIRANJE

$$\int x^r dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} & r \neq -1 \\ \ln x & r = -1 \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x$$

$$\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$$

$$\int k \cdot u(x) dx = k \cdot \int u(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \cdot x'(u) du$$

uvedba nove spremenljivke  
(substitucija)

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

integracija po delih  
(per partes)

# INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad P(x), Q(x) \text{ polinoma}$$

formula:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b)$

1.korak Če je potrebno, z deljenjem prevedemo na primer, ko je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca.

2.korak Imenovalec razcepimo na faktorje, potem pa integrand razcepimo na delne ulomke oblike

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{in} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$$

3.korak Integriramo dobljeni izraz.

$$\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} dx = ?$$

$$(x^3 - 3x + 1) : (x^2 - 1) = x, \text{ ost. } -(2x - 1)$$

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2x - 1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2x - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$2x - 1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$$

$$A + B = 2, \quad A - B = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} dx = \int \left( x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{3}{2} \ln(x+1)$$

Če ima imenovalec dvojno ničlo lahko vpeljemo novo

spremenljivko:

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^2} dx = ?$$

$$u = 2x - 1, \quad du = 2 dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^2} dx = \int \frac{\frac{u+1}{2} + 1}{u^2} \frac{du}{2} = \int \frac{u + \frac{3}{2}}{4u^2} du = \frac{1}{4} \ln u - \frac{3}{4u} = \frac{1}{4} \ln(2x-1) - \frac{3}{8x-4}$$

Če imenovalec nima realnih ničel, lahko prevedemo na logaritem in arkus tangens:

$$\int \frac{3x+1}{2+x^2} dx = ?$$

$$\int \frac{3x+1}{2+x^2} dx = \int \frac{3x}{2+x^2} dx + \int \frac{1}{2+x^2} dx$$

$$\int \frac{3x}{2+x^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} \ln u = \frac{3}{2} \ln(2+x^2)$$

$$u = 2+x^2, \quad du = 2x dx$$

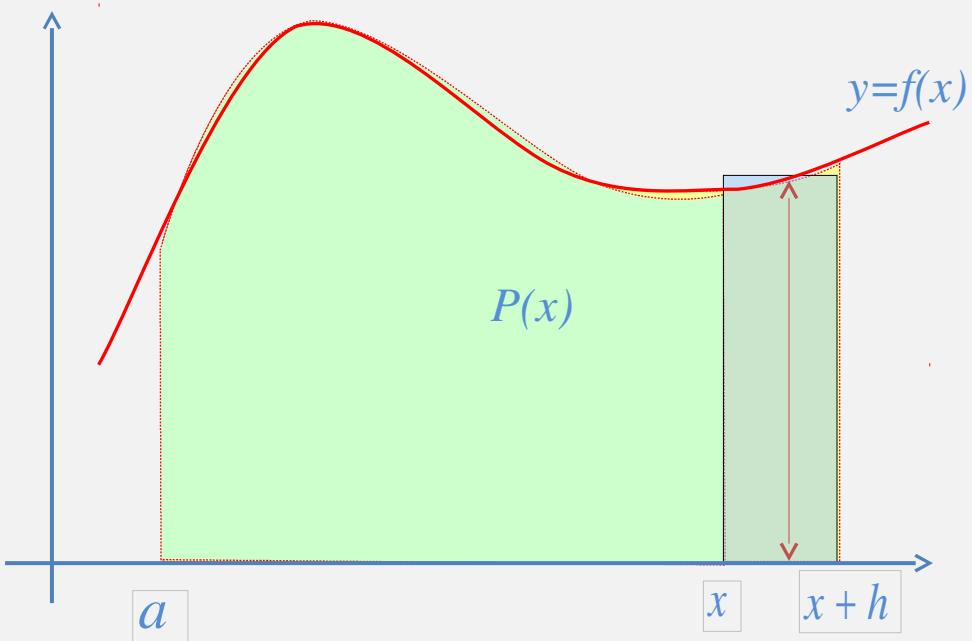
$$\int \frac{1}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} u = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$u^2 = x^2/2, \quad u = x/\sqrt{2}, \quad dx = \sqrt{2} \cdot du$$

## RAČUNANJE PLOŠČIN

Želimo določiti ploščino pod grafom funkcije  $y=f(x)$ .

S  $P(x)$  označimo ploščino pod grafom na intervalu od  $a$  do  $x$ :



$$h \cdot \min_{x \in [x, x+h]} f(x) \leq P(x+h) - P(x) \leq h \cdot \max_{x \in [x, x+h]} f(x)$$

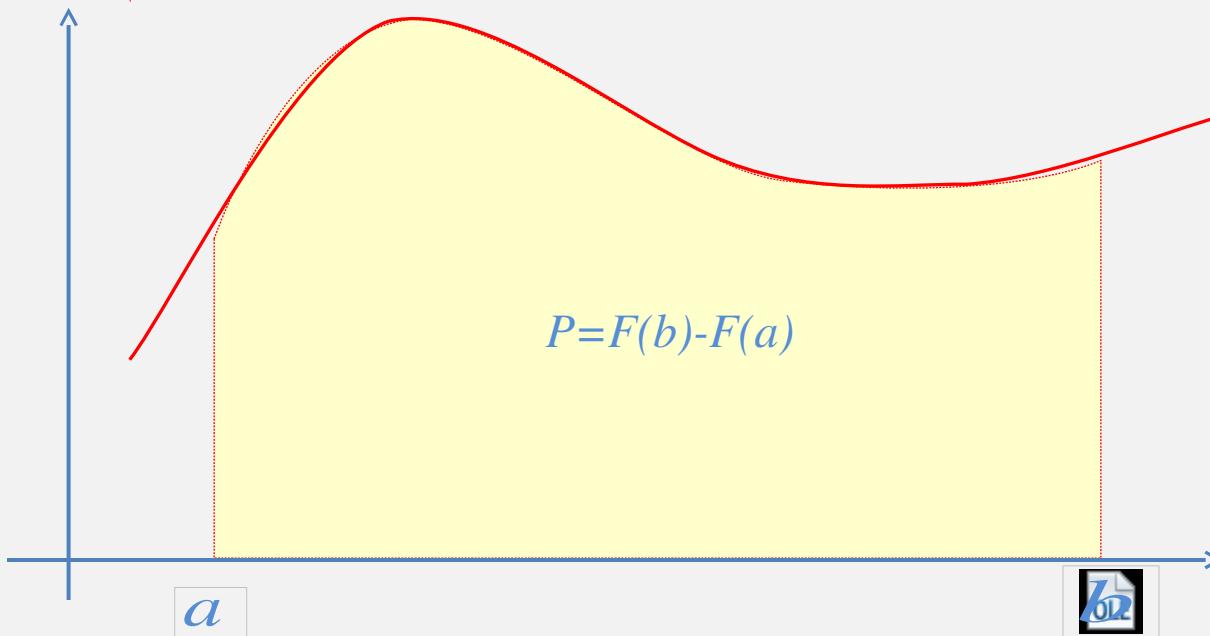
$$\min_{x \in [x, x+h]} f(x) \leq \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \leq \max_{x \in [x, x+h]} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = f(x)$$

$P(x)$  je primitivna funkcija za  $f(x)$ .

Če je tudi  $F(x)$  primitivna funkcija za  $f(x)$ , potem je  $F(x)-P(x)=c$ .

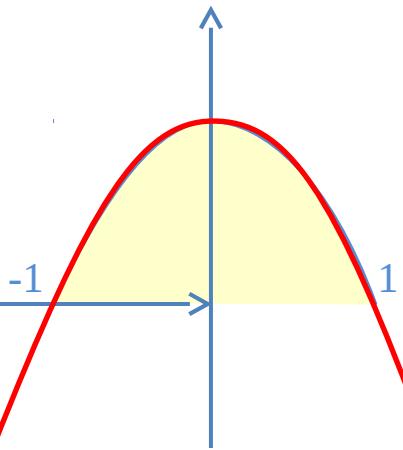
Kako bi izračunali  $c$ ? Vstavimo  $x=a$ :  $F(a)-P(a)=c \Rightarrow c=F(a) \Rightarrow P(x)=F(x)-F(a)$ .



Če je  $F(x)$  poljubna primitivna funkcija za  $f(x)$ , potem je ploščina pod grafom  $y=f(x)$  na intervalu  $[a,b]$  enaka  $P=F(b)-F(a)$ .

**Newton-Leibnizova formula**

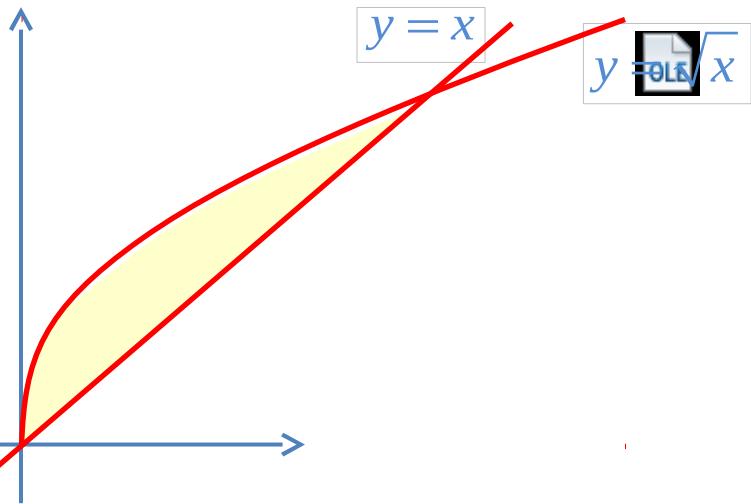
Določi ploščino lika, ki ga omejujeta abscisa in parabola  $y=1-x^2$ .



$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

OLE

Določi ploščino lika med  $x=y^2$  in  $y=x$ .

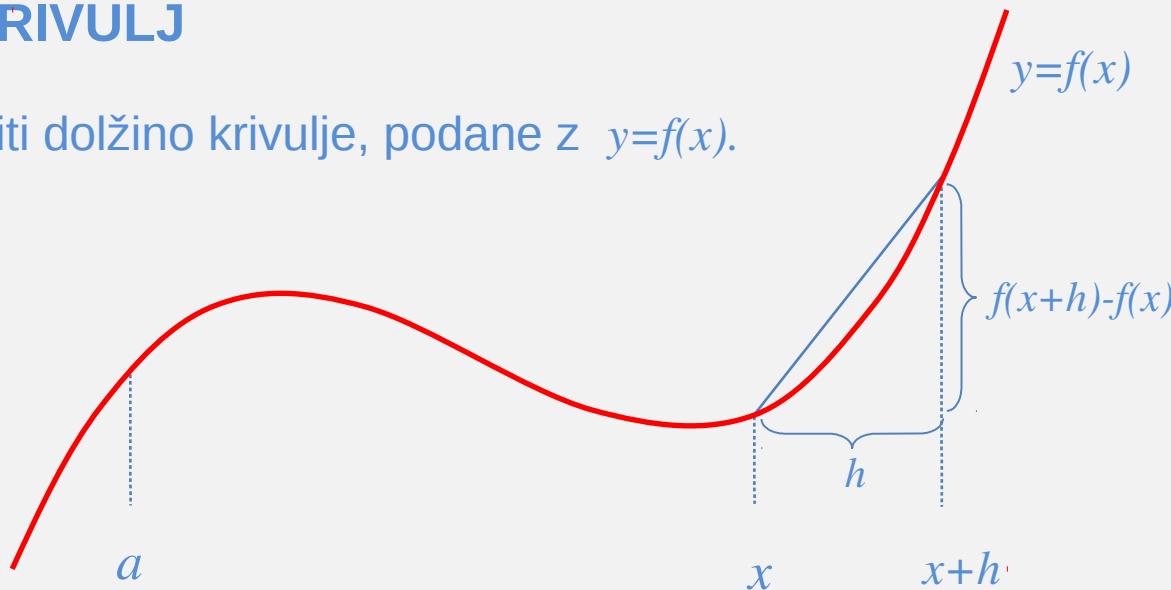


$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

OLE

## DOLŽINE KRIVULJ

Želimo določiti dolžino krivulje, podane z  $y=f(x)$ .



Označimo z  $l(x)$  dolžino grafa na intervalu od  $a$  do  $x$ .

$$l(x+h) - l(x) \approx \sqrt{h^2 + (f(x+h) - f(x))^2} = h \times \sqrt{1 + \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)^2}$$

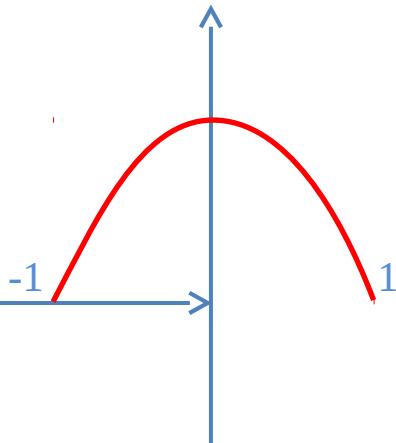
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(x+h) - l(x)}{h} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$\boxed{l(x)}$  je primitivna funkcija za funkcijo  $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$

Dolžina krivulje, podane z  $y=f(x)$  na intervalu  $[a,b]$  je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Izračunaj dolžino loka parabole  $y=1-x^2$  na intervalu  $[-1,1]$ .



$$f'(x) = -2x$$

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \approx 2.95$$

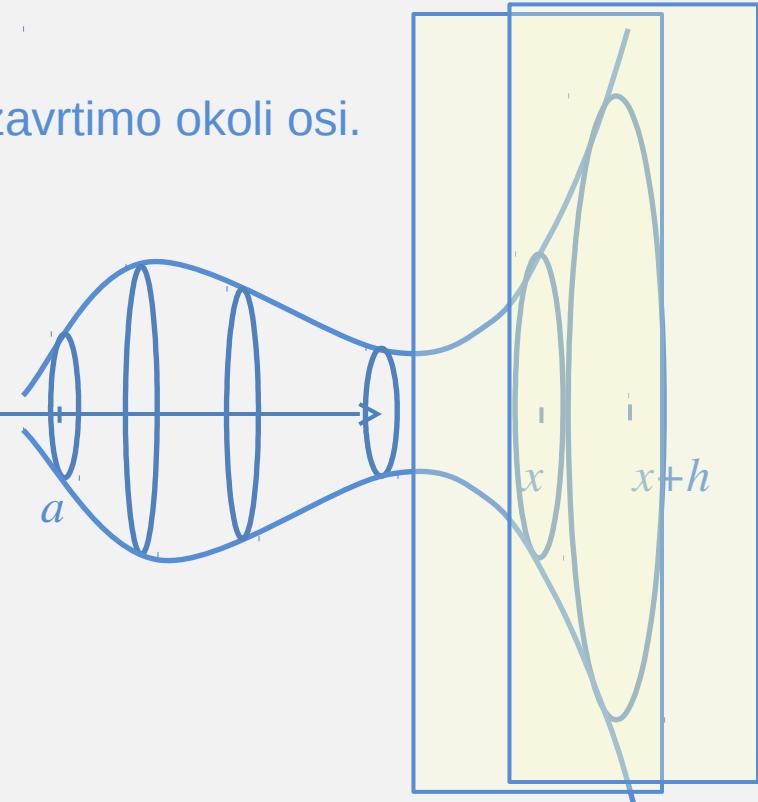
## PROSTORNINA VRTENINE

Vrtenina je telo, ki ga dobimo, ko dani lik zavrtimo okoli osi.

$V(x)$  je prostornina na intervalu od  $a$  do  $x$ .

$$V(x+h) - V(x) \underset{\text{OLE}}{\approx} (f(x))^2 \pi \times h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \underset{\text{OLE}}{=} (f(x))^2 \pi$$

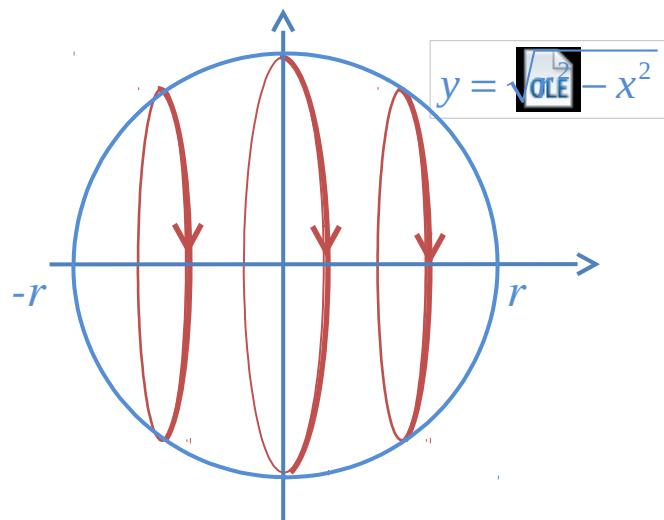


$V(x)$  je primitivna funkcija za funkcijo  $(f(x))^2 \pi$

Prostornina vrtenine pod  $y=f(x)$  na intervalu  $[a,b]$ :

$$V = \pi \times \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

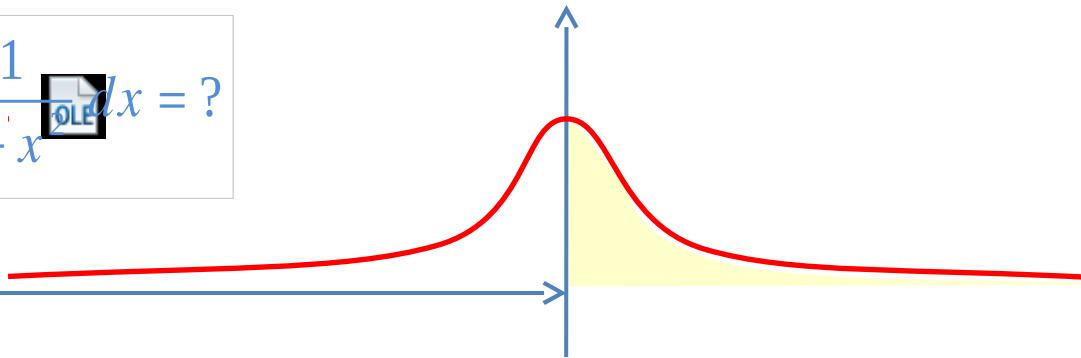
Prostornina krogle: kroglo dobimo, če zavrtimo krožnico okoli abscisne osi.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \times \int_{-r}^r \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx \\
 &= \pi \times \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \quad \text{OLE} \quad \pi \times \left( r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \\
 &= \pi \times \left( \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left( -r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi
 \end{aligned}$$

## IZLIMITIRANI INTEGRALI

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} dx = ?$$



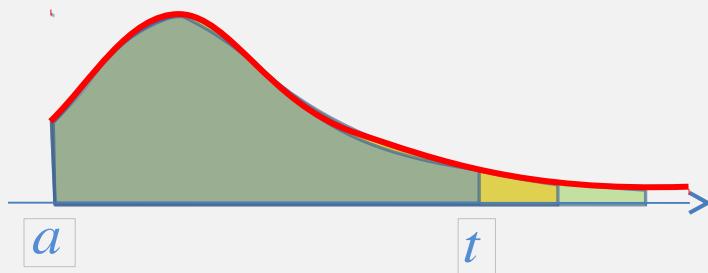
Formalno uporabimo Newton-Leibnizovo formulo:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \stackrel{?}{=} \arctg x \Big|_0^{\infty}$$

Interpretiramo:  $\arctg x \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}$

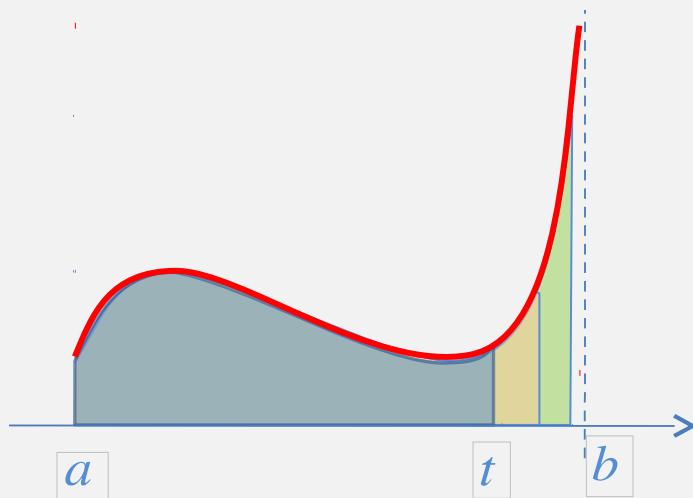
## Osnovna primera:

- $f$  zvezna na neomejenem intervalu  $[a, +\infty)$



$$\int_a^{\infty} f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f$$

- $f$  zvezna na  $[a, b]$ , pri  $b$  neomejena



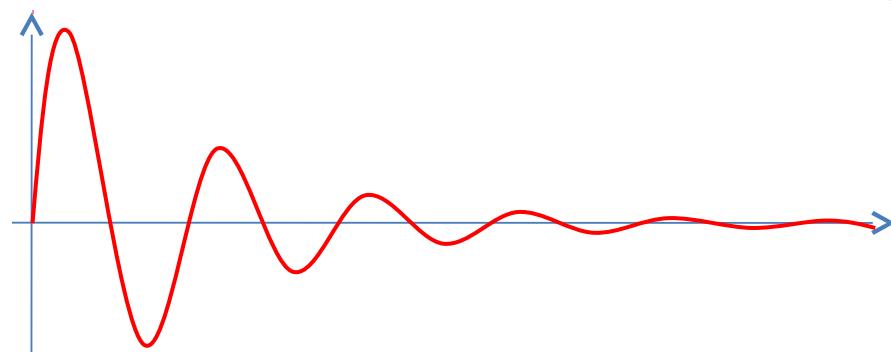
$$\int_a^t f \text{ obstaja za } t < b$$

$$\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin 2x \, dx =$$

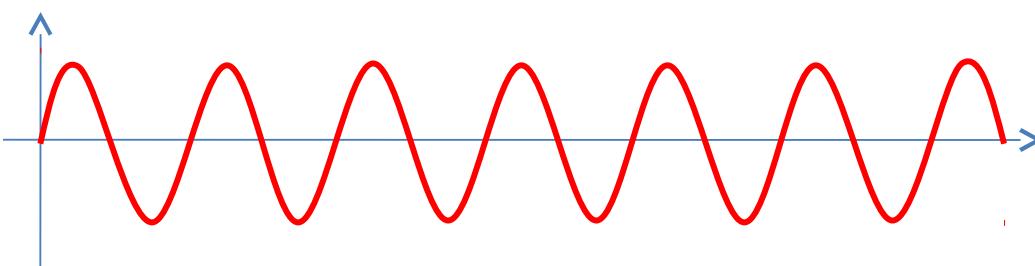
$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-t}}{5} (\sin 2t + 2 \cos 2t) \right) + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$



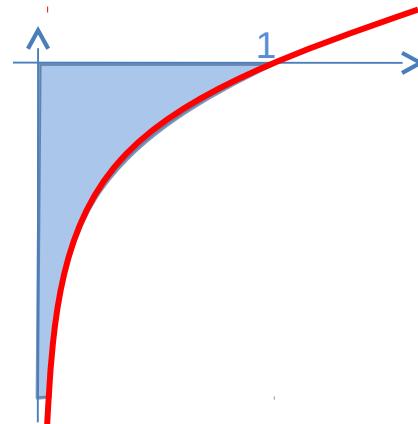
$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (-\cos t) + 1$$

limita ne obstaja



$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 - \lim_{t \rightarrow 0} (t \ln t - t) = -1$$

$$\int \ln x \, dx = \ln x - x$$



## NUMERIČNO RAČUNANJE

Integral računamo numerično, če ne znamo določiti primitivne funkcije ali če je integrand znan le v posameznih točkah.

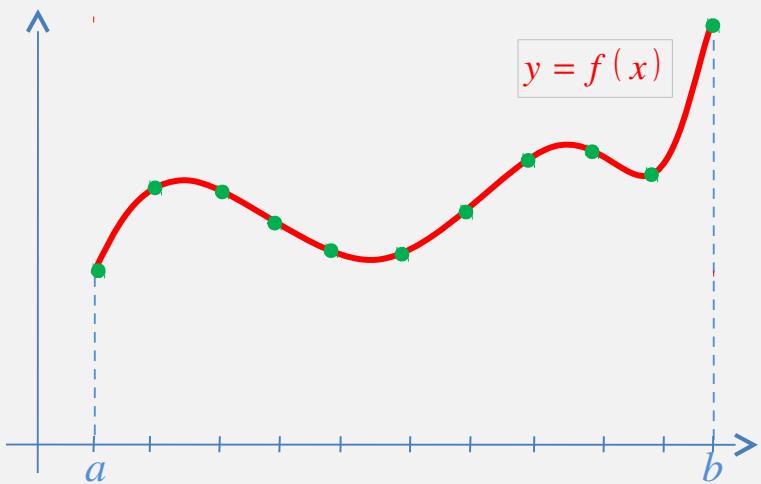
Integrand  $f$  nadomestimo s približkom  $g$ , ki ga znamo dovolj preprosto integrirati.

Približek  $g$  določimo na podlagi vrednosti  $f$  v izbranih delilnih točkah (včasih tudi iz vrednosti odvodov).

$$\int_a^b f = \int_a^b g + R$$

- napaka, odvisna od metode in od števila delilnih točk
- približna vrednost integrala

## METODA TRAPEZOV



$[a,b]$  razdelimo na  $n$  enakih delov:

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$
$$y_k = f(x_k)$$

Funkcijo  $f$  nadomestimo z odsekoma linearne funkcije  $g$ , določeno s točkami

$$\int_{x_k}^b g = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

$$\int_a^b g = \frac{b-a}{2n} \cdot [(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_{n-1} + y_n)]$$

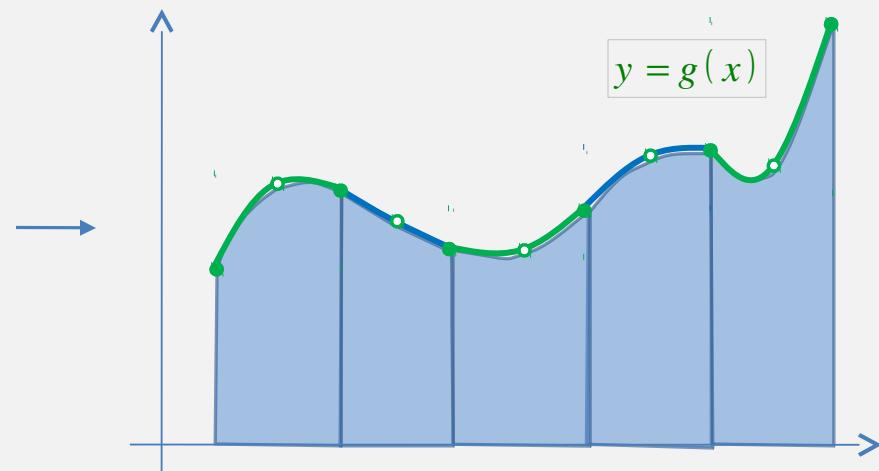
$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2n} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) + R_n$$

trapezna formula

napaka  
metode

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

## SIMPSONOVA METODA



$[a, b]$  razdelimo na  $n$  enakih delov; vsakega razpolovimo in čez tako dobljene tri točke potegnemo parabolo. Funkcijo  $f$  nadomestimo z  $g$ , sestavljeno iz teh parabol.

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2n} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n)$$
$$y_k = f(x_k)$$

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} g = \frac{b-a}{2n} \cdot \frac{y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}}{3}$$

$$\int_a^b g = \frac{b-a}{6n} \cdot [(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) + R_n]$$

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6n} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) + R_n$$

Simpsonova formula

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Izračun  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$  napako < 0.01.

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0.6931$$

### Trapezna metoda:

1. Iz pogoja  $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| < 0.01$  določimo primeren  $n$ :

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| = 2, \quad \frac{2}{12n^2} < 0.01 \Rightarrow n \geq 5$$

2. Določimo delilne točke in izračunamo pripadajoče funkcijске vrednosti:

$x_k$	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
$y_k$	1.0000	0.8333	0.7143	0.6250	0.5555	0.5000

3. Vstavimo v trapezno formulo:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx \frac{1}{10} (1.000 + 2 \cdot 0.8333 + 2 \cdot 0.7143 + 2 \cdot 0.6250 + 2 \cdot 0.5555 + 0.5000) = 0.6956$$

dejanska napaka 0.0025

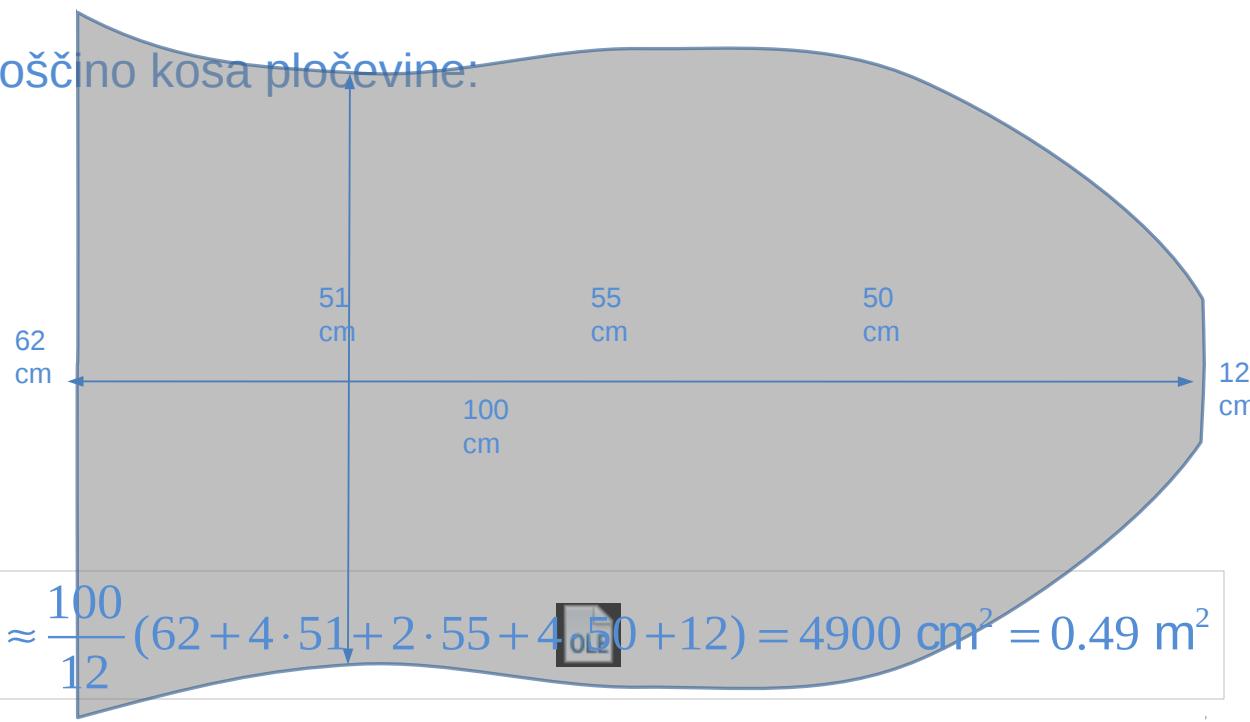
### Simpsonova metoda:

$n=2$  (4 delilne točke)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx \frac{1}{12} (1.000 + 4 \cdot 0.8000 + 2 \cdot 0.6666 + 4 \cdot 0.5714 + 0.5000) = 0.6932$$

dejanska napaka 0.0001

Oceni ploščino kosa pločevine:



## DIFERENCIJALNE

### ENAČBE

**Diferencialna enačba** je funkcionalna enačba, v kateri nastopajo odvodi iskane funkcije

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

diferencialna enačba za  $y$  kot funkcijo  $x$

$$y' + 2y = 0$$

avtonomna diferencialna enačba  
(neodvisna spremenljivka ne nastopa v enačbi)

$$xy' = 1 - y^2$$

nelinearna diferencialna enačba  
(odvesna spremenljivka ne nastopa linearno)

$$y'' - 2y' + y = x - 2$$

diferencialna enačba 2. reda  
**Red diferencialne enačbe** je red najvišjega odvoda, ki v njej nastopa.

$$x^2 y' y''' + e^y = xy^2$$

diferencialna enačba 3. reda

$$z_{xx}'' + z_y' = x$$

parcialna diferencialna enačba (2. reda)

Diferencialne enačbe za funkcije ene spremenljivke imenujemo **navadne**, ko nastopajo parcialni odvodi na več spremenljivk pa pravimo, da so to **parcialne** diferencialne enačbe

$F(x,y,y')=0$  splošna oblika diferencialne enačbe 1. reda

Rešitev diferencialne enačbe je funkcija  $y=y(x)$ , pri kateri je  $F(x,y(x),y'(x))=0$  za vse  $x$  na nekem definicijskem območju.

$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$  je rešitev diferencialne enačbe  $y' = xy$ ,

 ker je  $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

$y(x) = x^2$  **ni** rešitev diferencialne enačbe  $y' = xy$ ,

 čeprav je  $2x = x^3$  za nekatere vrednosti  $x$

Enačba mora biti izpolnjena za **vse**  $x$  na nekem intervalu.

Najpreprostejši tip diferencialne enačbe  $y' = f(x)$

Rešitev je:  $y(x) = \int f(x) dx$

Tudi druge diferencialne enačbe skušamo prevesti na računanje integralov.

1. korak:

pišemo

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

2. korak: enačbo preoblikujemo tako, da so vsi  $y$  na eni in vsi  $x$  na drugi strani enačbe

(ko se to izide pravimo, da gre za enačbo z **ločljivimi spremenljivkami**)

3. korak: integriramo obe strani

enačbe

$$y' = xy$$

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = x dx$$

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad (C = e^c)$$

Preskus:

$$(C \cdot e^{\frac{x^2}{2}})' = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{2x}{2} = x \cdot (C \cdot e^{\frac{x^2}{2}})$$

## FIZIKALNI PRIMER: RADIOAKTIVNI RAZPAD

Hitrost razpadanja radioaktivne snovi je sorazmerna s količino snovi (reakcija 1. reda). Če imamo na začetku neko količino snovi (npr. 5g izotopa  $^{14}\text{C}$ ), kaj lahko povemo o količini snovi čez nekaj časa (npr. čez koliko časa bo ostalo le 3g  $^{14}\text{C}$ )?

$$y=y(t) \quad \text{količina snovi v trenutku } t$$

$y' = -ky$   $k$  je sorazmernostni faktor med količino snovi in hitrostjo razpadanja (npr. za  $^{14}\text{C}$  je  $k=3.83 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ )

$$\frac{dy}{dt} = -ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -k dt \Rightarrow \ln y = -kt + c \Rightarrow y = Ce^{-kt}$$

$y(0)=C$ , torej je  $C$  ravno začetna količina opazovane snovi

$$\text{Za } ^{14}\text{C} \quad 3 = 5e^{-kt} \Rightarrow t = -\frac{\ln \frac{3}{5}}{k} = \frac{0.5108}{3.83 \cdot 10^{-12}} = 133368146214 \text{ s} \approx 4230 \text{ let}$$

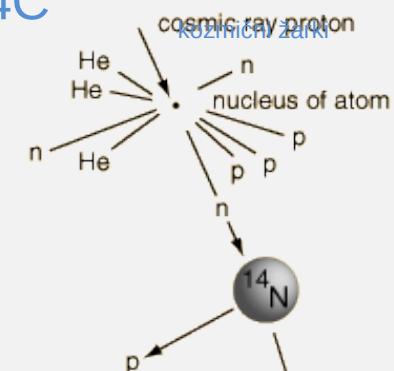
Diferencialna enačba skupaj z začetnim stanjem v celoti določa evolucijo sistema.

Hitrost razpadanja pogosto podamo z razpolovno dobo  $T$ : zveza s  $k$  je  
 $kT = \ln 2$

Razpolovna doba  $^{14}\text{C}$  je  $(0.6931/3.83) \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 5730 \text{ let}$ .

## DATIRANJE S

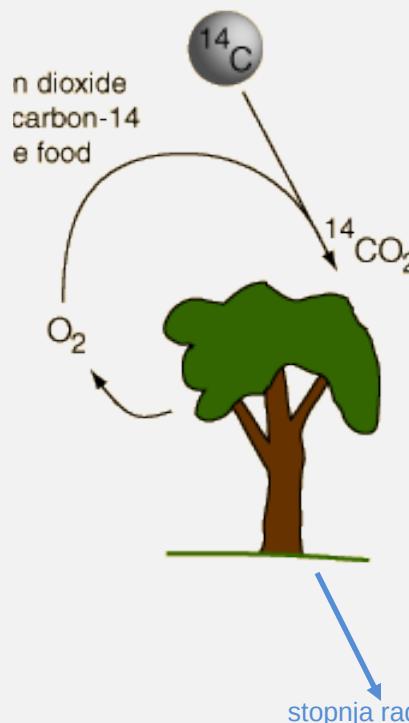
$^{14}\text{C}$



Radioactive carbon-14 is present in all living organisms.

Carbon dioxide takes it into the food cycle.  
 $\text{O}_2$

Ogljikov izotop  $^{14}\text{C}$  nastaja v višjih plasteh atmosfere, ko pod vplivom kozmičnih žar kov dva neutrona nadomestita dva protona v  $^{14}\text{N}$ . Nastali  $^{14}\text{C}$  se veže s kisikom v  $^{14}\text{CO}_2$ . Razmerje med  $^{14}\text{CO}_2$  in  $^{12}\text{CO}_2$  v atmosferi je dokaj stabilno.



Rastline absorbirajo  $\text{CO}_2$  v biosfero. Razmerje med  $^{12}\text{C}$  in  $^{14}\text{C}$  v živih bitjih je enako, kot v atmosferi.



Ko ostanki živih bitij niso več v stiku z atmosfero se razmerje med  $^{12}\text{C}$  in  $^{14}\text{C}$  zaradi radioaktivnega razpada poveča v prvega. Starost ostankov ocenimo na podlagi primerjave stopnji radioaktivnosti.

## MEŠANJE TEKOČIN

V 50-litrsko posodo z 1% -raztopino soli začne s hitrostjo 2 l/min pritekati 3%-raztopina, obenem pa dobro premešana mešanica odteka z isto hitrostjo. Čez koliko časa bo v posodi 2%-raztopina?

$y=y(t)$  količina soli v posodi v trenutku  $t$

$$dy = 0.03 \cdot 2 dt - \frac{y}{50} \cdot 2 \cdot dt$$

→ odteka  $y/50$  od 2l na enoto časa

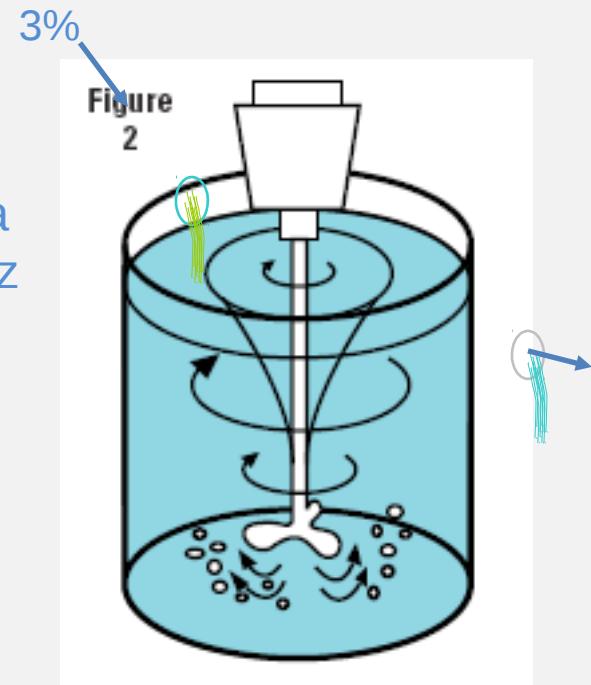
→ priteka 3% od 2l na enoto časa

→ spremembra količine soli v posodi

$$\frac{dy}{0.06 - 0.04y} = dt \Rightarrow -\ln(0.06 - 0.04y) \cdot \frac{1}{0.04} = t + c \Rightarrow y = 25(0.06 - Ce^{-0.04t})$$

$$y(0) = 0.5 \text{ l} \Rightarrow C = 0.02 \Rightarrow y(t) = 1.5 - e^{-0.04t}$$

$$1.5 - e^{-0.04t} = 1 \Rightarrow e^{-0.04t} = 0.5 \Rightarrow -25 \ln(0.5) = 17.33 \text{ min} = 17 \text{ min } 20 \text{ s}$$



## PRIMER MODELIRANJA Z DE

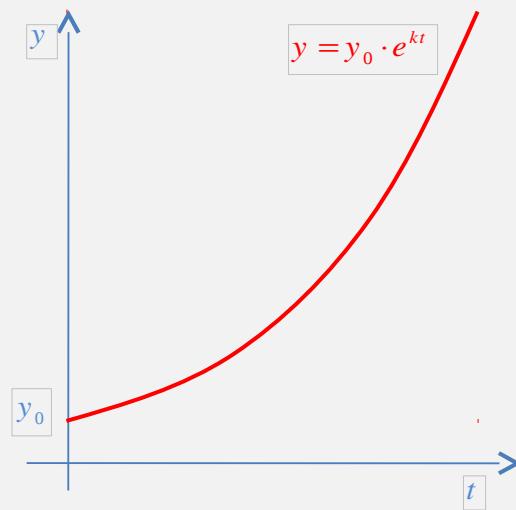
*Tripsin* je encim trebušne slinavke, ki nastane iz *tripsinogena*. V reakciji nastopa tripsin kot katalizator, zato je hitrost nastajanja tripsina sorazmerna z njegovo koncentracijo.

$y_0$  ..... začetna koncentracija tripsina

$y(t)$  ..... koncentracija tripsina v času  $t$

$y' = ky$  ..... hitrost nastajanja je sorazmerna koncentraciji

začetni problem:  $\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$   $\longrightarrow$  rešitev:  $y = y_0 e^{kt}$



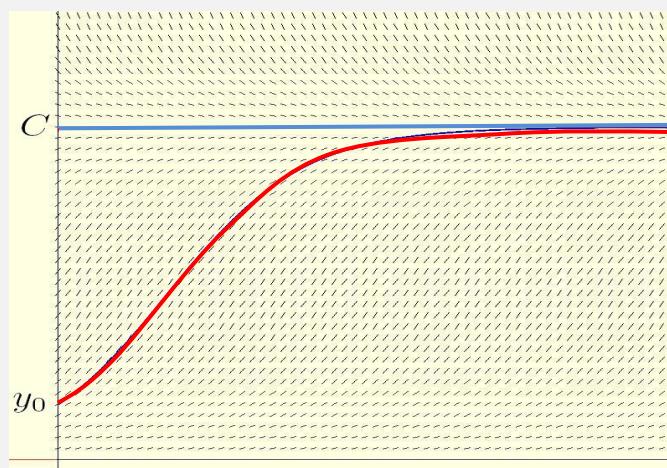
Model napoveduje eksponentno in neomejeno rast količine tripsina. To se v resnici ne more zgoditi, zato moramo poiskati ustrenejši model.

Med reakcijo se tripsinogen porablja: iz vsake molekule tripsinogena nastane ena molekula tripsina. Zato privzamemo, da je hitrost reakcije sorazmerna tako koncentraciji tripsina, kot koncentraciji tripsinogena. Če je skupna koncentracija tripsina in tripsinogena  $C$ , začetna koncentracija tripsina pa  $y_0$  dobimo začetni problem:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(C-y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

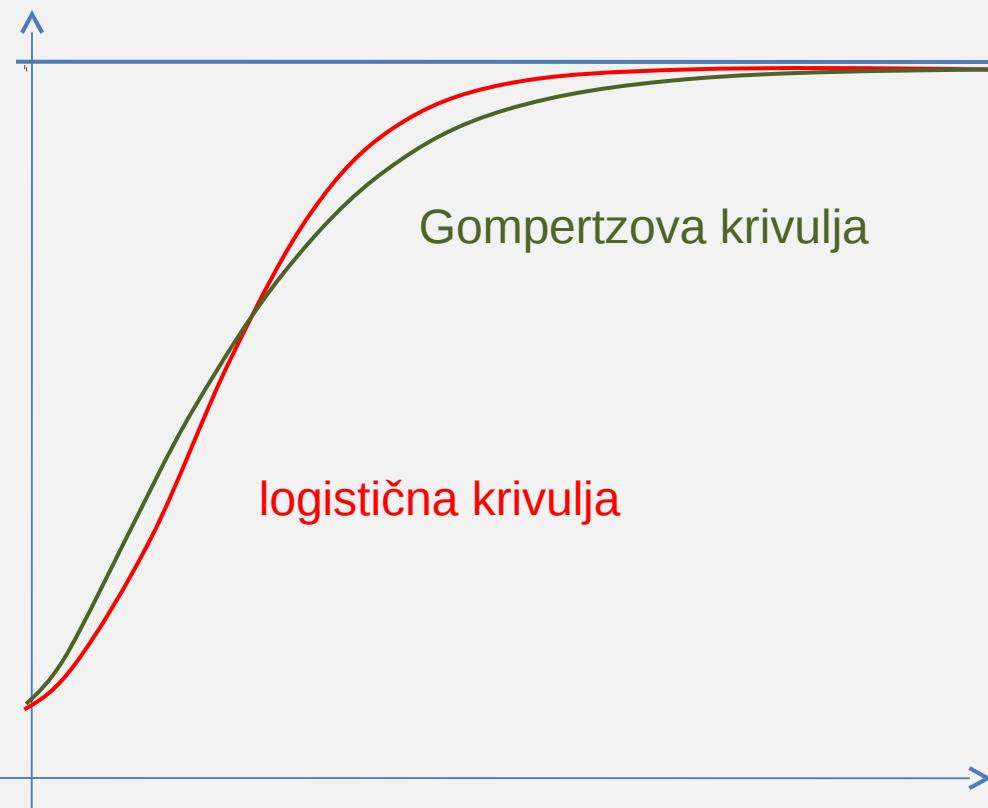
$$\frac{dy}{y(C-y)} = k dt \Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{dy}{y(C-y)} \stackrel{\text{OLE}}{=} \int_0^t k dt \Rightarrow \frac{1}{C} \left( \ln \frac{y}{C-y} \right) \Big|_{y_0}^y = kt \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \frac{C-y}{y} = \frac{C-y_0}{y_0} e^{-Ckt} \stackrel{\text{OLE}}{\Rightarrow} y(t) = \frac{C}{1 + \left( \frac{C}{y_0} - 1 \right) e^{-Ckt}}$$



**Logistična krivulja:** model predvideva, da bo koncentracija tripsina zrasla do prvotne koncentracije tripsinogena, potem pa se bo ustalila.

Logistična krivulja je dober model za omejeno rast, vendar ni vedno povsem ustrezena. Npr. pri tumorjih število rakastih celic najprej narašča eksponencialno, potem pa se rast umiri in sčasoma ustavi. S poskusi so ugotovili, da krivulja naraščanja ni logistična temveč t.i.m. Gompertzova krivulja (ena od vidnih razlik je, da pri njej prevoj nastopi precej prej kot pri logistični).



Gompertzova funkcija

$$y(t) = y_0 e^{k(1-e^{-at})}$$

Eksperimentalno ugotovljeno zakonitost poskusimo razložiti tako, da pogledamo, kateri diferencialni enačbi ustreza Gompertzova funkcija.

$$\left( y_0 e^{k(1-e^{-at})} \right)' = y_0 e^{k(1-e^{-at})} \cdot \underbrace{ak}_{\alpha} \cdot e^{-at} = \alpha \cdot e^{-at} \cdot y(t)$$

Diferencialna enačba  $y' = \alpha \cdot e^{-at} \cdot y$  pomeni, da število rakastih celic narašča sorazmerno z velikostjo tumorja, vendar se sorazmernostni faktor spreminja s časom. Vzroke za spremembo razlagajo različno:

$$y' = (\alpha \cdot e^{-at}) \cdot y$$

s staranjem se reproduktivna moč celic zmanjšuje

$$y' = \alpha \cdot (e^{-at} \cdot y)$$

reproduktivni faktor se ne spreminja, vendar je naraščanje sorazmerno le z delom števila celic v tumorju, ker se v notranjosti tumorja ustvari nekrotično območje