MATEMATIKA S STATISTIKO

UNIVERZITETNA ŠTUDIJSKA PROGRAMA
LABORATORIJSKA BIOMEDICINA IN KOZMETOLOGIJA
1. LETNIK

ŠTEVILA IN FUNKCIJE

1. Računanje s približki, realna števila
2. Funkcije – podajanje, značilnosti, elemenarne funkcije
3. Limite, računanje limit, asimptote
4. Zvezne funkcije

PRIBLIŽNO RAČUNANJE

Ta fosil dinozavra je star 70 000 006 let, pravi paznik v muzeju.

???

Ko sem se zaposlil pred šestimi leti so mi rekli, da je star 70 milijonov let...

Vse količine, ki jih dobimo z merjenjem so približne, zato njihov zapis mora vsebovati tudi informacijo o natančnosti.

Proton je 1836.12-krat težji od elektrona.

$$\underbrace{1836.\overbrace{12}^{\text{decimalna mesta}}}_{\text{značilna mesta}}$$

Število decimalnih mest je odvisno od zapisa:

1836.12=1.83612x103=183612x10-2

število značilnih mest pa je vedno enako.

Pomemben dogovor:

v zapisu obdržimo le značilna mesta, npr. če Avogadrovo število zapišemo kot $N0=6.0x1023$ pomeni, da je tudi zadnja ničla značilna (tj. pravilna).

Vsaka količina je rezultat zaokrožanja. Pri tem števke 0,1,2,3,4 zaokrožamo navzdol, 5,6,7,8,9 pa navzgor.

1.08462 = 1.085 zaokroženo na tri decimalke

= 1.08 zaokroženo na dve decimalki

Pozor: 1.085, zaokroženo na dve decimalki je 1.09!

Zato $N0=6.0230x1023$ pomeni

$6.02295x1023 \leq N0 < 6.02305x1023$, oziroma $(6.0230 \pm 0.00005)x1023$,

medtem ko $N0=6.023x1023$ pomeni

$6.0225x1023 \leq N0 < 6.0235x1023$ oziroma $(6.023 \pm 0.0005)x1023$

RAČUNSKA PRAVILA

(1.2846+21.72) / 13.14=**?**

kalkulator: 1.750730594

Katere decimalke je smiselno obdržati?

praktična pravila:

- natančnost rezultata ne more biti večja od natančnosti podatkov
- pri seštevanju in odštevanju naj bo število <u>decimalnih</u> mest rezultata enako najmanjšemu številu decimalnih mest faktorjev

  (npr. 1.2846+21.72=23.00 in ne 23.0046)
- pri množenju in deljenju naj bo število <u>značilnih</u> mest rezultata enako najmanjšemu številu značilnih mest faktorjev

  (npr. 23.0046/13.14=1.751 in ne 1.75 ali 1.750730594)

S titracijo smo 25 cm^3 raztopine NaOH nevtralizirali z 12.21 cm^3 raztopine HCl. Izračunaj koncentracijo NaOH, če je koncentracija HCl 0.0942 mol/dm^3.

$$c = (12.21 \times 0.0942)/25.00 = 0.04600728$$

$(12.215 \times 0.09425)/24.995 = 0.046059761$

$(12.205 \times 0.09415)/25.005 = 0.045954839$

Upoštevamo tri značilna mesta $\Rightarrow$ $\underline{c = 0.0460 \text{ mol/dm}^3}$

Koliko železa nastane, če se pri redukcijski reakciji

$$Fe_2O_3 + 3\,CO \rightarrow 2\,Fe + 3\,CO_2$$

porabi 503 g ogljikovega monoksida? (Fe 55.85 g/mol, CO 28.01 g/mol)

$$m = 503/28.01 \times 2/3 \times 55.85 = 668.634412$$

Števila molekul, ki nastopajo v reakciji (2 Fe, 3 CO) so cela, tj. točna, zato štejemo, da je število značilnih decimalk neskončno.

$$\underline{m = 669 \text{ g}}$$

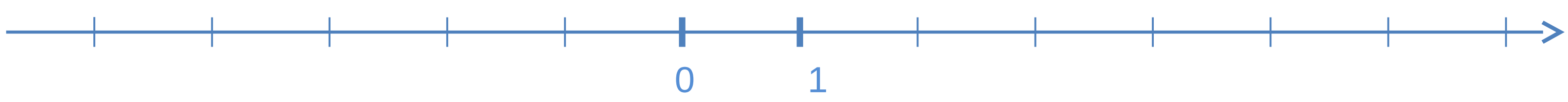
REALNA ŠTEVILA

Realna števila so vsa (končna in neskončna) decimalna števila.

Realna števila so teoretični konstrukt, ki nam omogoča, da točno izrazimo vse količine.
V splošnem ni mogoče podati neskončnega zaporedja decimalk, zato v praksi zapis in računanje z realnimi števili slonita na približkih in zaokroževanju.

Nekatera realna števila (npr. koreni, števili π in e ...) so podana implicitno in z njimi lahko včasih računamo točno, brez zaokroževanja (npr. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, vendar pa $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nima nobenega preprostejšega zapisa).

Če na premici izberemo enotsko dolžino, lahko množico točk premice enačimo z množico realnih števil $\mathbb{R}$. Tako dobimo številsko premico.



(pravimo tudi, da smo na premici vpeljali koordinate)

PODAJANJE FUNKCIJ

$f\colon A \to B \qquad f\colon x \mapsto f(x)$

$x \in A$ je argument, $f(x) \in B$ je funkcijska vrednost.

Funkcija je pravilo, ki vsakemu argumentu priredi eno funkcijsko vrednost.

Glavna operacija na funkcijah je sestavljanje.

Funkciji f in g lahko sestavimo, če so vrednosti f vsebovane med argumenti g.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

TABELIRANE FUNKCIJE

Premier League	Final
Chelsea	95
Arsenal	83
Manchester United	77
Everton	61
Liverpool	58
Bolton Wanderers	58
Middlesbrough	55
Manchester City	52
Tottenham Hotspur	52
Aston Villa	47
Charlton Athletic	46
Birmingham City	45
Fulham	44
Newcastle United	44
Blackburn Rovers	42
Portsmouth	39
West Bromwich Albion	34
Crystal Palace	33
Norwich City	33
Southampton	32

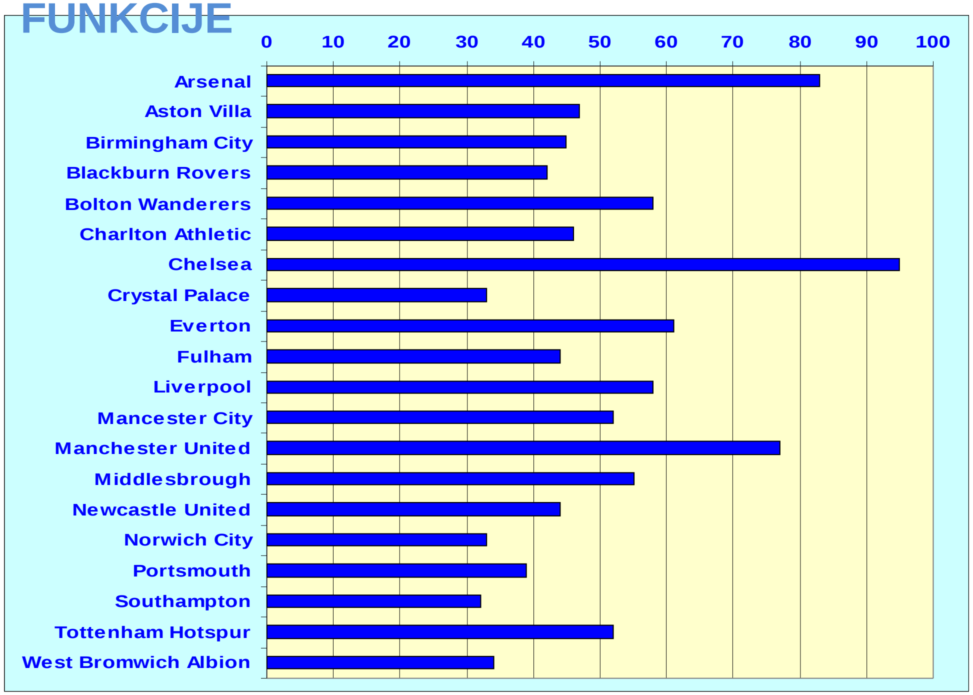
Angleška 1. liga 2005-2006

Temp. (oC)	Kisik (mg/L)	Temp. (oC)	Kisik (mg/L)
0	14,16	18	9,18
1	13,77	19	9,01
2	13,40	20	8,84
3	13,05	21	8,68
4	12,70	22	8,53
5	12,37	23	8,38
6	12,06	24	8,25
7	11,76	25	8,11
8	11,47	26	7,99
9	11,19	27	7,86
10	10,92	28	7,75
11	10,67	29	7,64
12	10,43	30	7,53
13	10,20	31	7,42
14	9,98	32	7,32
15	9,76	33	7,22
16	9,56	34	7,13
17	9,37	35	7,04

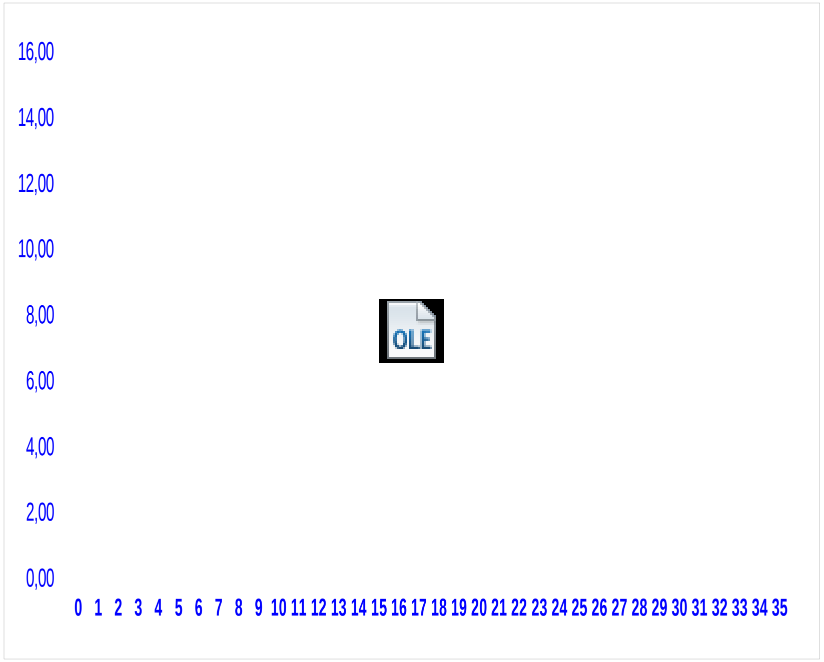
Topnost kisika v vodi pri tlaku 760 mmHg

Logaritemske tablice Jurija Vege

GRAFIČNA PREDSTAVITEV FUNKCIJE



Grafična predstavitev je smiselna, če nam nekaj pove o zvezi med argumenti in funkcijskimi vrednostmi.



FUNKCIJE PODANE S FORMULO

$f(x)=3x-5$	linearna funkcija (enačba premice)
$s=\frac{gt^2}{2}$	pot pri prostem padcu
$d(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$	razdalja točke do izhodišča
$z=2x+y-3$	linearna funkcija (enačba ravnine)
$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$	Herenova formula
$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$	povprečna vrednost

Formula je lahko odvisna od ene, dveh ali več spremenljivk.

Definicijsko območje formule tvorijo tisti nabori spremenljivk, za katere lahko izračunamo formulo.

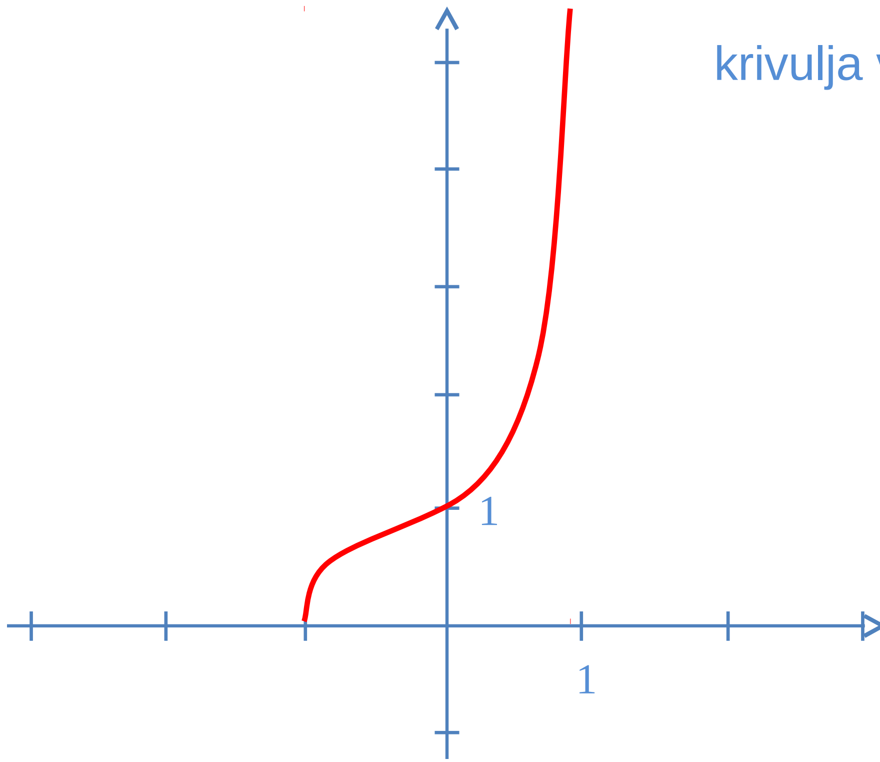
GRAF

$f : A \to \mathbb{R}$, $\quad A \subseteq \mathbb{R}$

Graf f je množica točk v ravnini, ki so oblike $(x, f(x))$ za $x \in A$.

krivulja v ravnini

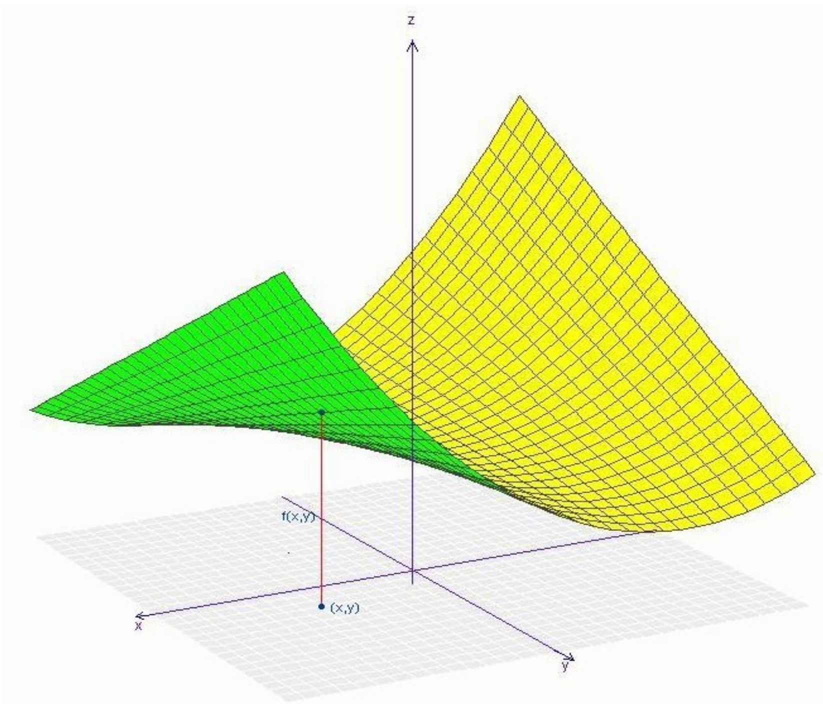
$$l(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$



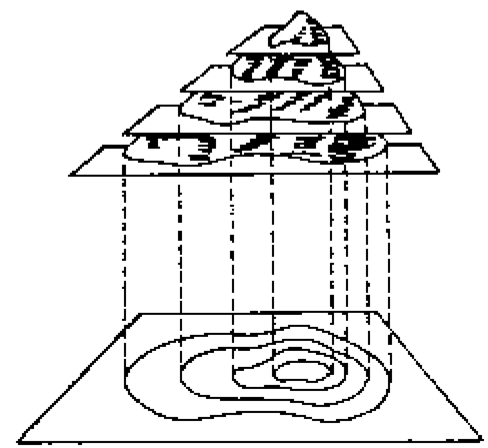
$f : A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$

Graf f je množica točk v prostoru, ki so oblike $(x, y, f(x,y))$ za $(x,y) \in A$.

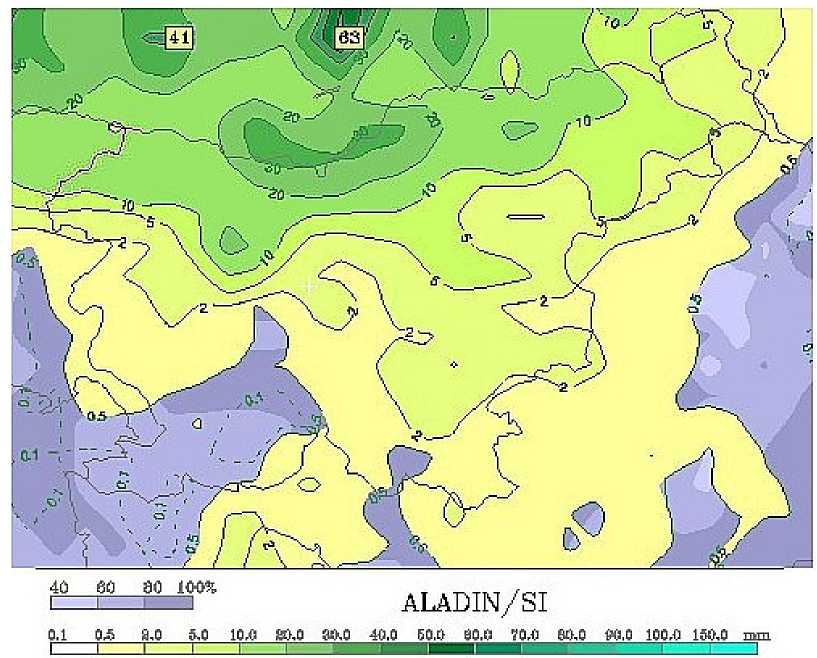
$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$



ploskev v prostoru



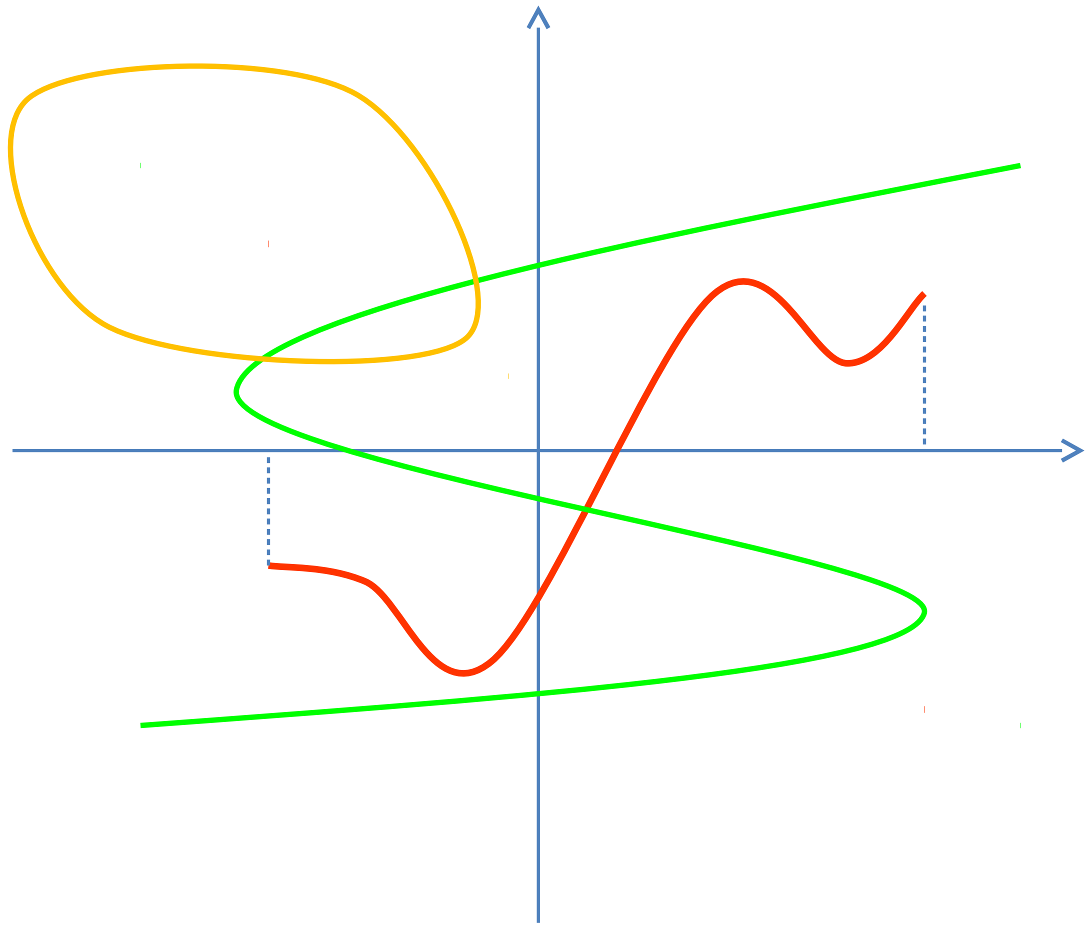
alternativni prikazi



Funkcije podane z grafom

Funkcija $f: A \to B$ je predpis, ki vsakemu argumentu priredi eno funkcijsko vrednost.

Krivulja v ravnini je graf neke funkcije če jo vsaka navpična premica seka največ enkrat.



OBRATNE FUNKCIJE

$f : A \to B$

Praslika $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ (množica rešitev enačbe $f(a)=b$)

Predpis $b \quad f^{-1}(b)$ določa funkcijo, če imajo množice $f^{-1}(b)$ natanko en element za vse $b \in B$.

Tedaj je f **bijektivna,** predpis

$$f^{-1} : B \to A, \quad b \quad f^{-1}(b)$$

pa je **obratna** (inverzna) funkcija za f.

f je **surjektivna**, če imajo $f^{-1}(b)$ vsaj en element.

f je **injektivna**, če imajo $f^{-1}(b)$ največ en element.

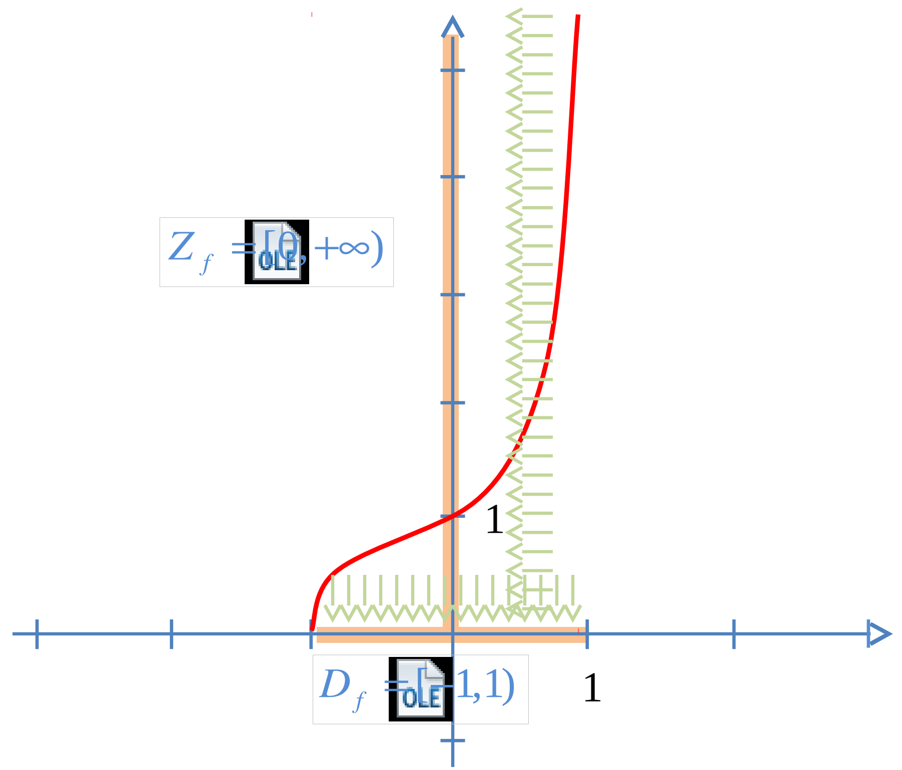
Kadar funkcija ni bijektivna, lahko včasih zožimo njeno domeno ali kodomeno in tako dobimo sorodno funkcijo, ki je bijektivna.

ZNAČILNOSTI FUNKCIJE, KI SO RAZVIDNE IZ GRAFA

1. Definicijsko območje, zaloga vrednosti
2. Naraščanje in padanje, ekstremi
3. Ukrivljenost
4. Trend na robu definicijskega območja
5. Periodičnost in simetrije

Definicijsko območje in zaloga vrednosti

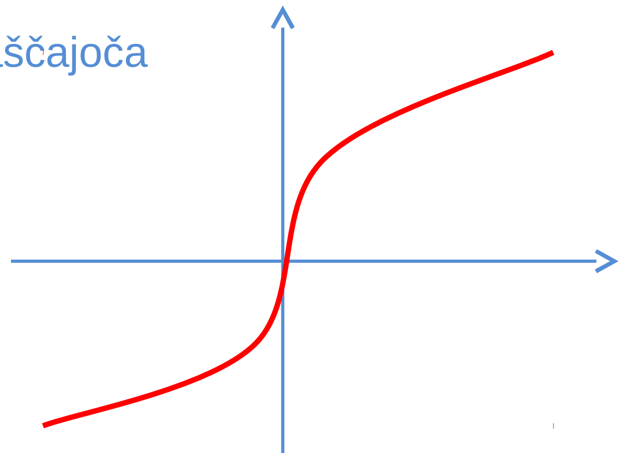
$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$



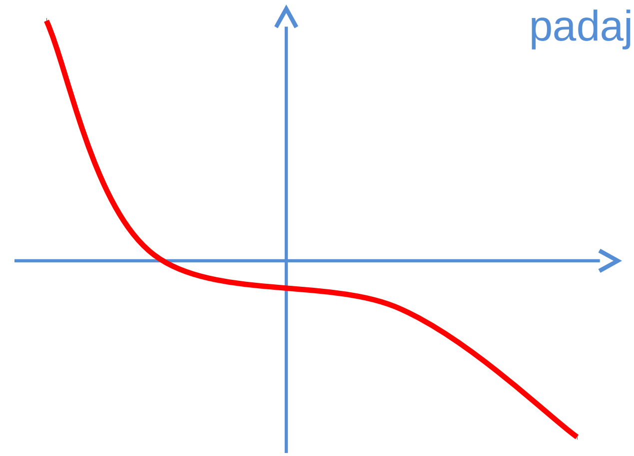
Definicijsko območje Df je ‘senca’ (tj. slika projekcije) grafa na osi x, zaloga vrednosti Zf pa je senca na osi y.

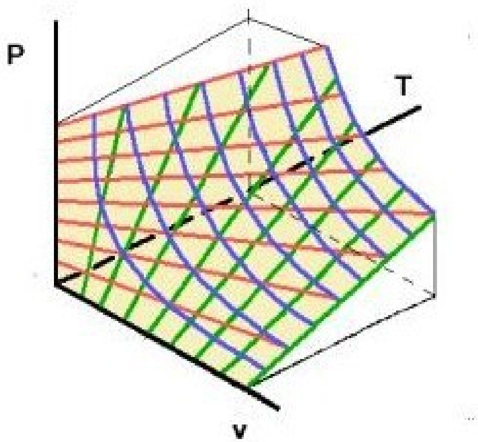
Naraščanje in padanje funkcije

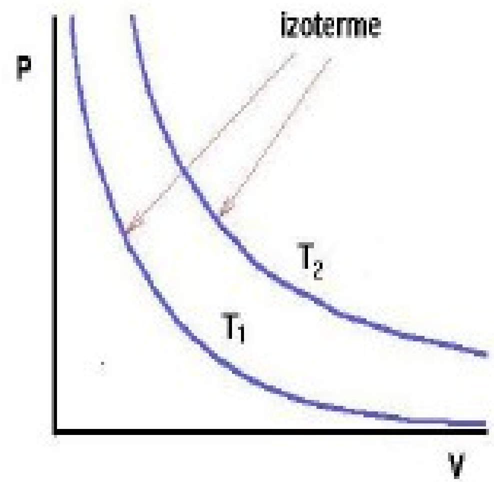
naraščajoča



padajoča



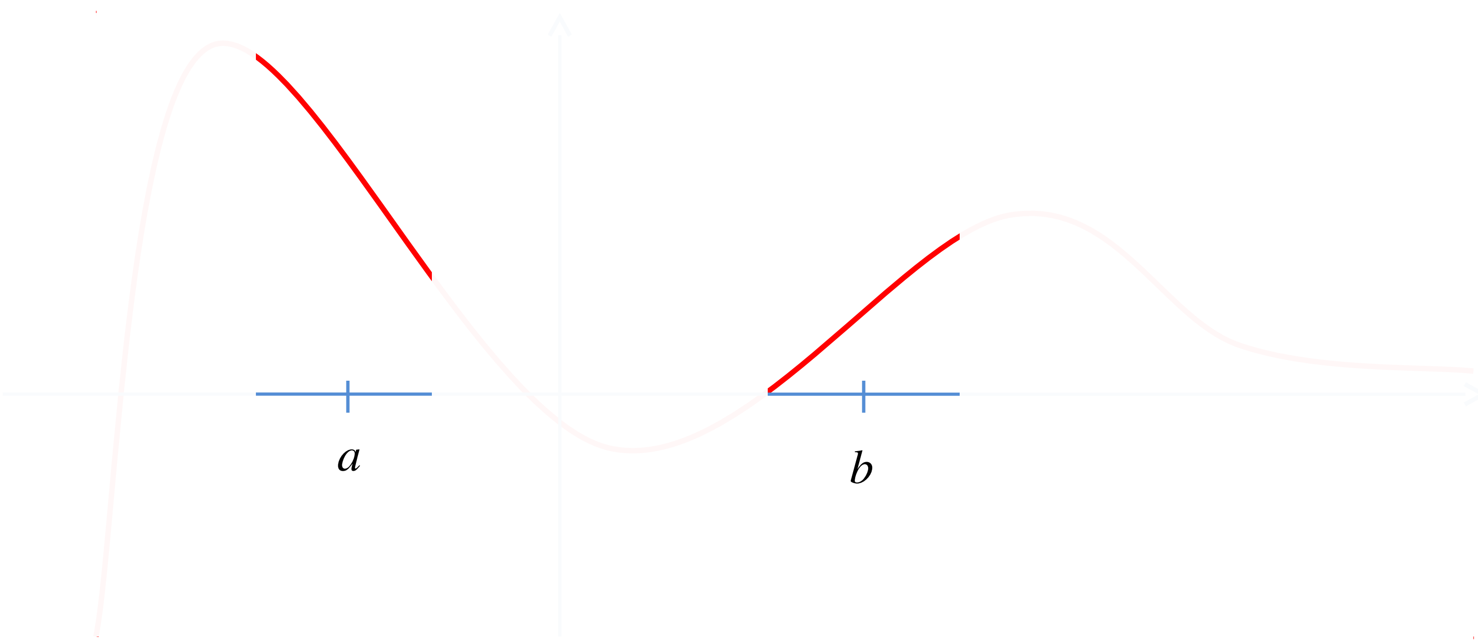




Pri stalni temperaturi je tlak padajoča funkcija prostornine.

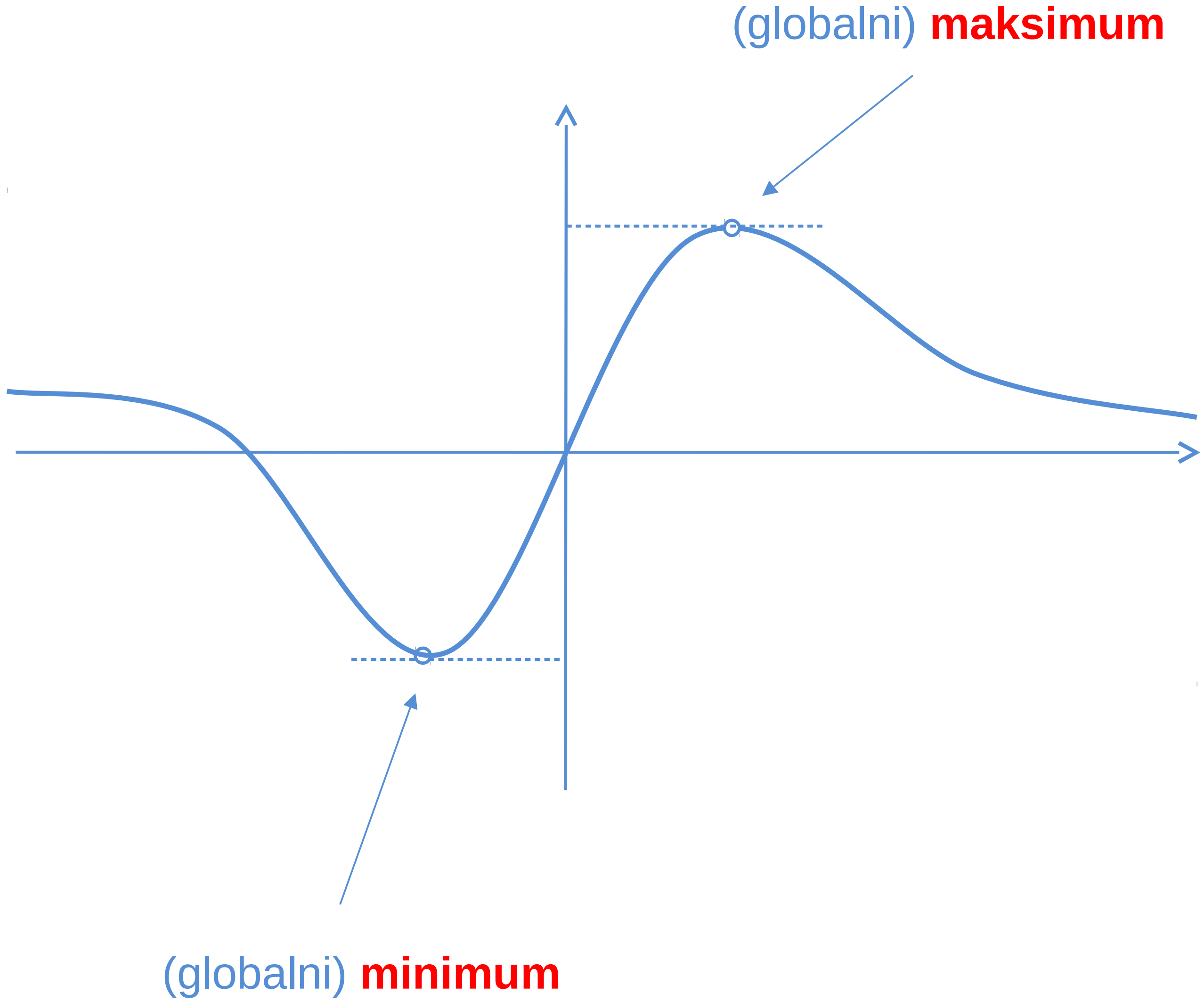
Lokalno naraščanje in padanje funkcije

pri a je funkcija padajoča

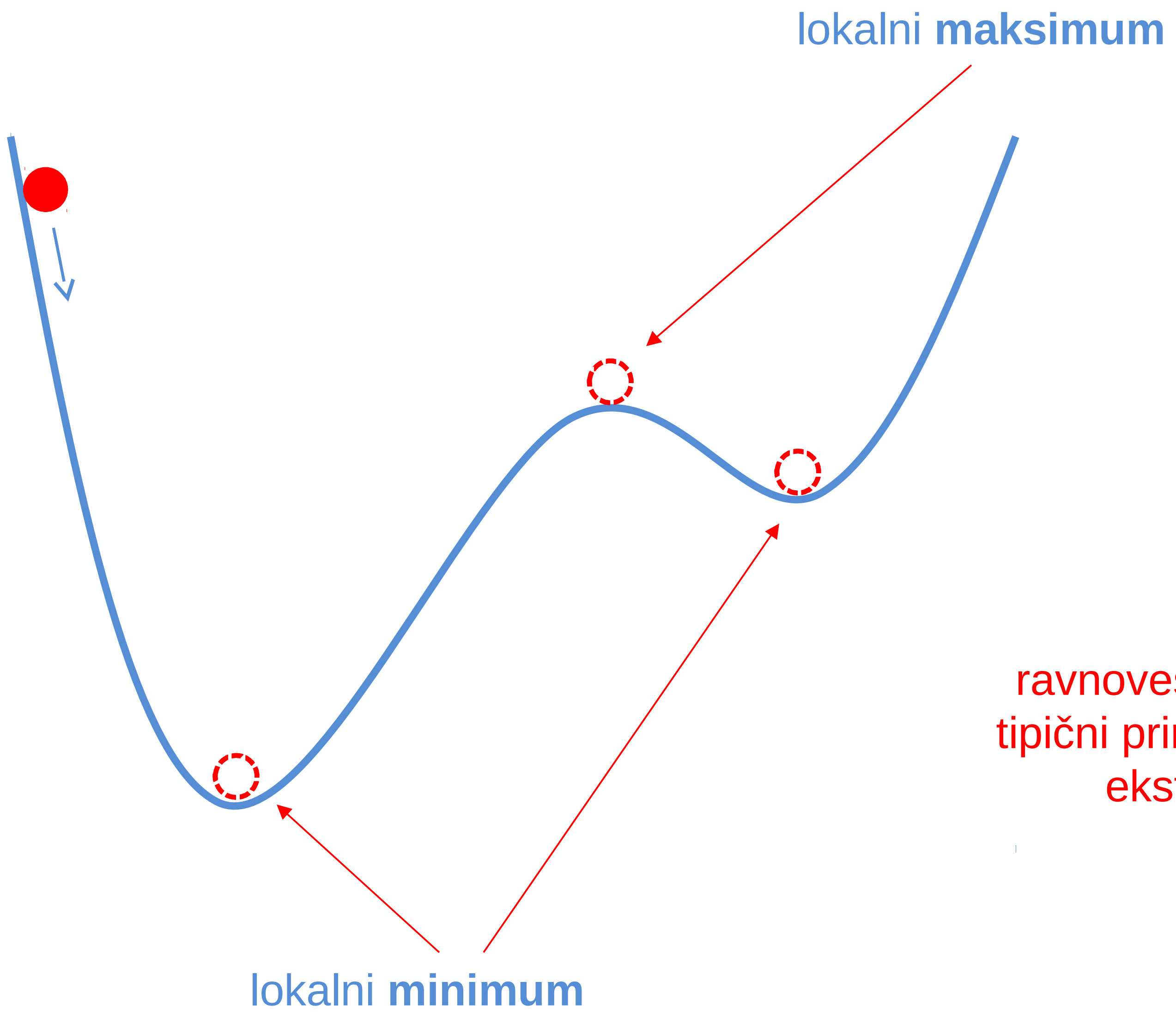


pri b je funkcija naraščajoča

Globalni ekstremi



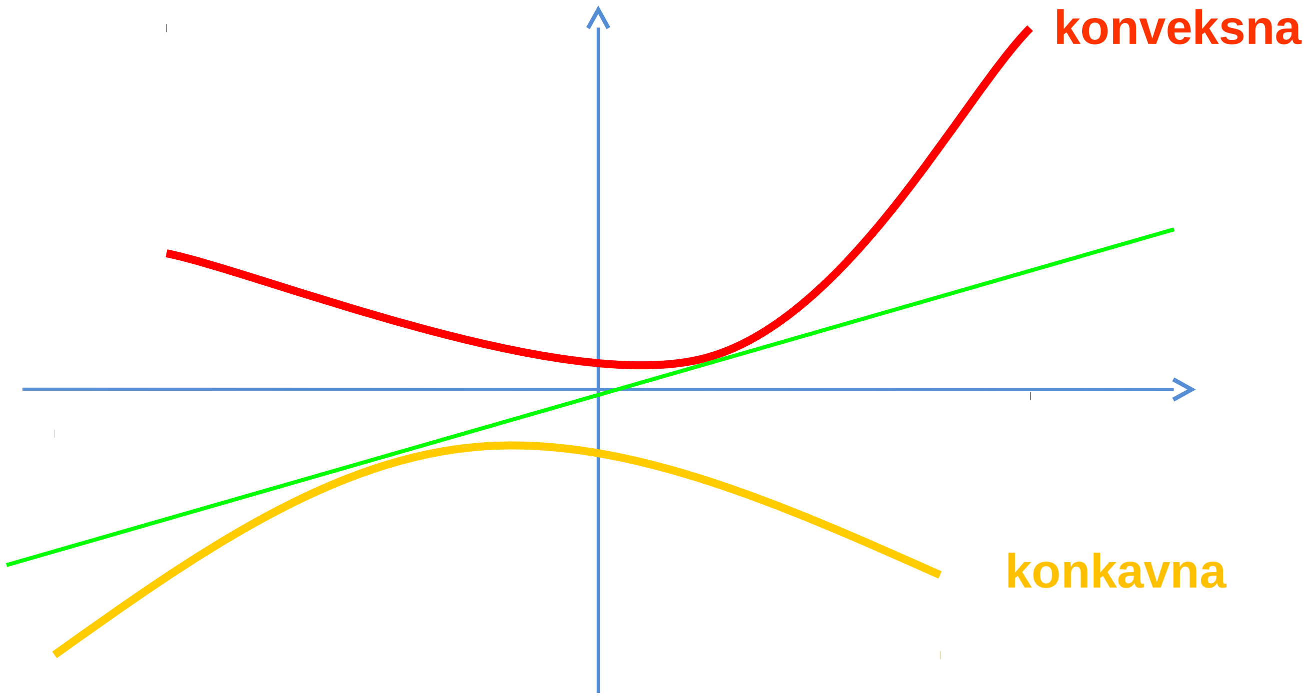
Lokalni ekstremi



ravnovesne lege so tipični primeri lokalnih ekstremov

Konveksnost in konkavnost

Funkcija je **konveksna,** če se njen graf krivi navzgor
in **konkavna**, če se graf krivi navzdol.

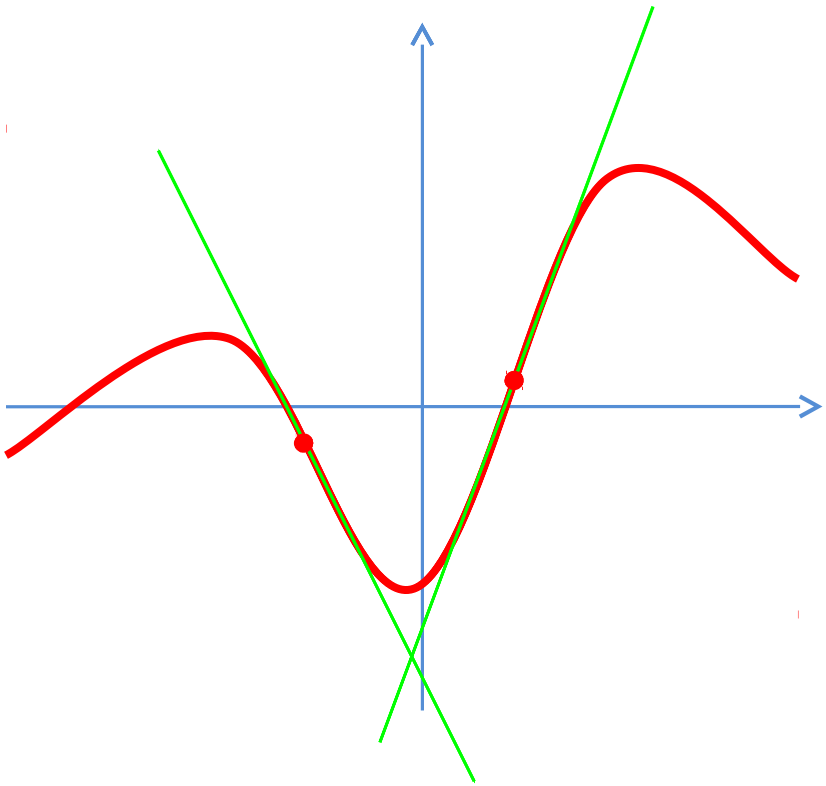


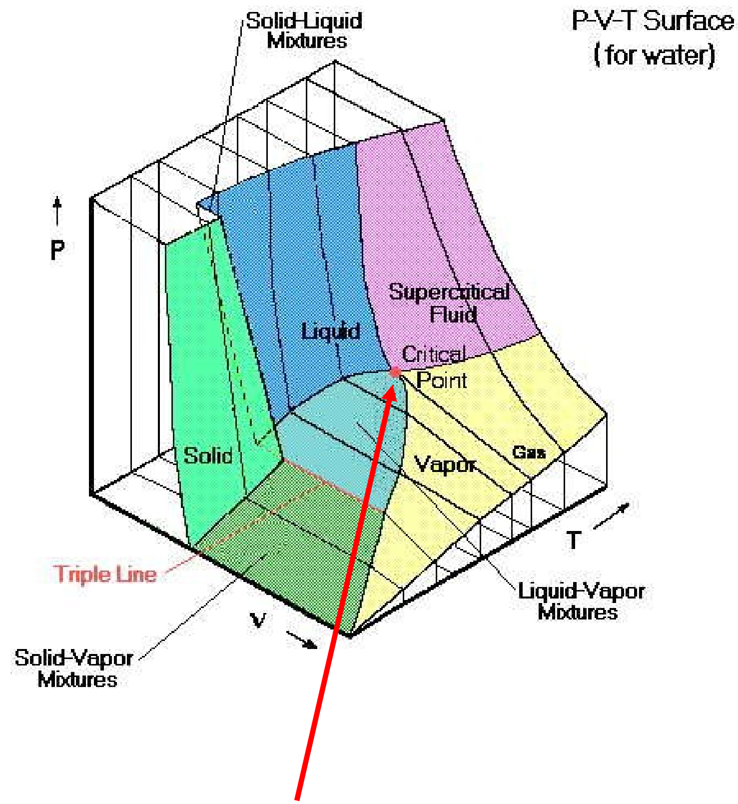
konveksnost grafa ponazarja pospeševanje procesa

konkavnost grafa ponazarja pojemanje procesa

Prevoji

Prevoji so točke, pri katerih funkcija preide iz konveksne v konkavno, ali obratno.



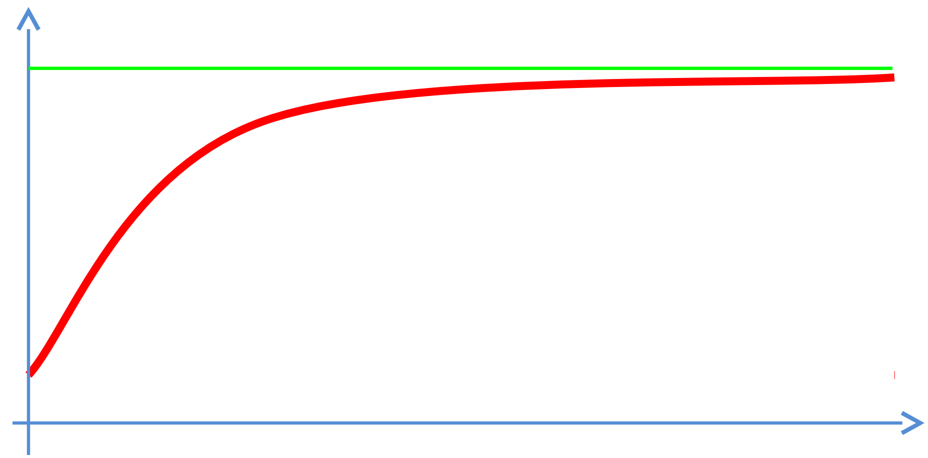


Prevoj je točka, pri kateri proces preide iz pospeševanja v zaviranje ali obratno.

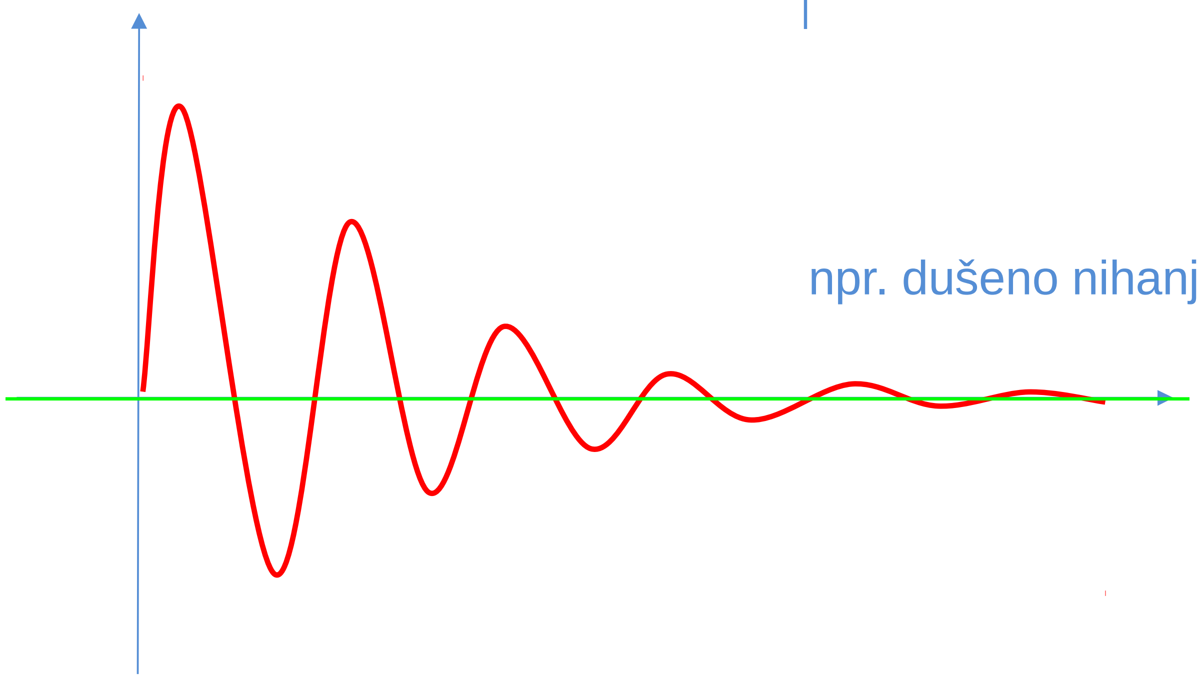
Kritična točka snovi je prevoj na kritični izotermi.

Asimptote

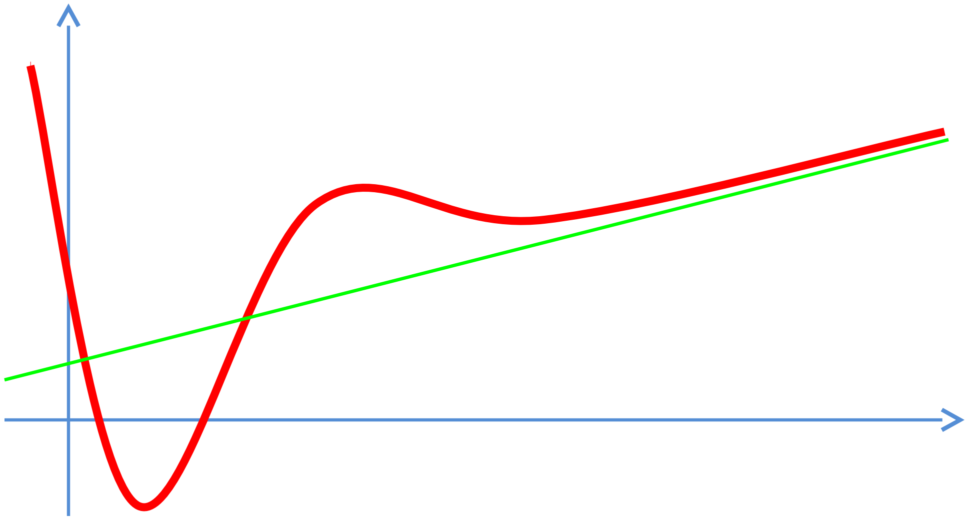
Vodoravna asimptota



npr. temperatura posode, ki se segreje le do temperature vira

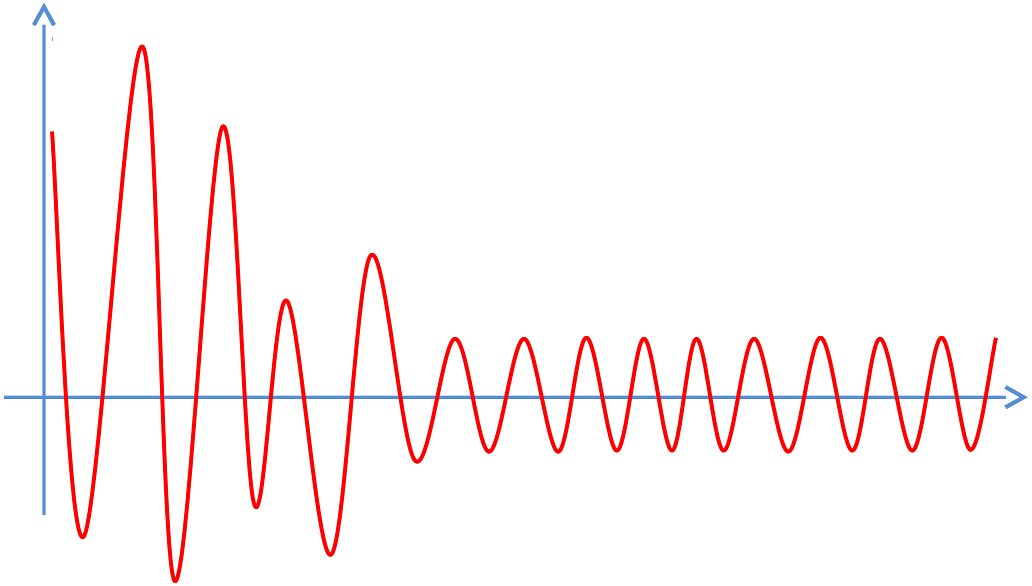


npr. dušeno nihanje

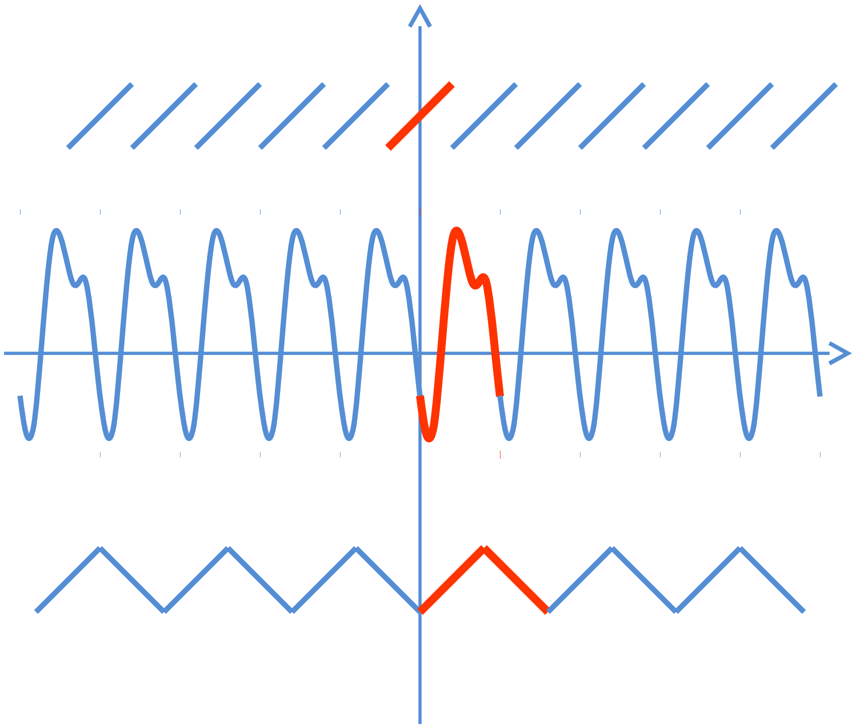


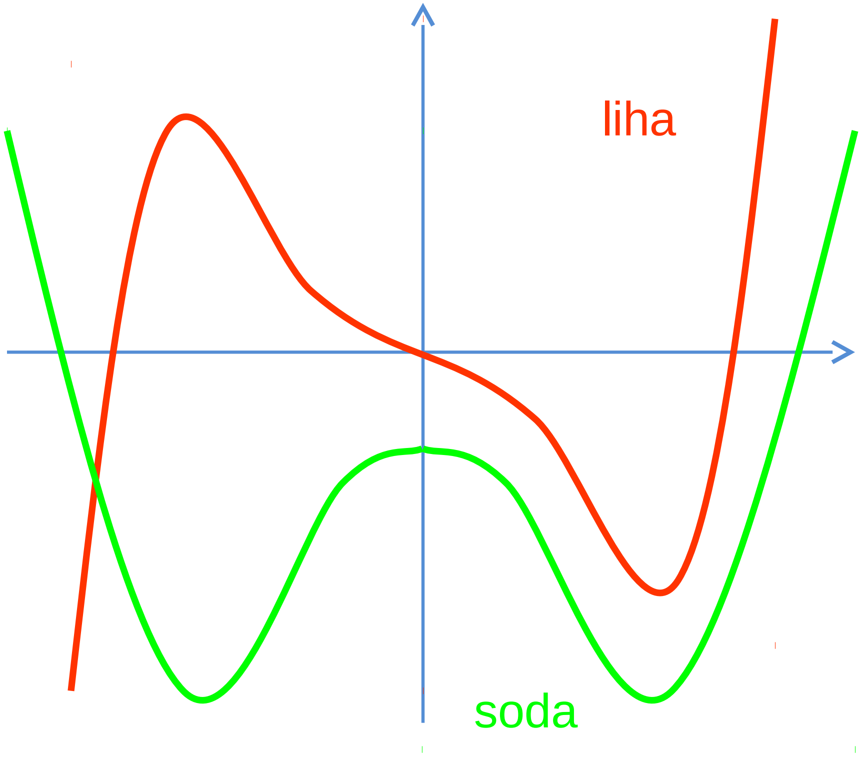
Linearna asimptota

Vsiljeno nihanje, asimptota je sinusoida



Periodičnost in simetrija





ELEMENTARNE FUNKCIJE

Polinomi

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 1$$

Racionalne funkcije

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 5}{x^3 + x + 1}$$

Algebrajske funkcije

$$A(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x + \sqrt[5]{x^2 + \sqrt{x}}}$$

Eksponentne

in

logaritmske funkcije

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{-x}$$

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Kotne

in

ločne funkcije

$$u(x) = \sin(2x - 1) - 3\cos(x + \tfrac{\pi}{2})$$

$$v(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-x}$$

$$w(x) = \operatorname{arctg}(1 + x^2)$$

Elementarne funkcije dobimo s pomočjo računskih operacij in sestavljanja iz osnovnih funkcij.

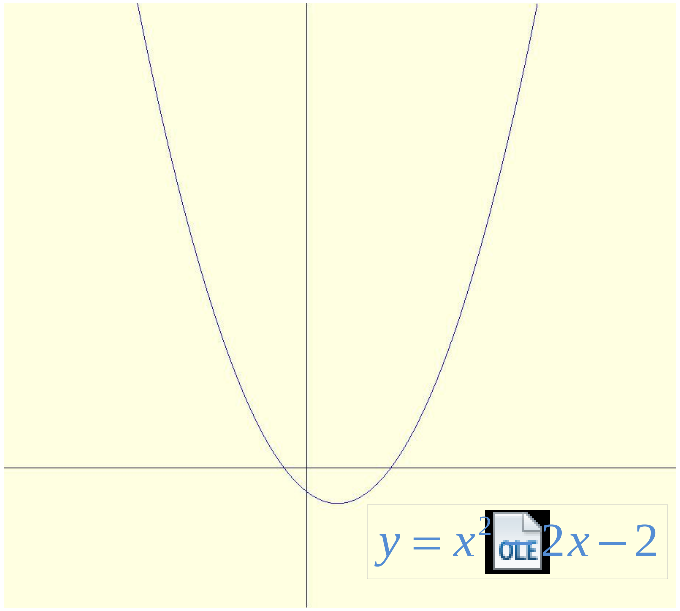
Osnovne funkcije:

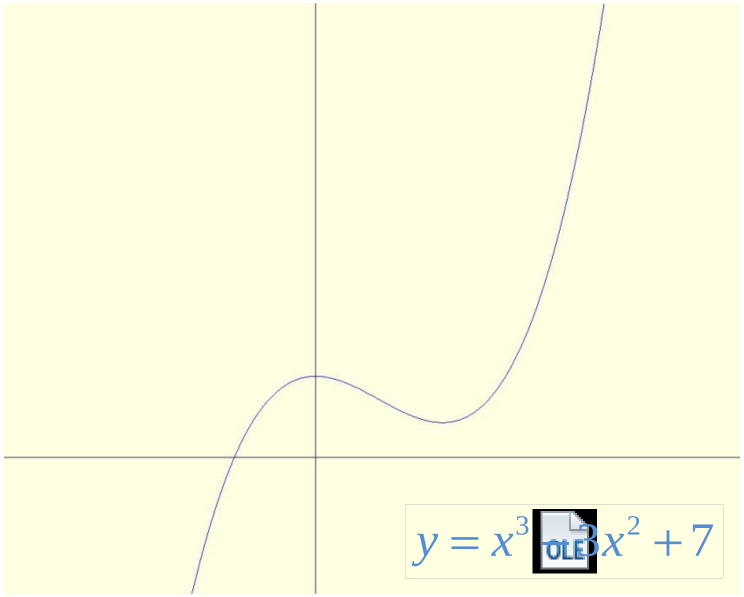
potence	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	eksponentna	ex
koreni	$\sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}$	logaritemska	$\ln x$

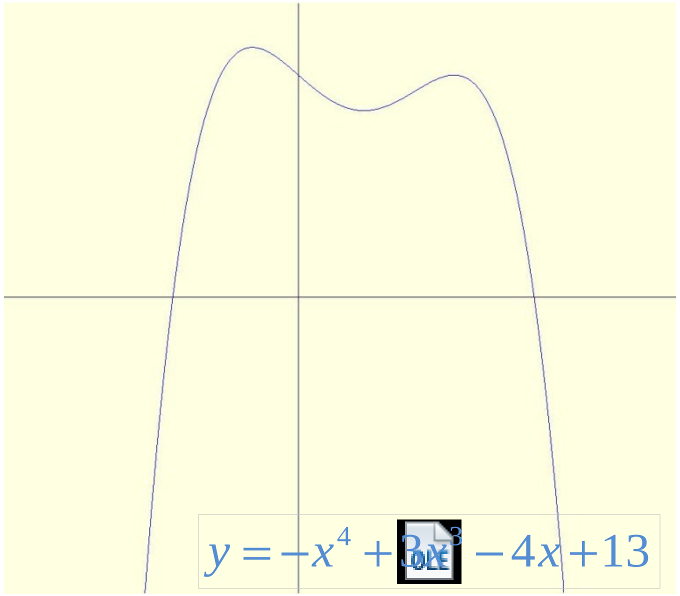
sinus	$\sin x$
arkus sinus	$\arcsin x$
arkus tangens	$\operatorname{arctg} x$

Polinomi

- povsod definirani
- polinom n-te stopnje ima največ n ničel in n-1 ekstremov
- trend je določen z najvišjo potenco
- vsote sodih potenc so soda funkcija, vsote lihih potenc pa liha funkcija

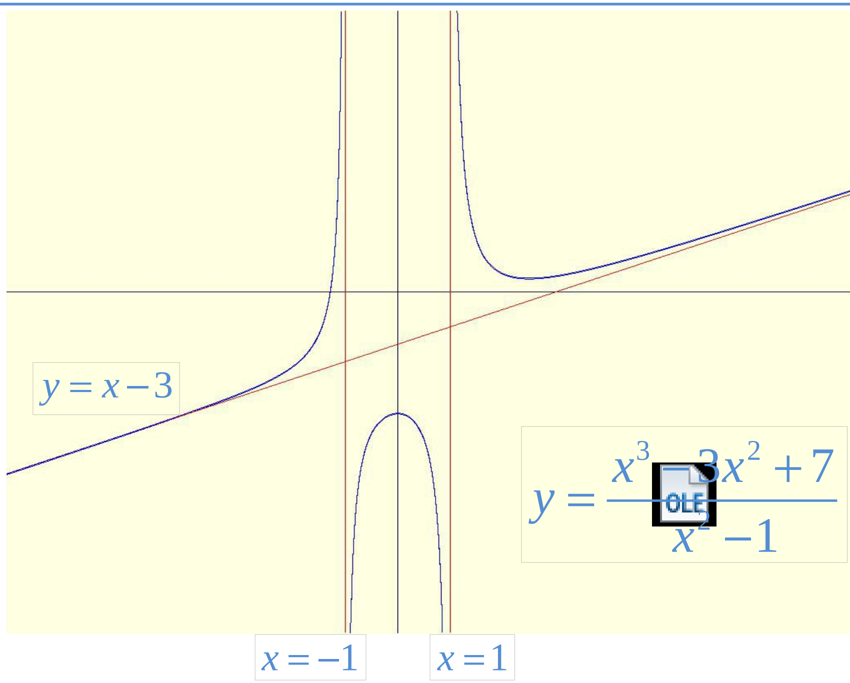


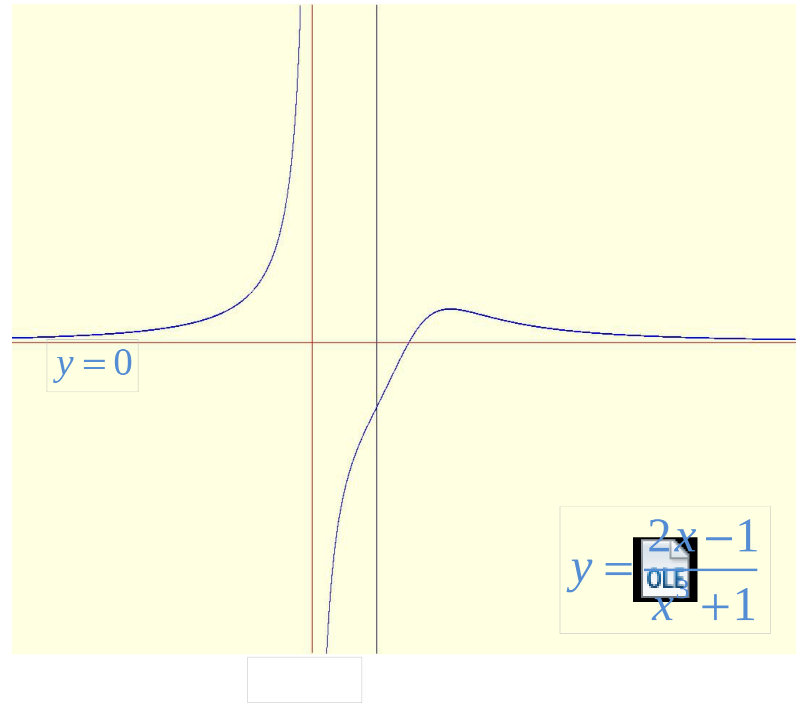




Racionalne funkcije

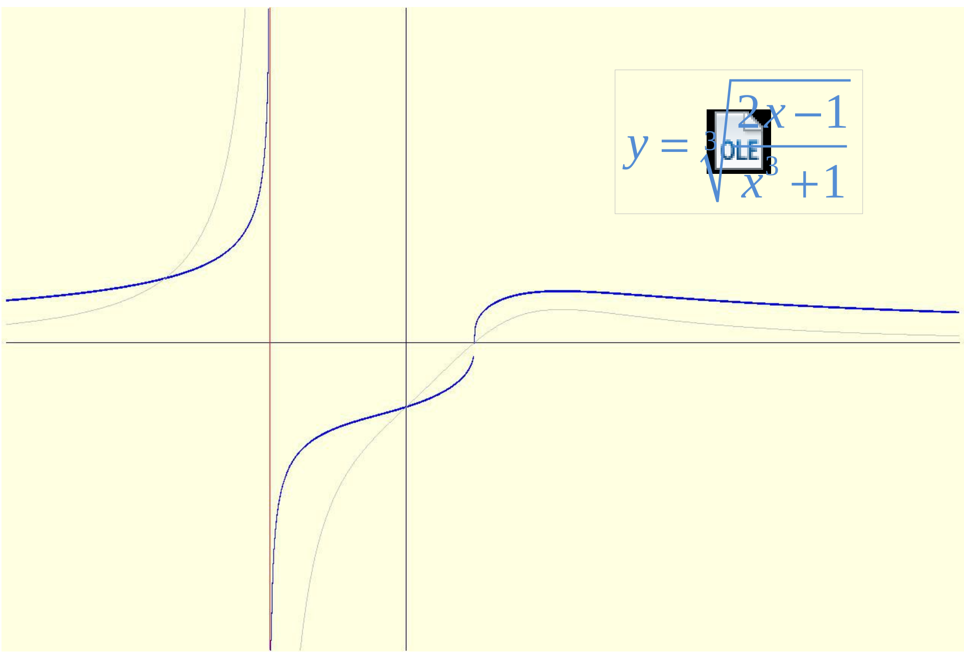
- definirane povsod, razen v ničlah imenovalca
- ničle števca so ničle funkcije, ničle imenovalca so poli
- če je stopnja števca največ za ena večja od stopnje imenovalca dobimo asimptote z deljenjem



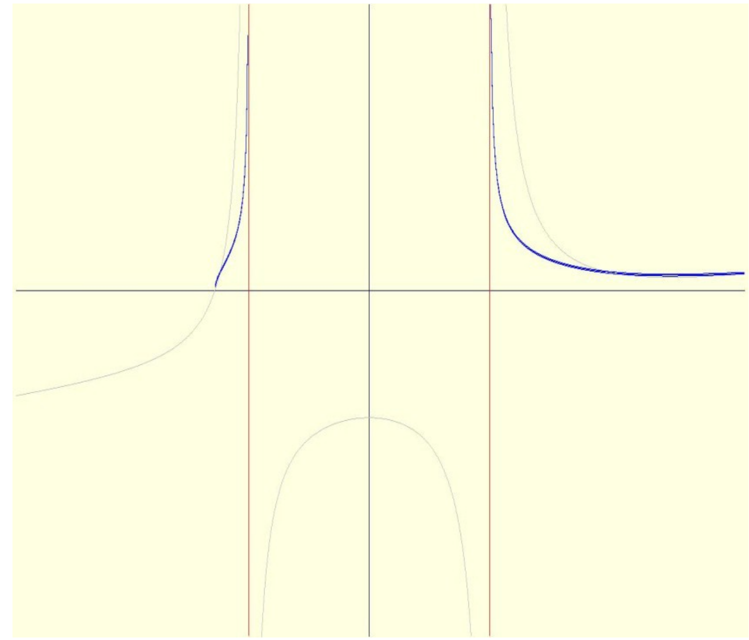


Algebrajske funkcije

- koreni lihe stopnje so definirani povsod, koreni sode stopnje pa le za nenegativne argumente
- koren je bližje številu 1 kot njegov argument
- asimptote dobimo z limitami...



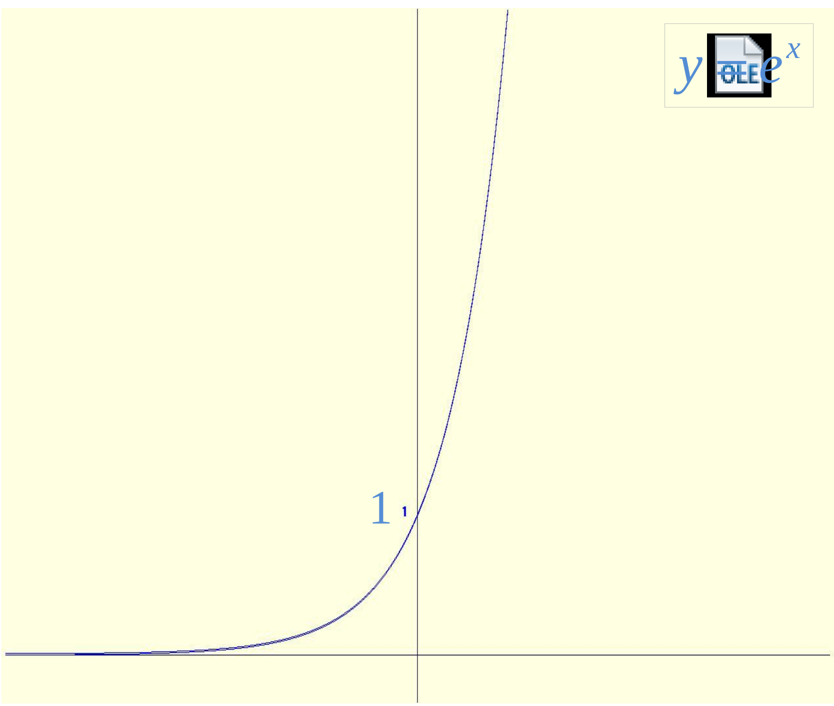
$$y=\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x^3+1}}$$

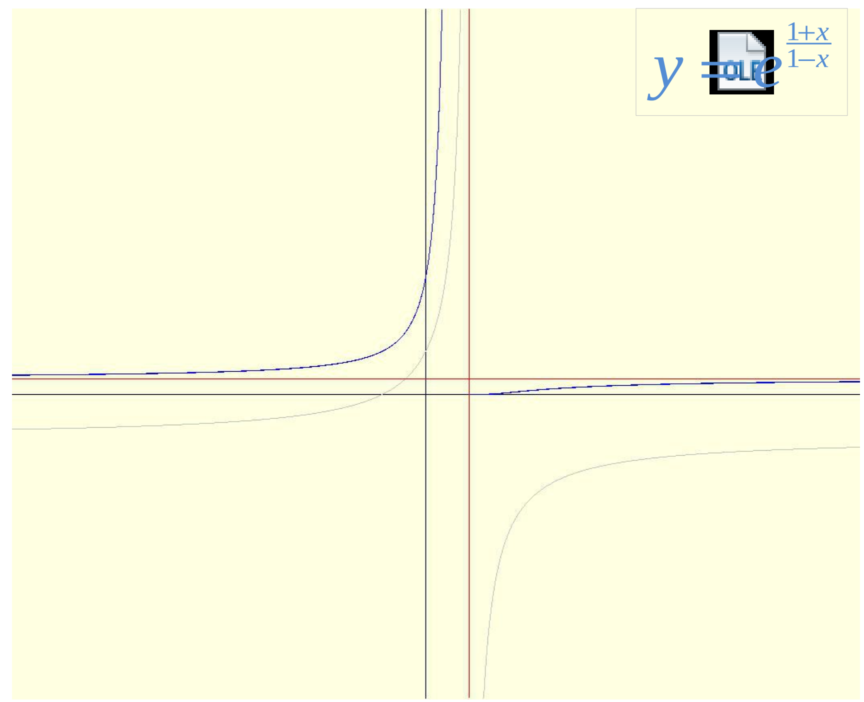


$$y=\sqrt{\frac{x^3-3x^2+7}{x^2-1}}$$

Eksponentna funkcija $f(x)=ex$

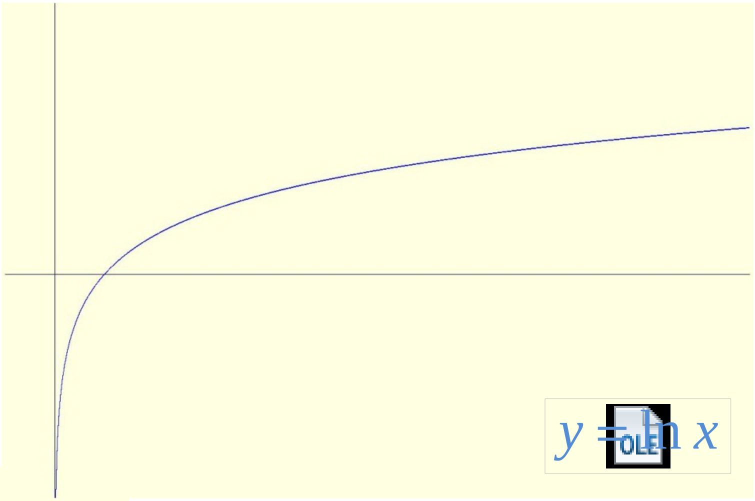
- povsod definirana, zavzame le pozitivne vrednosti (nima ničel)
- za negativne argumente asimptota $y=0$, za pozitivne argumente zelo hitro narašča

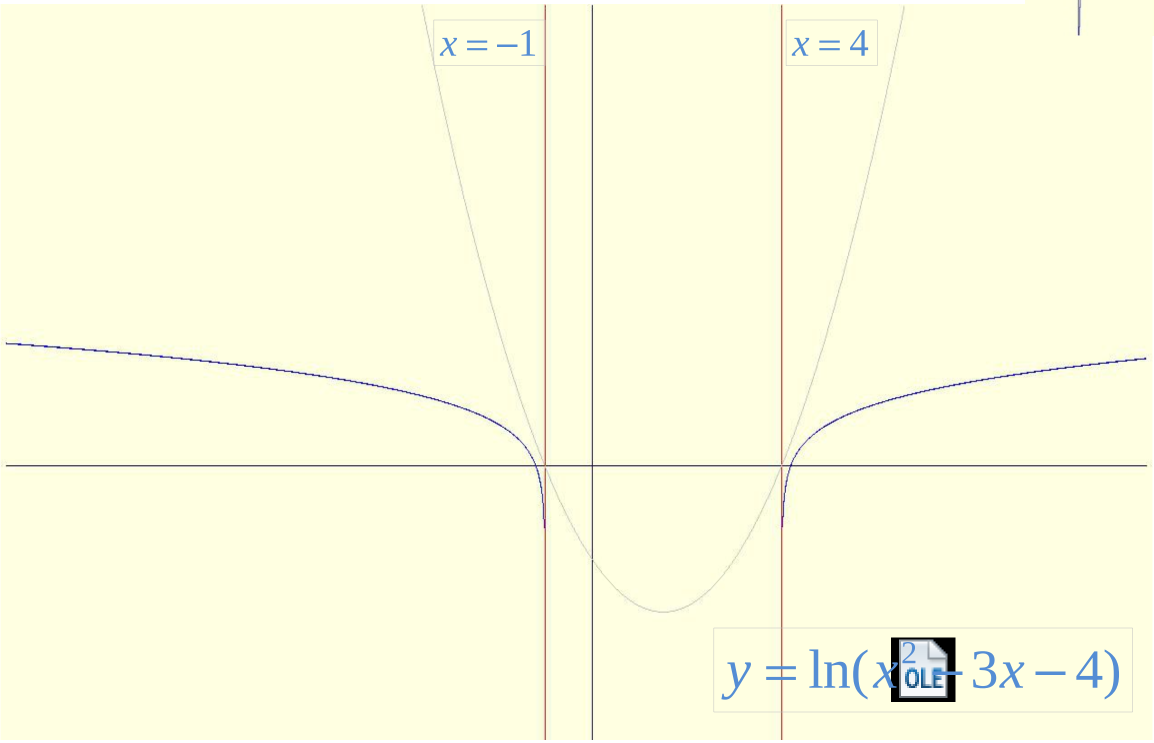




Logaritemska funkcija $f(x)=\ln x$

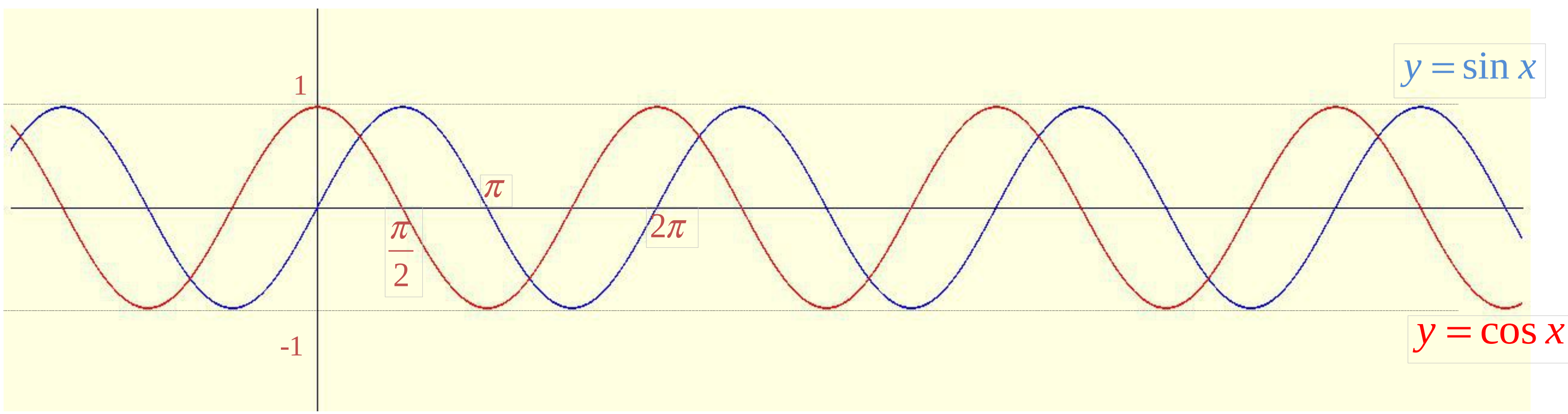
- definirana za pozitivne argumente zavzame vse realne vrednosti, ničla pri $x=1$
- pol pri $x=0$, zelo počasi narašča

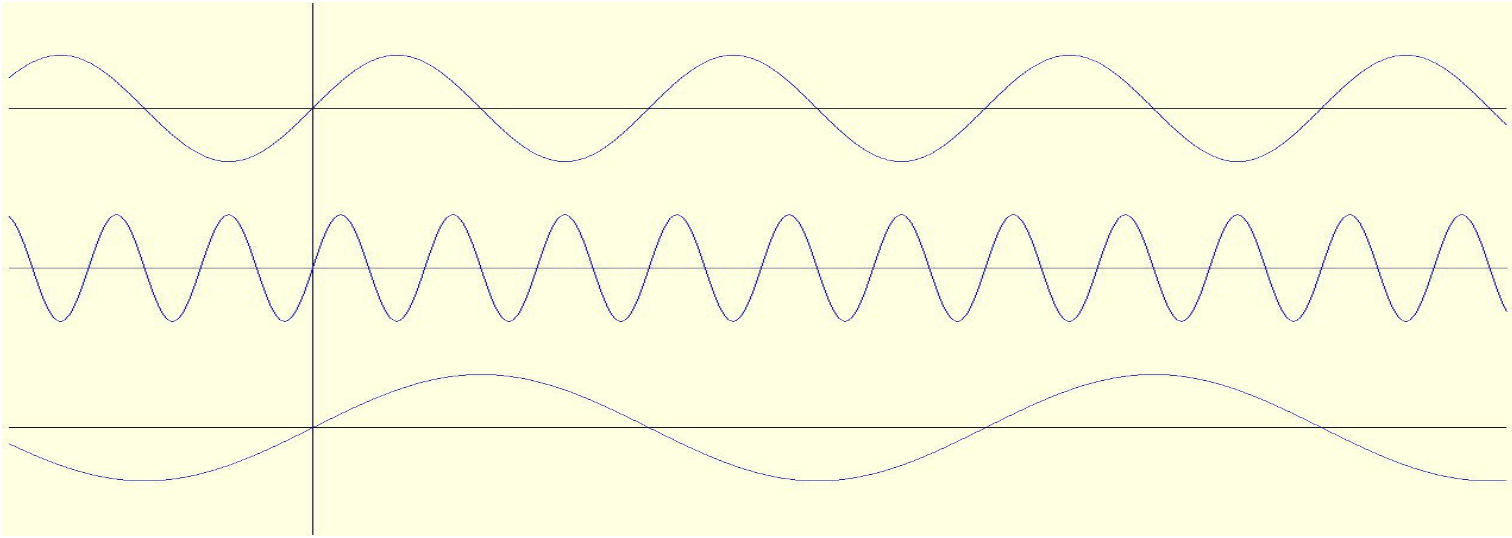




Kotne funkcije $\sin(x)$, $\cos(x)$

- povsod definirane, zaloga vrednosti je interval $[-1,1]$
- periodične, $\sin(x)$ je liha, $\cos(x)$ pa soda funkcija
- $\sin(x)$ ima ničle pri $x=k\pi$, $\cos(x)$ ima ničle pri $x=\pi/2+k\pi$
- $\cos(x)=\sin(\pi/2-x)$, $\sin2x+\cos2x=1$

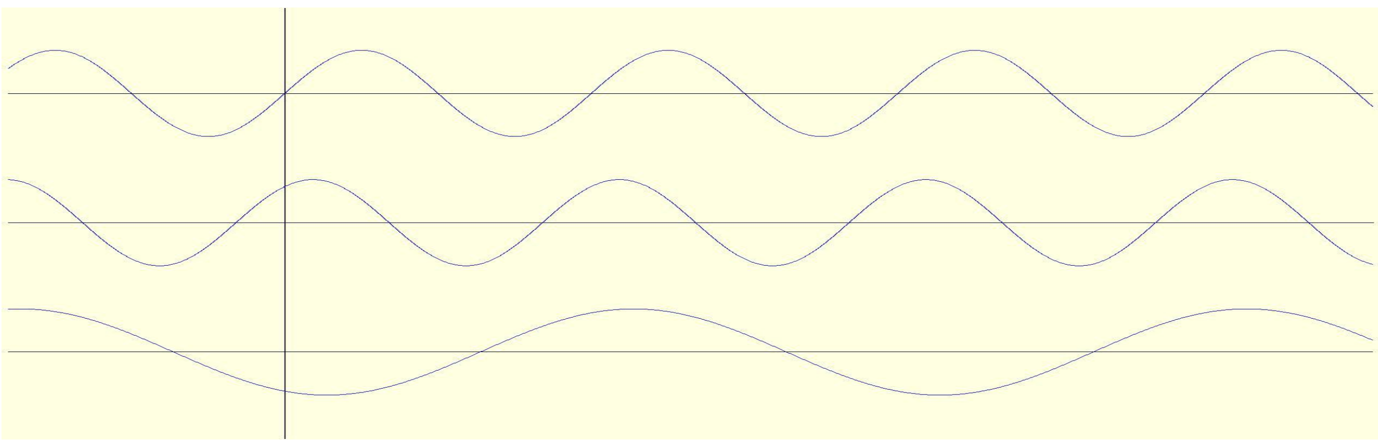




$\sin x$

$\sin 3x$

$\sin \frac{x}{2}$



$y = \sin x$

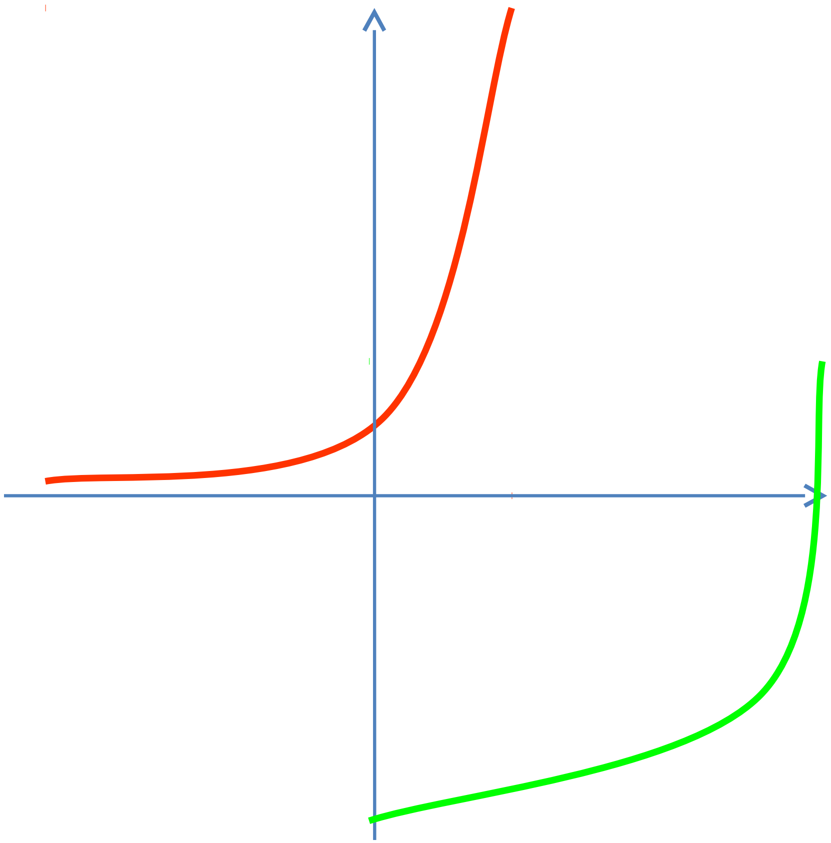
$y = \sin(x+1)$

$y = \sin(\frac{x}{2} - 2)$

sinusno nihanje: $A \sin(\omega x + d)$

A: amplituda, ω: frekvenca, d: fazni premik (zakasnitev)

EKSPONENTNA FUNKCIJA



injektivna

surjektivna

Zožimo kodomeno na $(0,+\infty)$.

$\exp: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ je bijektivna.

Obratna funkcija je

$\exp^{-1} = \ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

TANGENS

injektivna

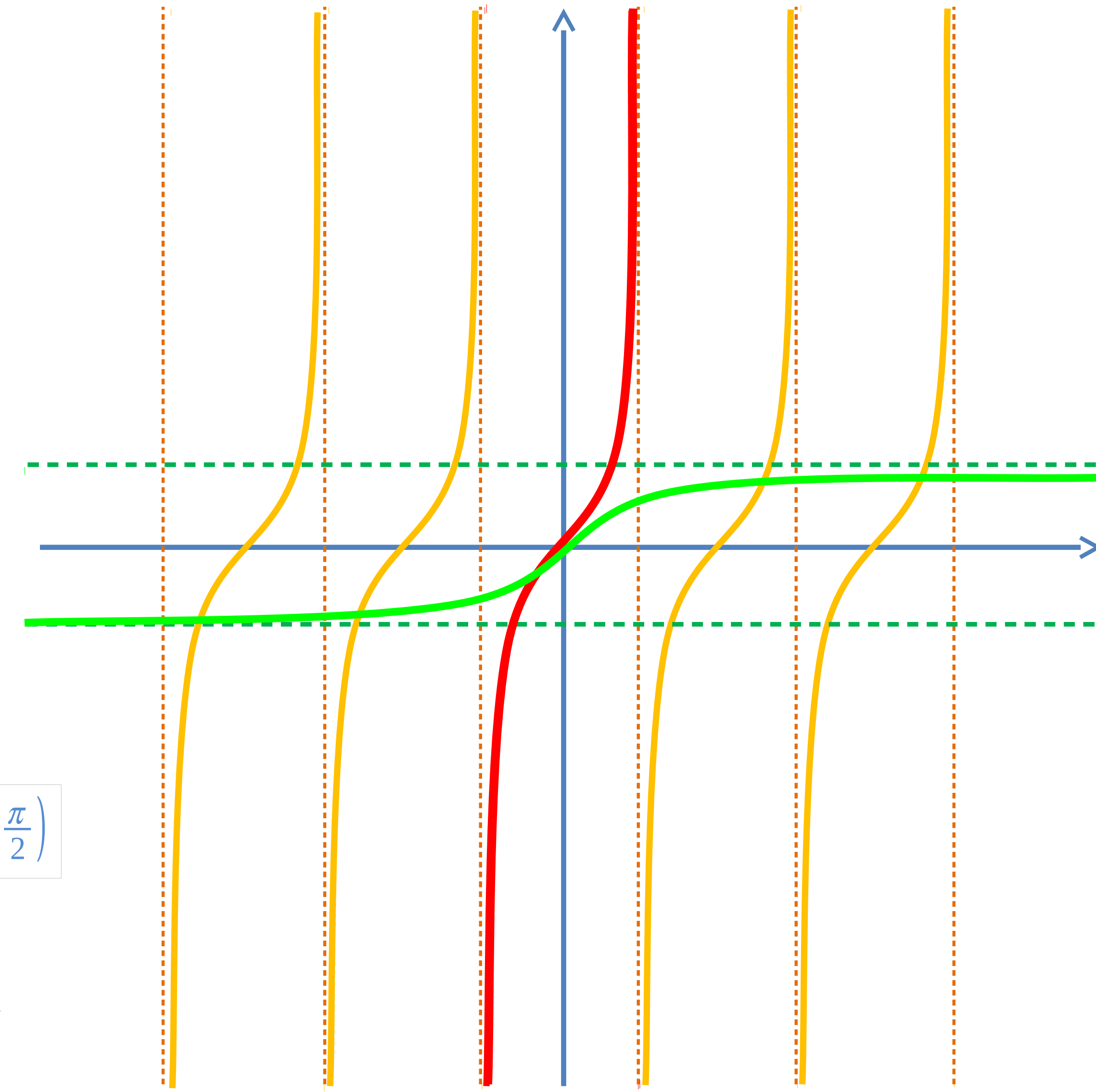
surjektivna

Zožitev $\mathrm{tg}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to \mathbb{R}$ je bijektivna.

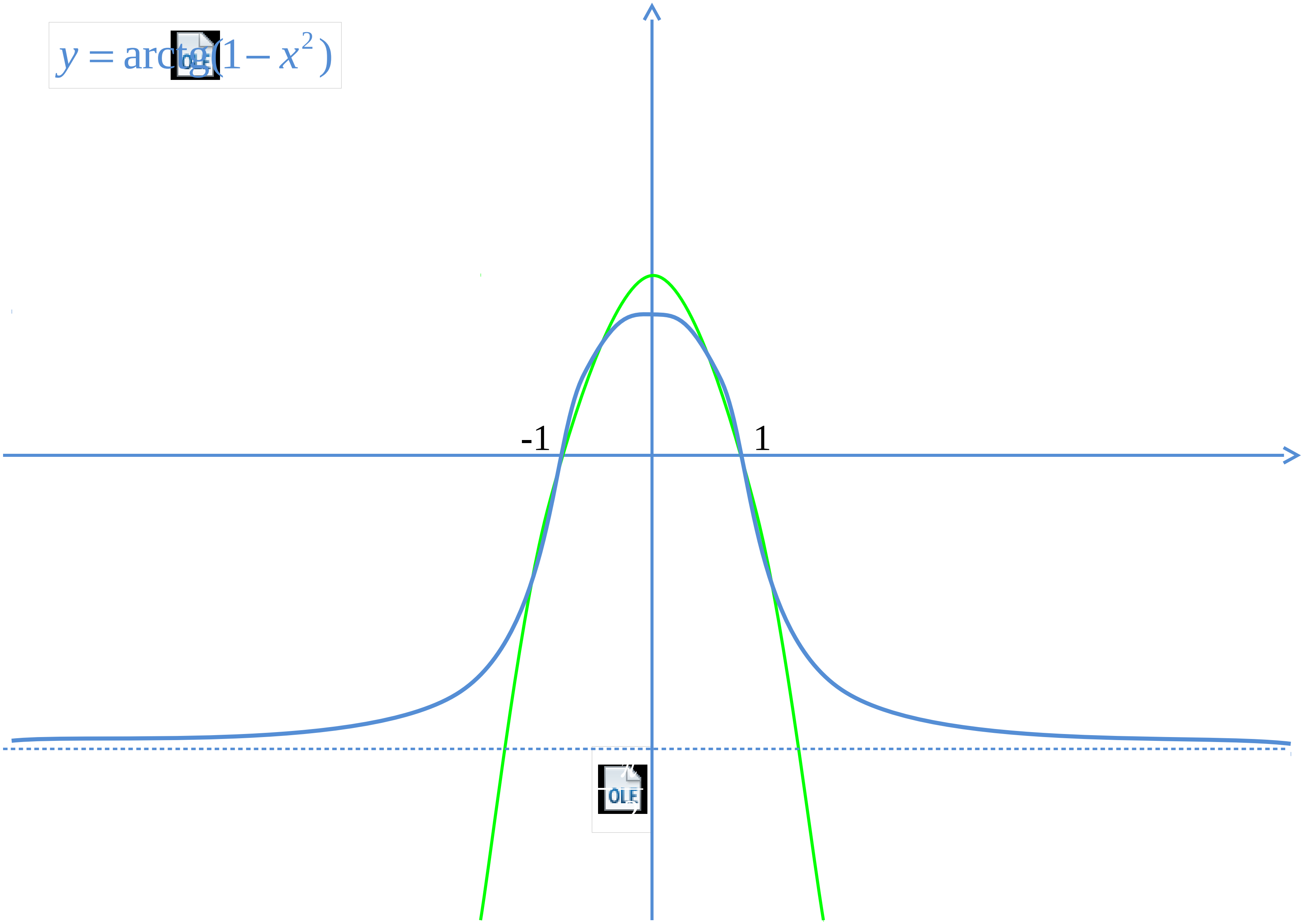
Obratna funkcija

$$\mathrm{arc\,tg}=\mathrm{tg}^{-1}\ \to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

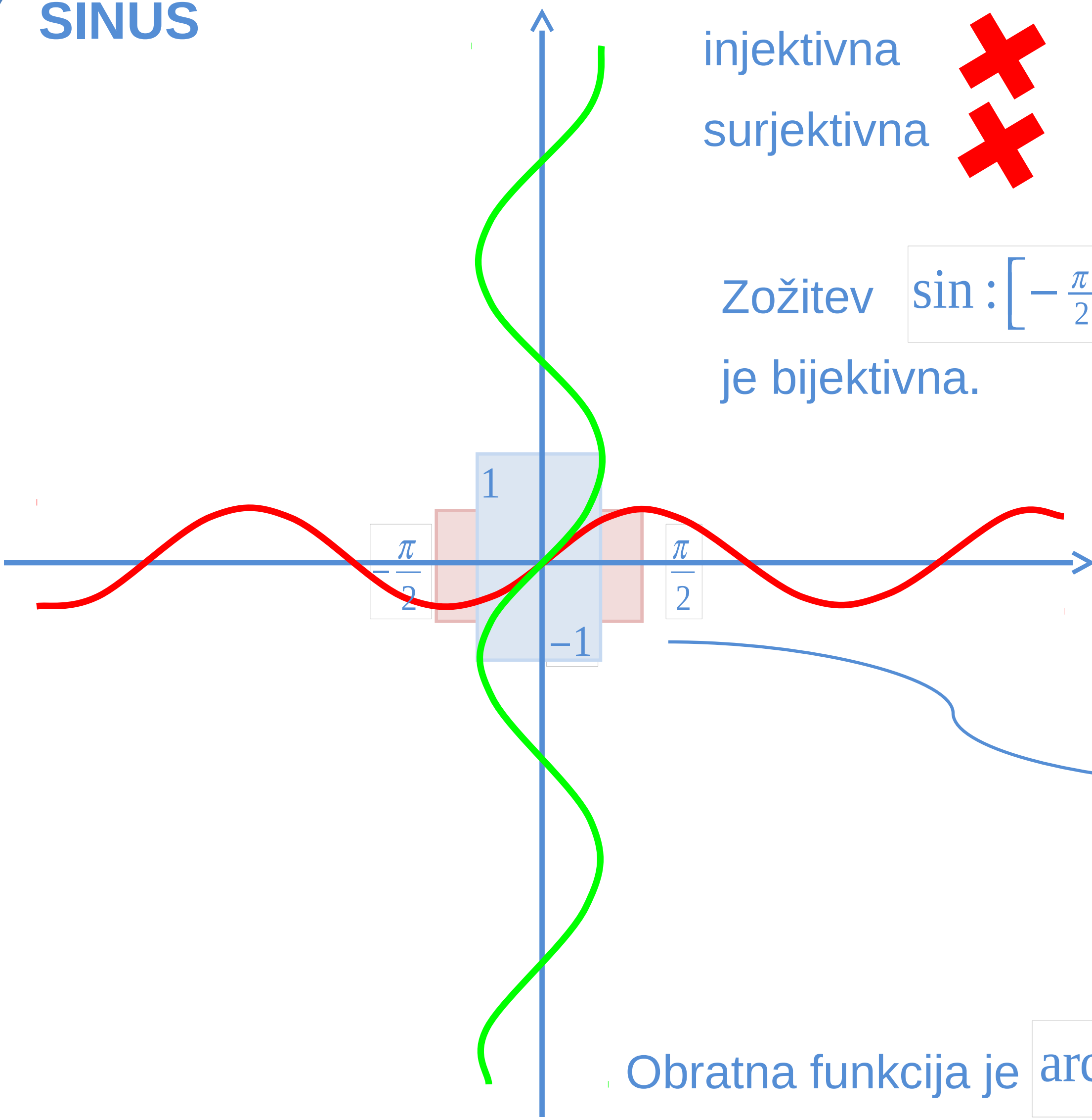
je strogo naraščajoča, ima vodoravni asimptoti $y=\pm\pi/2$



$y = \operatorname{arctg}(1 - x^2)$



SINUS

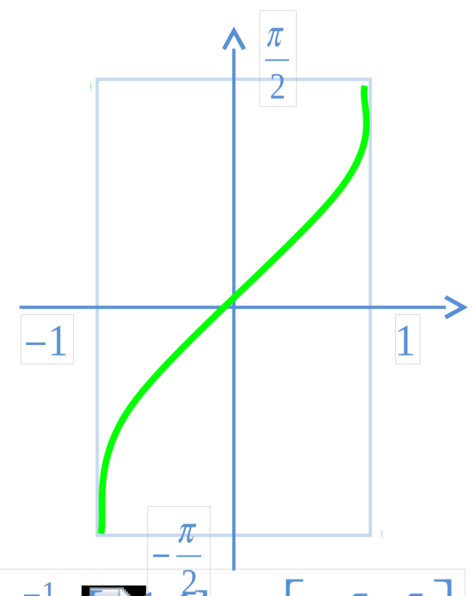


injektivna ✗

surjektivna ✗

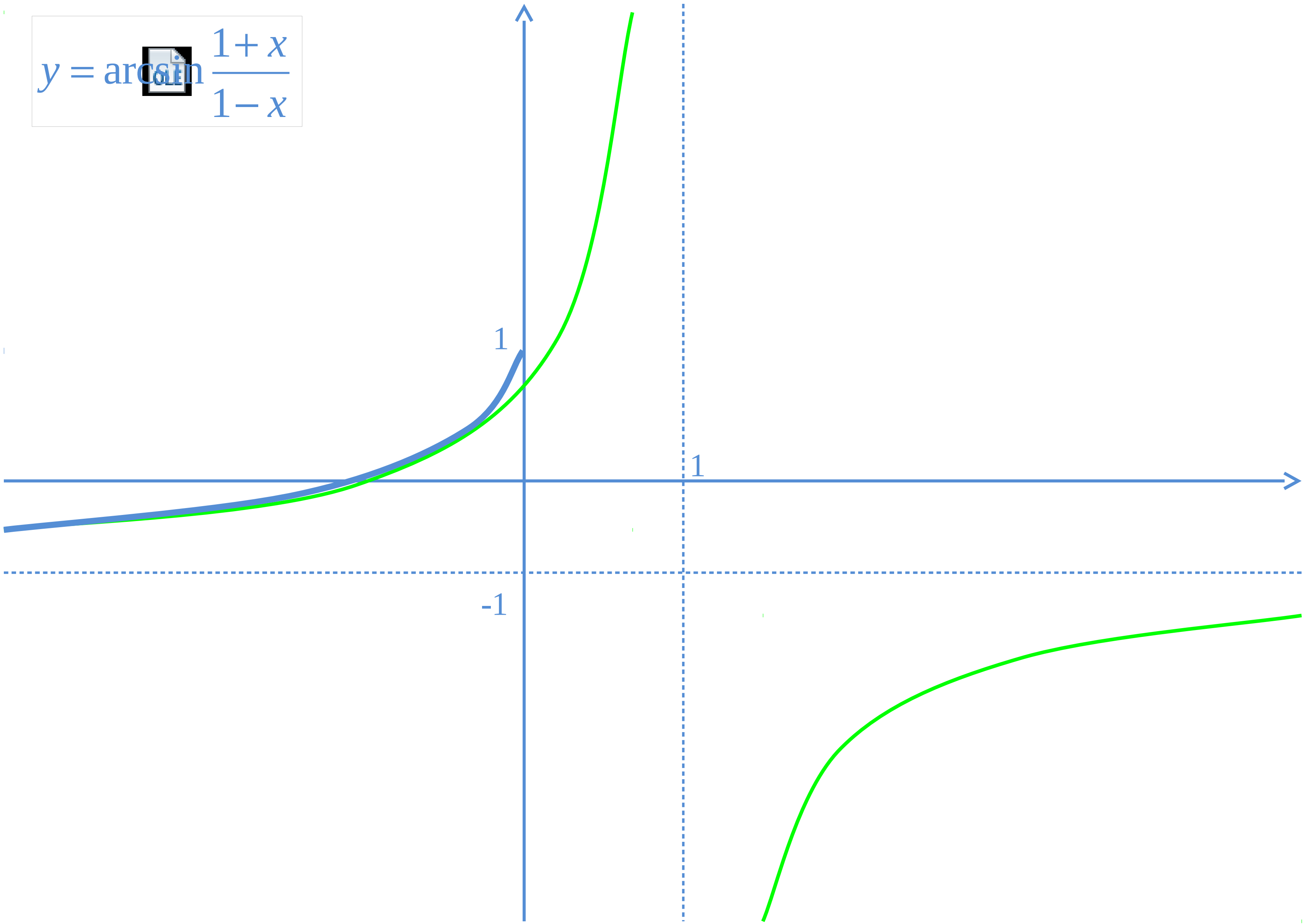
Zožitev $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

je bijektivna.



Obratna funkcija je $\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = \arcsin \frac{1+x}{1-x}$$



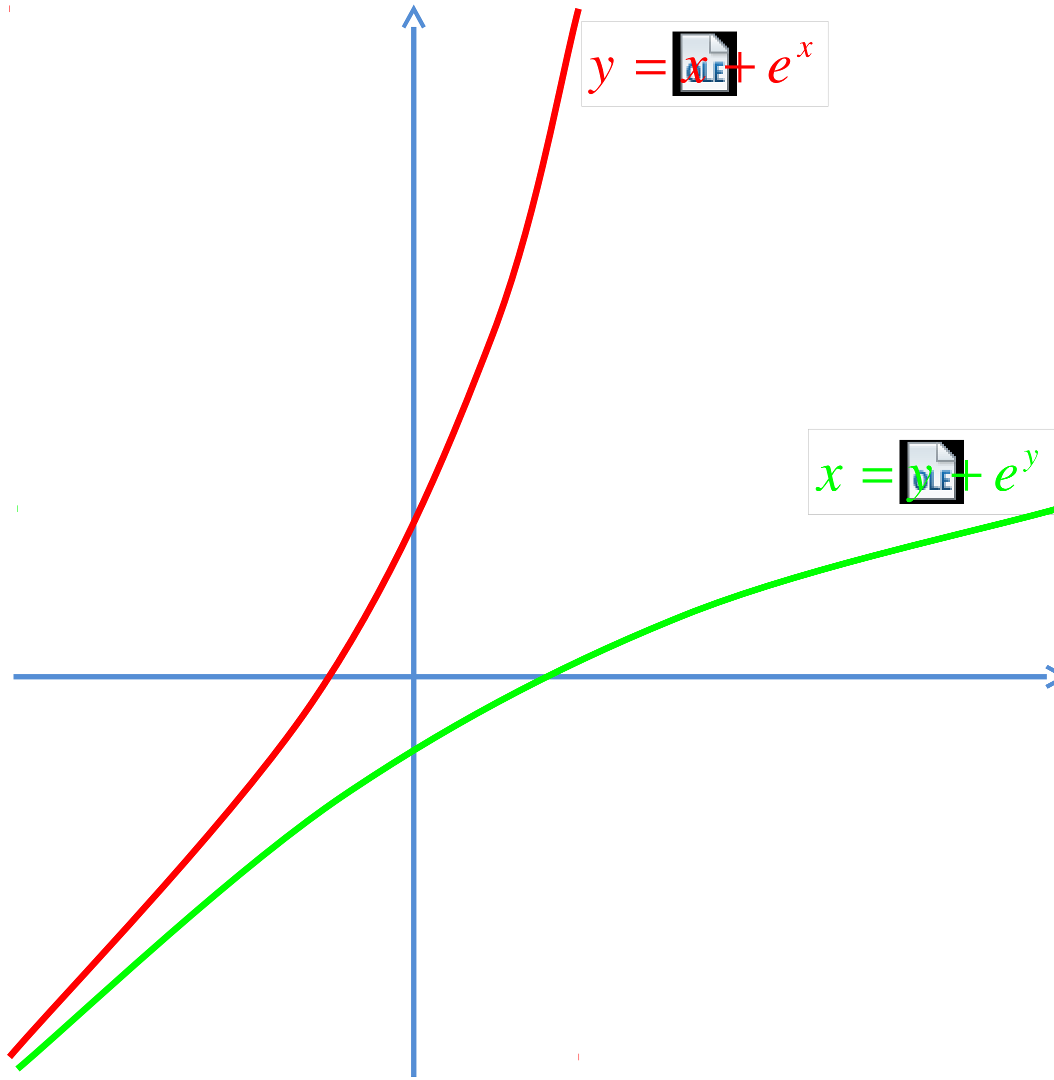
$f(x) = x + e^x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je bijekcija

Obratna funkcija

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ni elementarna funkcija.



LIMITE IN ZVEZNOST

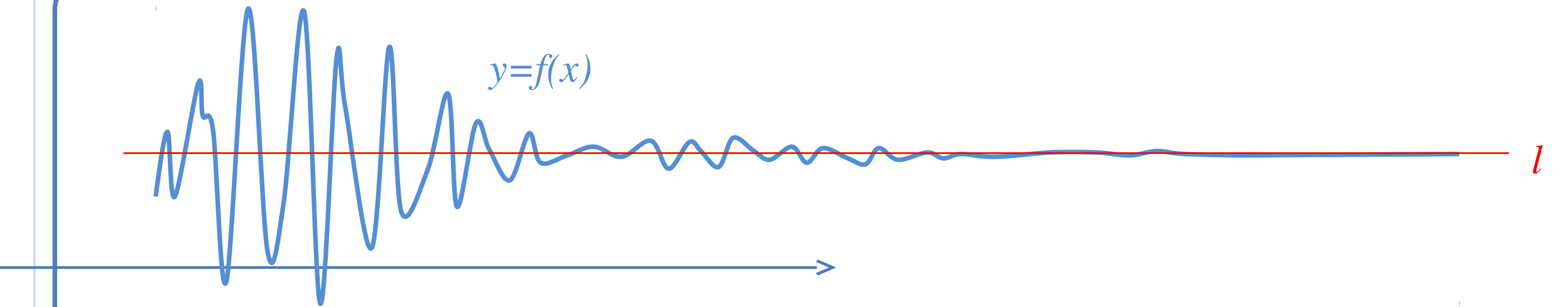
Število L je limita funkcije f pri točki a če velja: za vsako dano natančnost ε obstaja interval I okoli točke a, da je $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ za vse x iz I.

Pišemo $L=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Število L je limita funkcije f v neskončnosti če velja:

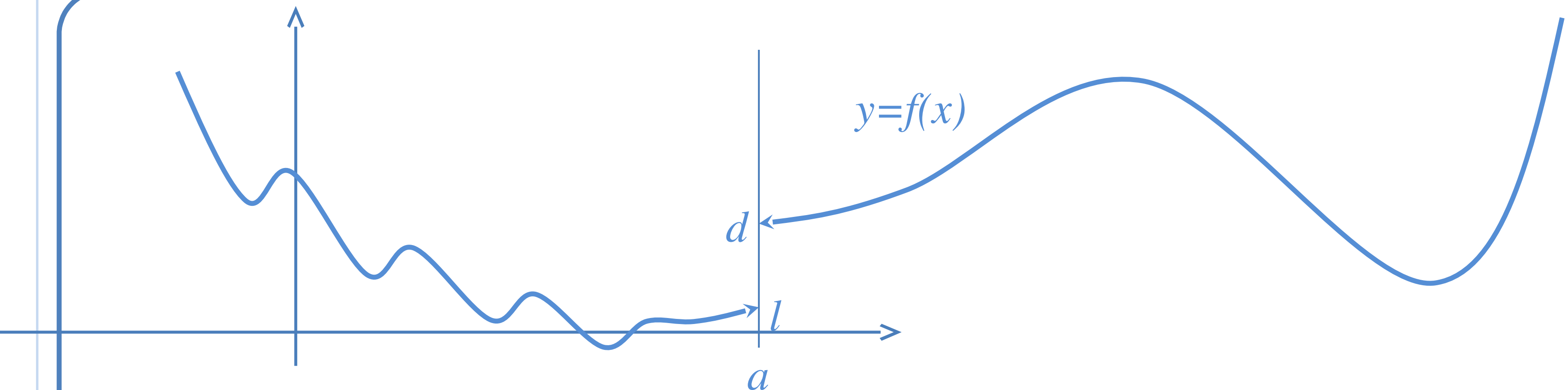
za vsako dano natančnost ε obstaja število n, da je $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ za vse $x > n$.

Pišemo $L=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$



$l = \lim_{x \to \infty} f(x)$

l je **limita** funkcije f, ko x narašča čez vse meje

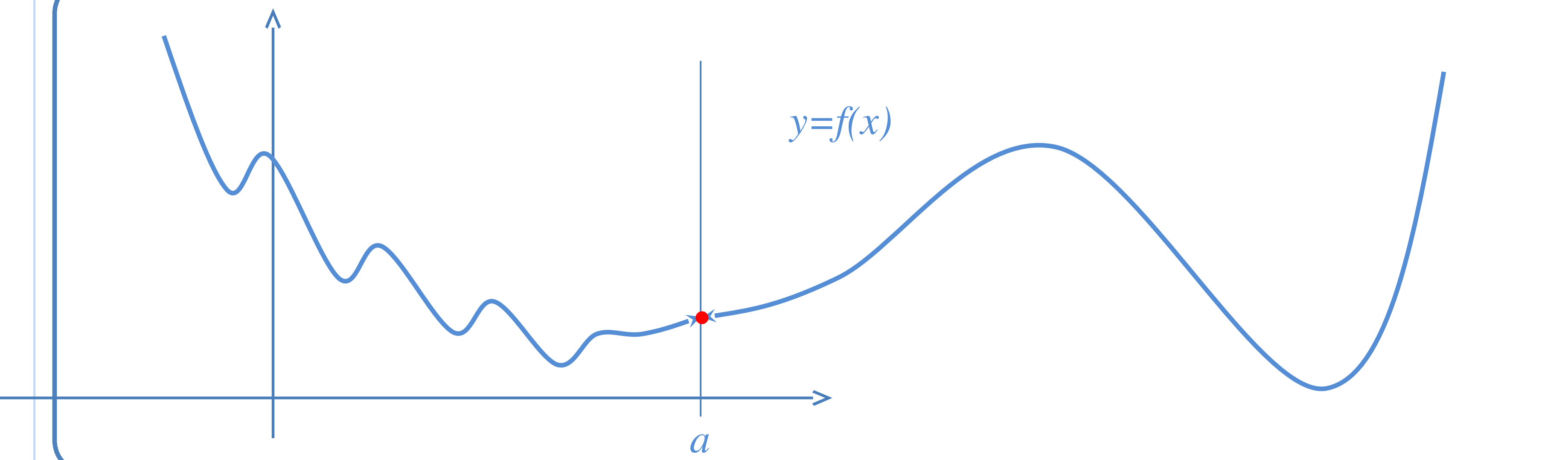


$l = \lim_{x \to a} f(x)$

l je limita funkcije f, ko x narašča proti a (‘leva limita’)

d je limita funkcije f, ko x pada proti a (‘desna limita’)

$d = \lim_{x \to a} f(x)$



Funkcija f je **zvezna v točki** a, če je leva limita pri a enaka desni limiti pri a in sta obe enaki funkcijski vrednosti.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Alternativna definicija:

Funkcija f je zvezna pri točki a, če je v tej točki definirana in če za vsako izbrano natančnost ε obstaja tak interval I okoli točke a, da je $|f(a)-f(x)|<\varepsilon$ za vse $x\in I$.

Intuitivno: funkcija je zvezna pri a, če je $f(x)$ blizu $f(a)$ za vse x, ki so blizu a.

RAČUNANJE LIMIT

Če je $\lim f_1 = L_1$, $\lim f_2 = L_2$,

potem je: $\lim(f_1 + f_2) = L_1 + L_2$ $\qquad$ $\lim(f_1 - f_2) = L_1 - L_2$

$\lim(f_1 \cdot f_2) = L_1 \cdot L_2$ $\qquad$ $\lim \dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (če je $L_2 \neq 0$)

Povrhu, če je $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$ in je $\lim\limits_{x \to L_1} f_2(x) = L_2$, potem je $\lim\limits_{x \to a} f_2\big(f_1(x)\big) = L_2$

Pravila smemo uporabiti le kadar limite obstajajo!

- če je f elementarna funkcija preoblikujemo izraz in po potrebi uporabimo osnovni limiti

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ eksponentne/logaritemske $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ kotne/ločne

- za splošne funkcije lahko izračunamo funkcijsko vrednost v točki, ki je dovolj blizu a
- kasneje: z uporabo odvodov (L'Hospitalovo pravilo)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-3x+2)}{(x^3-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)}{(x^2+x+1)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\cancel{x}+1)-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = (x+1)-x$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = 1$$

$$y = \ln x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \lim_{y\to 0}\frac{3}{y}\cdot\frac{\sin y}{\cos y} = 3$$

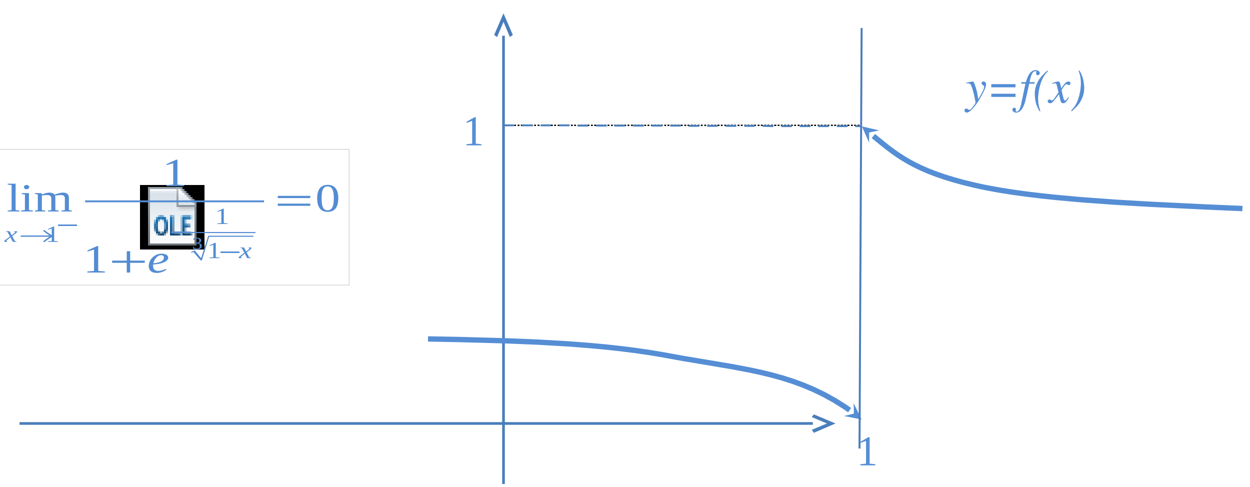
$$y = 3x$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}}=?$$

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}}$$

x	0.5	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	0.2209874833	0.1039175446	0.0095502780	0.0000453978

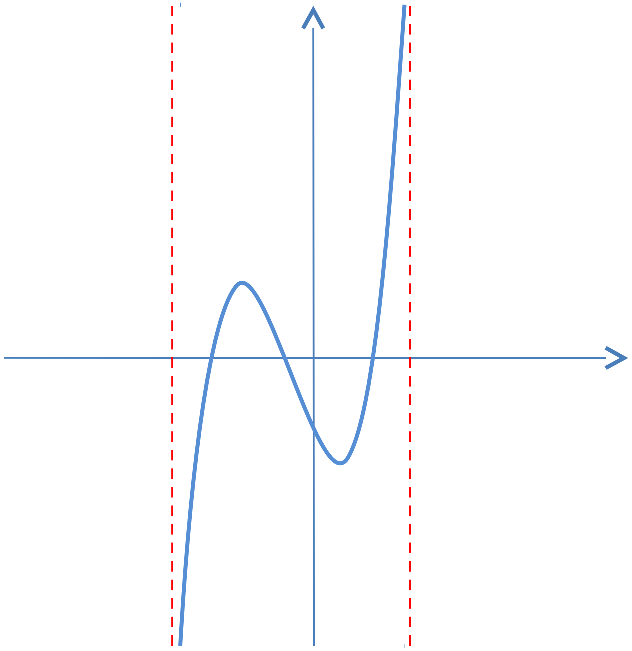
x	1.5	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	0.7790125166	0.8960824553	0.9904497219	0.9999546021



$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}}=0$$

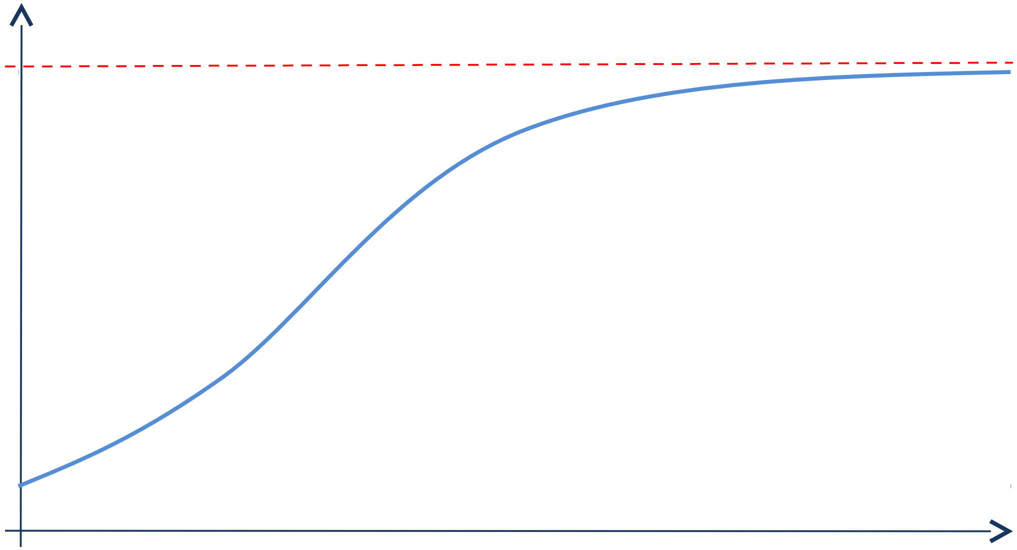
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}}=1$$

ASIMPTOTE



Pol pri b:

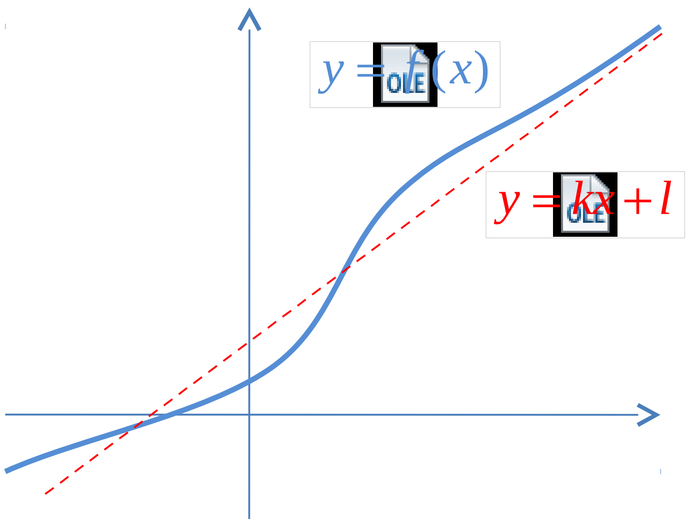
$\lim\limits_{x\to b} f(x) = \longrightarrow +\infty$ ali $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \longrightarrow -\infty$



Vodoravna asimptota:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

POŠEVNA ASIMPTOTA



$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (kx + l) = 0$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$l = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 5}$$

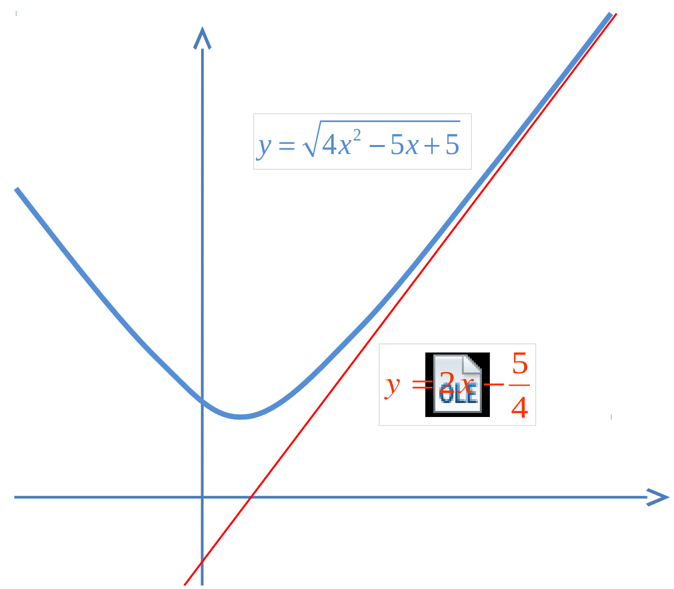
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^2 - 5x + 5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2}} = 2$$

$$l = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - 5x + 5} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{(4x^2 - 5x + 5) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 5x + 5} + 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x + 5}{\sqrt{4x^2 - 5x + 5} + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5 + \frac{5}{x}}{\sqrt{4 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2}} + 2} = -\frac{5}{4}$$

asimptota je:

$$y = 2x - \frac{5}{4}$$

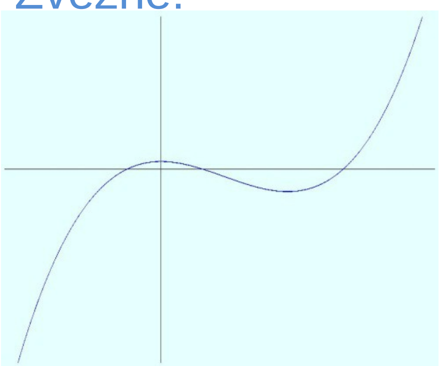


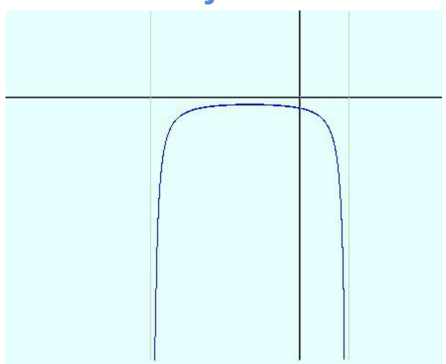
ZVEZNE FUNKCIJE

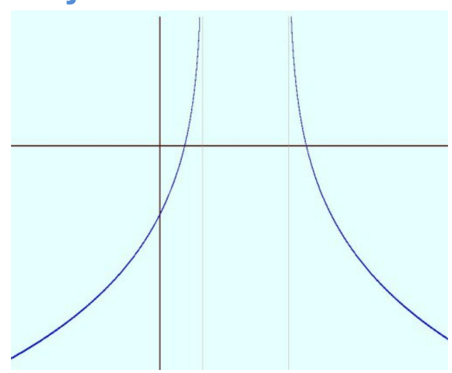
Funkcija f je **zvezna**, če je za vsak a, kjer je definirana funkcijska vrednost $f(a)$ enaka levi in desni limiti pri a.

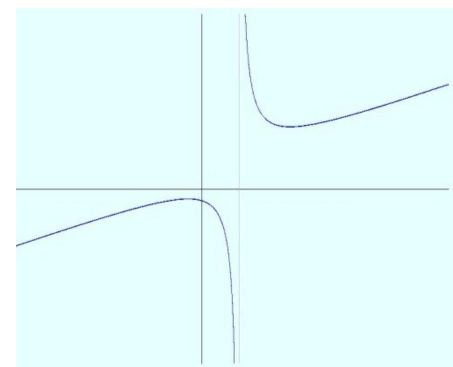
Intuitivno, f je zvezna, če je njen graf nepretrgan nad vsakim intervalom, ki je v celoti vsebovan v definicijskem območju.

Zvezne:

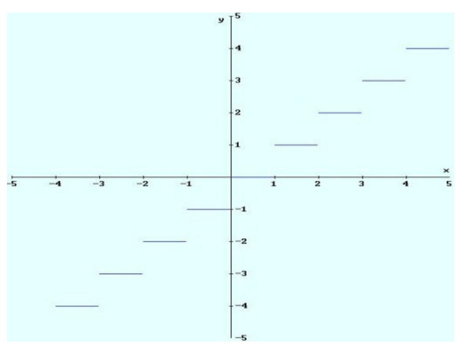


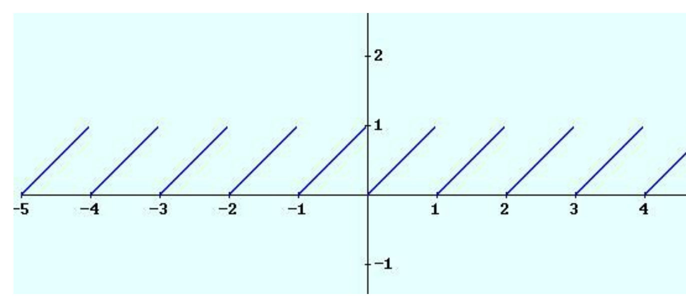






Nezvezne:





Lastnosti zveznih funkcij

Osnovne funkcije

$$f(x) = konst., \; f(x) = x, \; \sqrt[n]{x},$$
$$e^x, \; \ln x, \; \sin x, \; \arcsin x, \; \operatorname{arctg} x$$

so zvezne.

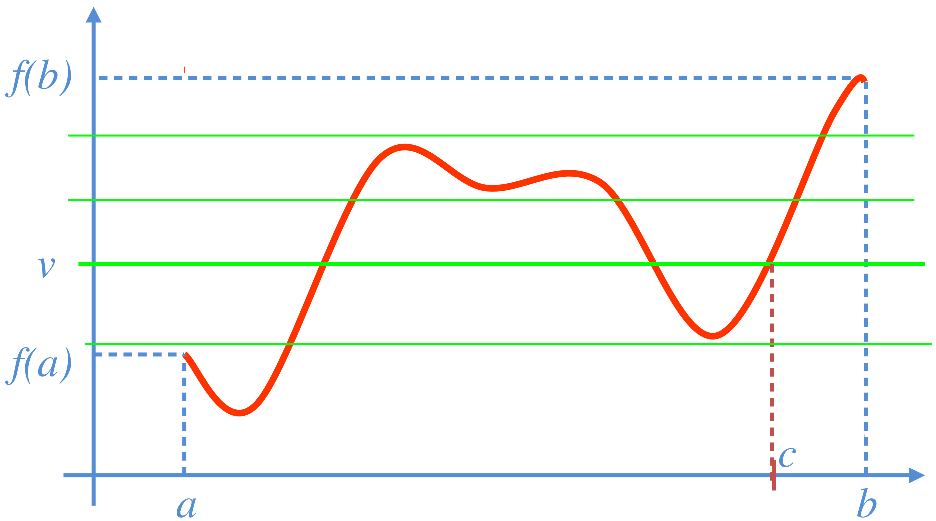
Vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij je zvezna funkcija.

Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.

$\Rightarrow$

Vse elementarne funkcije so zvezne.

Zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.



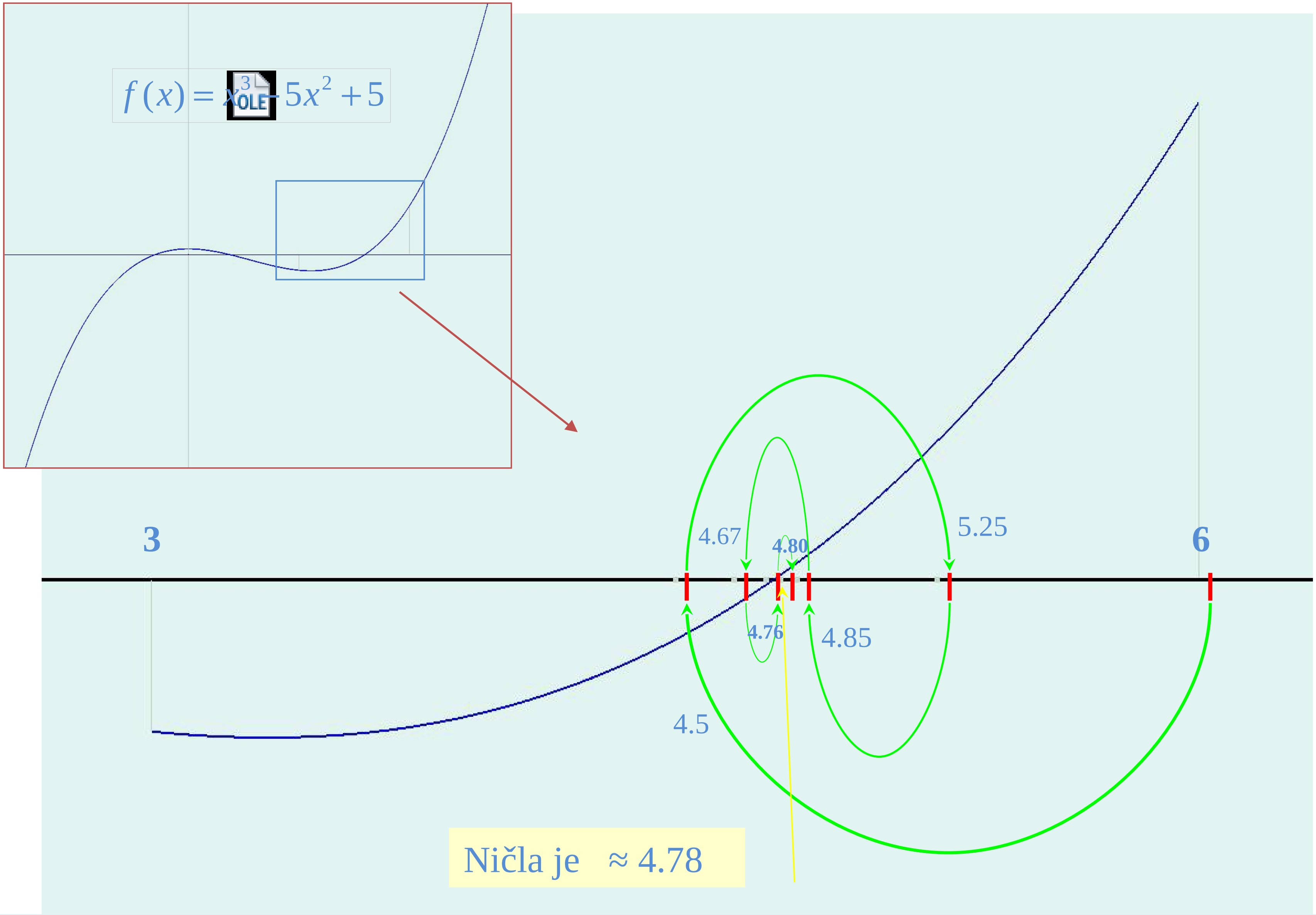
Če je bila jutranja temperatura 6oC, opoldanska pa 15oC, potem je tisto jutro v nekem trenutku bilo tudi 10oC.

Če vzamemo poln 100 litrski sod in ga izpraznimo, potem je v nekem trenutku med praznenjem bilo v sodu natanko 35 litrov tekočine.

Če je etanol pri 40oC tekoč, pri 80oC pa plinast, potem pri neki vmesni temperaturi vre.

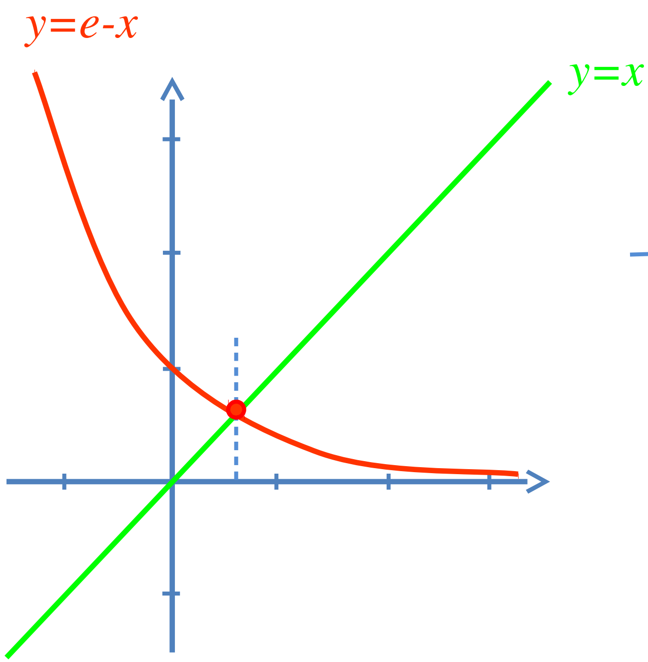
BISEKCIJA - DOLOČANJE NIČEL ZVEZNIH FUNKCIJ

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 5$$

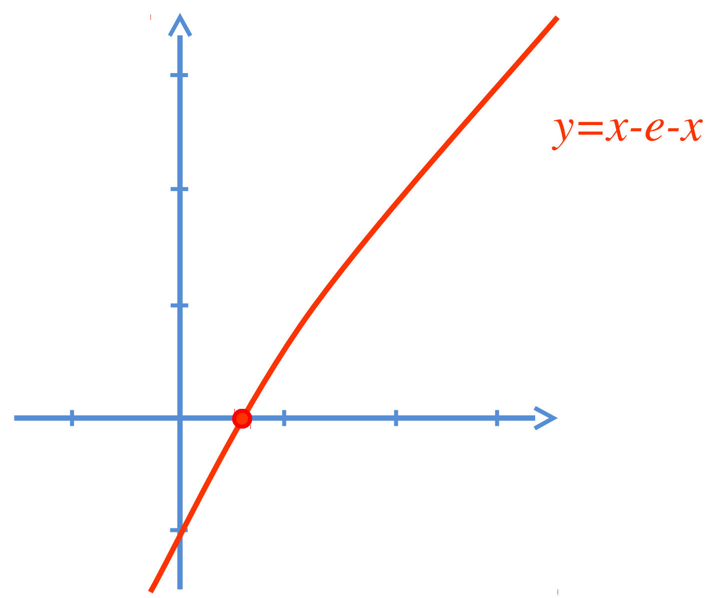


Ničla je ≈ 4.78

Enačbo $x=e-x$ reši na dve decimalki natančno.



Prevedemo na: $x-e-x=0$



Iščemo ničlo funkcije $f(x)=x$-e-x

$f(0)=-1$, $f(1)=1-1/e\approx 0.63$, torej ima f ničlo na intervalu $[0,1]$

$f(0.5)=-0.106$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,1]$

$f(0.75)=0.277$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,0.75]$

$f(0.62)=0.082$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,0.62]$
(ker iščemo rešitev na dve decimalki natančno, ni potrebno računati $f(0.625)$)

$f(0.56)=-0.011$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.62]$

$f(0.59)=0.035$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.59]$

$f(0.57)=0.004$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.57]$

Prvi dve decimalki vseh števil na intervalu $[0.56,0.57]$ se ujemata, zato lahko postopek bisekcije ustavimo in za približno rešitev vzamemo $\underline{x=0.56}$.
(natančnejša rešitev je x = 0.5671432986 – računanje z bisekcijo bi zahtevalo še dodatnih 25 korakov)

Zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zavzame minimum in maksimum.