Matematika s statistiko
Integral

Diferencialne enačbe

(1) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(a) $y' = 2y$, $y(0) = 3$,
(b) $y' = y(x^2 + 1)$, $y(0) = 2$,
(c) $2yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

Rešitev: Navadna diferencialna enačba prvega reda je enačba oblike

$$y' = F(x, y),$$

kjer je F neka zvezna funkcija dveh spremenljivk. Rešitev enačbe je vsaka odvedljiva funkcija $y = y(x)$, ki zadošča enačbi. V splošnem je rešitev enačbe enoparametrična družina krivulj, natanko določeno rešitev pa dobimo, če predpišemo vrednost rešitve v neki točki.

Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če je oblike

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo, tako da najprej zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki vsako na svojo stran, in nato integriramo vsako stran posebej.

(a) $y' = 2y, \; y(0) = 3$:

S preoblikovanjem dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y, \\ \frac{dy}{y} &= 2\,dx, \\ \ln y &= 2x + c. \end{aligned}$$

Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = e^{2x+c} = e^c e^{2x} = Ce^{2x},$$

kjer smo označili $C = e^c$. Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Rešitve enačbe so definirane na celi realni osi, njihovi grafi pa razslojijo ravnino na družino krivulj. Pri računanju smo potiho predpostavili, da je $y \neq 0$. Hitro pa se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe tudi funkcija $y(x) = 0$.

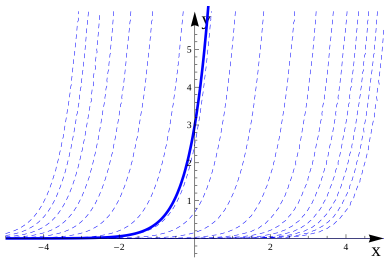
Poglejmo si še, kako lahko z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo natanko določeno rešitev. Za konstanto C mora veljati

$$y(0) = Ce^0 = 3,$$

od koder dobimo, da je $C = 3$, iskana rešitev diferencialne enačbe pa je funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{2x}}}.$$

Poglejmo si še rešitve dane enačbe pri različnih vrednostih konstante C. Začetnemu pogoju ustreza tista rešitev enačbe, ki gre skozi točko $T(0,3)$.



(b) $y' = y(x^2+1),\ y(0) = 2$:

Računajmo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y(x^2+1), \\ \frac{dy}{y} &= (x^2+1)\,dx, \\ \ln y &= \frac{x^3}{3} + x + c. \end{aligned}$$

Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3}+x+c} = Ce^{\frac{x^3}{3}+x}.$$

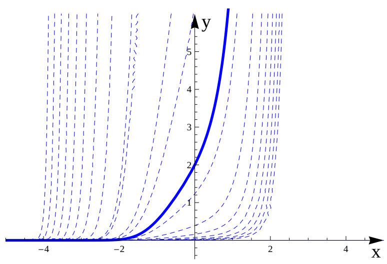
Za vsako izbiro konstante C in predznaka dobimo natanko določeno rešitev enačbe, rešitev pa je tudi funkcija $y(x) = 0$. Konstanta C je v tem primeru enaka

$$y(0) = Ce^0 = 2,$$

od koder dobimo, da je iskana rešitev diferencialne enačbe funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{2e^{\frac{x^3}{3}+x}}}.$$

Rešitve enačbe pri različnih vrednostih konstante C so skicirane na spodnji sliki.



(c) $2yy' = e^x,\ y(0) = 1$:

Računajmo:

$$\begin{aligned} 2yy' &= e^x, \\ 2y\,dy &= e^x\,dx, \\ y^2 &= e^x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je tako enaka

$$y(x) = \pm\sqrt{e^x + C}.$$

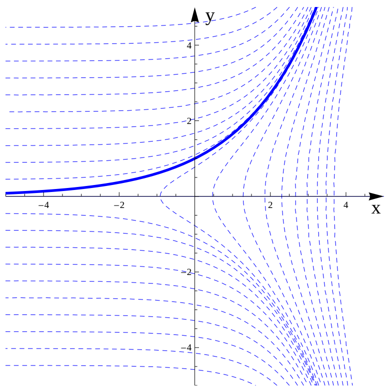
Če je konstanta C nenegativna, je ustrezna rešitev definirana za vsa realna števila, sicer pa samo na nekem podintervalu.

Ker je $y(0) = 1 > 0$, bomo vzeli predznak $+$. Konstanta C pa zadošča enakosti

$$y(0) = \sqrt{1 + C} = 1,$$

od koder sledi, da je $C = 0$. Rešitev diferencialne enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{\frac{x}{2}}}}.$$



$\square$

(2) Število prebivalstva na planetu Zemlja modeliramo z logistično diferencialno enačbo

$$P' = \tfrac{r}{K} P\,(K - P)\,,$$

kjer je P število prebivalcev v milijardah, $r = 0.03$ in $K = 12$. Oceni število prebivalcev na našem planetu leta 2050, če je bilo na Zemlji leta 2011 sedem milijard prebivalcev.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali Verhulstov model rasti prebivalstva. Predpostavili bomo, da funkcija $P(t)$ števila prebivalcev ob času t zadošča diferencialni enačbi

$$P' = \tfrac{r}{K} P\,(K - P)\,.$$

Konstanti r in K interpretiramo kot:

- r koeficient sorazmernosti,
- K maksimalno število prebivalcev na danem območju.

Tej enačbi pogosto rečemo logistična enačba, njenim rešitvam pa logistične krivulje. Najprej poiščimo splošno rešitev logistične diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} P' &= \tfrac{r}{K} P\,(K-P)\,, \\ \frac{dP}{P\,(K-P)} &= \frac{r}{K}\,dt, \\ \frac{1}{K}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)dP &= \frac{r}{K}\,dt, \\ \ln\left(\frac{P}{K-P}\right) &= rt+c, \\ P &= (K-P)Ce^{rt}, \\ P(1+Ce^{rt}) &= KCe^{rt}, \\ P &= \frac{KCe^{rt}}{1+Ce^{rt}}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $P(2011) = 7$ dobimo iz enačbe $P = (K-P)Ce^{rt}$ vrednost

$$C = \frac{P(2011)}{K-P(2011)}e^{-2011r} = \frac{7}{5}e^{-2011r}.$$

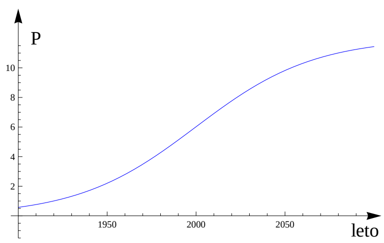
Število prebivalstva se torej spreminja po formuli

$$P(t) = \frac{12\cdot\frac{7}{5}e^{r(t-2011)}}{1+\frac{7}{5}e^{r(t-2011)}} = \frac{84e^{0.03(t-2011)}}{5+7e^{0.03(t-2011)}}.$$

Število prebivalstva se asimptotično približuje k številu

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = K,$$

na spodnji sliki pa je narisan graf funkcije P.



Po tej oceni bo leta 2050 na Zemlji 9.8 milijard ljudi. □

(3) Padalec skoči iz letala in nato pada pod vplivom sile teže in sile zračnega upora. Izračunaj, kako se spreminja hitrost padalca med padanjem in nato še njegovo končno hitrost.

Rešitev: Gibanje padalca določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$mv' = mg - \frac{1}{2}\rho A C_d v^2.$$

Z v smo označili hitrost padalca v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2$. Koeficienti, ki nastopajo v enačbi, imajo naslednji pomen:

- m masa padalca,
- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora,
- g težni pospešek.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznaki $a^2 = \frac{\rho A C_d}{2m}$ in $b^2 = g$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo

$$v' = b^2 - a^2 v^2,$$
$$\frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = dt.$$

Racionalno funkcijo na levi lahko razcepimo na parcialna ulomka in dobimo

$$\frac{1}{b^2 - a^2 v^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{b - av} + \frac{1}{b + av}\right).$$

Z integriranjem tako pridemo do enakosti

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku hitrost padalca $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

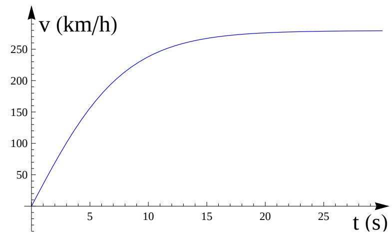
$$\ln \frac{b + av}{b - av} = 2abt.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} + 1}.$$

V limiti dobimo končno hitrost padalca $v_k = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$.

Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3kg/m^3$, $g = 9.8m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



□