Matematika s statistiko
Verjetnost

Osnove verjetnosti

(1) V posodi imamo 5 rdečih, 4 bele in 3 modre kroglice. Na slepo izvlečemo dve kroglici.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bosta obe beli?

(b) Kolikšna je verjetnost, da bosta različnih barv?

Rešitev: Pri verjetnosti poskušamo s pomočjo matematičnih modelov opisati verjetnost, da se pri danem poskusu zgodi nek dogodek. Če je pri poskusu možnih končno mnogo enako verjetnih izidov, potem je klasična definicija verjetnosti dogodka A enaka

$$P(A) = \frac{\text{število izidov v dogodku } A}{\text{število vseh izidov}}.$$

Pri našem poskusu izmed 12 kroglic izvlečemo 2 kroglici, zato je vseh število vseh možnih izidov enako $\binom{12}{2} = 66$.

(a) Število parov, pri katerih sta obe kroglici beli, je $\binom{4}{2} = 6$, zato je

$$P(\text{obe kroglici sta beli}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

(b) Če sta obe kroglici različnih barv, sta v paru bodisi rdeča in bela, rdeča in modra, ali pa bela in modra kroglica. Število vseh takšnih parov je enako $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 47$. Sledi

$$P(\text{obe kroglici sta različnih barv}) = \frac{47}{66}.$$

$\square$

(2) Na voljo imaš naslednji igri na srečo:

(a) $4\times$ zapored vržeš kocko. Zmagaš, če pade vsaj ena šestica.

(b) $24\times$ zapored vržeš par kock. Zmagaš, če vsaj enkrat padeta dve šestici.

Katero izmed teh dveh iger se ti bolj splača igrati?

Rešitev: (a) Naj bo dogodek

$A \ldots$ v štirih metih pade vsaj ena šestica.

To pomeni, da padejo ena, dve, tri ali pa štiri šestice. Da bi izračunali, na koliko načinov se to lahko zgodi, bi potrebovali kar nekaj časa. Precej hitreje pa lahko izračunamo, na koliko načinov se zgodi dogodek $\overline{A}$. To pomeni, da nikoli ne pade šestica, takšnih možnosti pa je 5^4. Ker je vseh možnosti 6^4, je $P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ in

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177.$$

(b) Naj bo sedaj dogodek

$B \ldots$ v 24 metih padeta vsaj enkrat dve šestici.

Podobno kot prej dobimo $P(\overline{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ in

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914.$$

Vidimo, da se nam bolj splača igrati prvo igro. $\square$

(3) Izračunaj verjetnosti:

(a) da v dveh metih kocke padeta dve šestici oziroma da pade ena šestica,
(b) da v treh metih kocke pade nič, ena, dve ali tri šestice,
(c) da v treh metih kocke pade največ ena šestica.

Rešitev: (a) Označimo:

$A \ldots$ v dveh metih padeta dve šestici,
$B \ldots$ v dveh metih pade ena šestica.

Vseh možnih izidov pri metu dveh kock je 36. Od tega se samo enkrat zgodi, da padeta dve šestici, zato je

$$P(A) = \frac{1}{36}.$$

Ena šestica pade v desetih izidih, zato je

$$P(B) = \frac{10}{36}.$$

(b) Označimo sedaj z X število šestic v treh metih kocke. Možne vrednosti X so potem 0, 1, 2 ali 3. Vsako izmed teh vrednosti bi lahko izračunali podobno kot prej, namesto tega pa bomo raje uporabili Bernoullijevo formulo.

Denimo, da imamo zaporedje n neodvisnih poskusov. V vsakem izmed poskusov se zgodi dogodek A z verjetnostjo $P(A) = p$. Če nam slučajna spremenljivka X pove, kolikokrat se je v n poskusih zgodil dogodek A, je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

V našem primeru je $n = 3$, dogodek A pa pomeni, da je padla šestica. Torej je $p = \frac{1}{6}$. Sledi

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} = 0.579,$$
$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} = 0.347,$$
$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} = 0.069,$$
$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} = 0.005.$$

(c) V treh metih kocke pade največ ena šestica, če pade ena ali pa nobena šestica. Sledi

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{200}{216} = 0.926.$$

$\square$

(4) Trikrat zapored vržemo kovanec. Izračunaj pogojni verjetnosti:

(a) da pade v tretjem metu grb, če vemo, da sta v prvih dveh metih padla grba,

(b) da pade v tretjem metu grb, če vemo, da je padel natanko en grb.

Rešitev: Vseh možnih elementarnih izidov je v tem primeru 8, in sicer

$$CCC,\ CCG,\ CGC,\ CGG,\ GCC,\ GCG,\ GGC,\ GGG.$$

(a) Definirajmo dogodka:

$A\ldots$ na tretjem kovancu je grb,
$B\ldots$ v prvih dveh metih padeta dva grba.

Pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B je potem definirana s predpisom

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Pove nam, kakšna je verjetnost, da se zgodi dogodek A, če vemo, da se je zgodil dogodek B. Za dogodek AB je ugoden izid GGG, za dogodek B pa izida GGC in GGG. Od tod sledi

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Brezpogojna verjetnost dogodka A je enaka $P(A) = \frac{1}{2}$, kar pomeni, da je $P(A) = P(A|B)$. To pomeni, da sta dogodka A in B neodvisna, čeprav se nam pogosto zdi, da se verjetnost, da bo padel grb zmanjša, če je pred tem že nekajkrat zapored padel grb. Ker je vsak met neodvisen od drugih, je vsakič verjetnost natanko ena polovica.

(b) Naj bo sedaj:

$A\ldots$ na tretjem kovancu je grb,
$B\ldots$ pade natanko en grb.

Potem je $P(AB) = \frac{1}{8}$ in $P(B) = \frac{3}{8}$. Sledi

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}.$$

V tem primeru $P(A) \neq P(A|B)$, kar pomeni, da sta dogodka A in B odvisna. Če namreč vemo, da je padel natanko en grb, potem bo z verjetnostjo ena tretjina padel v prvem, drugem ali pa v tretjem metu. $\square$

(5) V prvi posodi imamo 6 belih in 4 črne kroglice, v drugi pa 3 bele in 6 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo eno kroglico in jo prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo eno kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica bela?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je bila kroglica, ki smo jo prenesli iz prve v drugo posodo bela, če smo izvlekli belo kroglico?

Rešitev: (a) Pri tej nalogi imamo primer dvofaznega poskusa:

· V prvi fazi nastopi natanko ena izmed hipotez H_1, H_2,. . .,H_n,
· Izid poskusa v drugi fazi je odvisen od izida v prvi fazi.

Verjetnost dogodka A v drugi fazi potem izračunamo z obrazcem za popolno verjetnost

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n).$$

V prvi fazi iz prve posode v drugo posodo prenesemo eno kroglico. Za hipotezi bomo vzeli

H_1 . . . iz prve posode izvlečemo belo kroglico,
H_2 . . . iz prve posode izvlečemo črno kroglico.

Verjetnosti, da se zgodita H_1 oziroma H_2 sta $P(H_1) = \frac{6}{10}$ in $P(H_2) = \frac{4}{10}$. Naj bo sedaj še

A . . . iz druge posode izvlečemo belo kroglico.

Če smo iz prve posode v drugo prenesli belo kroglico, bodo v drugi posodi 4 bele in 6 črnih kroglic. Verjetnost, da iz druge posode izvlečemo belo kroglico, je v tem primeru enaka $P(A|H_1) = \frac{4}{10}$. Če pa smo iz prve posode v drugo prenesli črno kroglico, bodo v drugi posodi 3 bele in 7 črnih kroglic. Tedaj je $P(A|H_2) = \frac{3}{10}$. Z obrazcem za popolno verjetnost tako dobimo

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100}.$$

(b) Denimo sedaj, da smo iz druge posode izvlekli belo kroglico. Zanima nas, kakšna je potem verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico, oziroma $P(H_1|A)$. Pomagali si bomo z Bayesovim obrazcem

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Le-ta nam pove, kolikšna je verjetnost, da velja hipoteza H_i, če vemo, da se je zgodil dogodek A. V našem primeru je

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{36}{100}} = \frac{2}{3}.$$

Rezultat lahko interpretiramo takole. Če smo iz druge posode izvlekli belo kroglico, je dvakrat bolj verjetno, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico, kot pa črno. □