1. sklop dodatnih vaj iz Matematike s statistiko

(1) Za naslednje predpise določi maksimalna definicijska območja:

(a) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$,

(b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$,

(c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right)$,

(d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

Rešitev:

(a) $D_f = [-2, 1]$,
(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
(d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2k + 1 \text{ za nek } k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Dani sta funkciji s predpisoma:

$$f(x) = \ln(-x),$$
$$g(x) = x^2 + 2x - 15.$$

Izračunaj predpisa za $f \circ g$ in $g \circ f$ ter nato določi definicijski območji funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$.

Rešitev:

$(f \circ g)(x) = \ln(-x^2 - 2x + 15)$,
$(g \circ f)(x) = (\ln(-x))^2 + 2\ln(-x) - 15$.
$D_{f\circ g} = (-5, 3)$, $D_{g\circ f} = (-\infty, 0)$.

(3) Dani sta funkciji $f(x) = \ln(2x + 1)$ in $g(x) = \arcsin(x - 2) + \frac{\pi}{2}$.

(a) Določi definicijski območji in zalogi vrednosti danih funkcij ter pokaži, da sta injektivni.

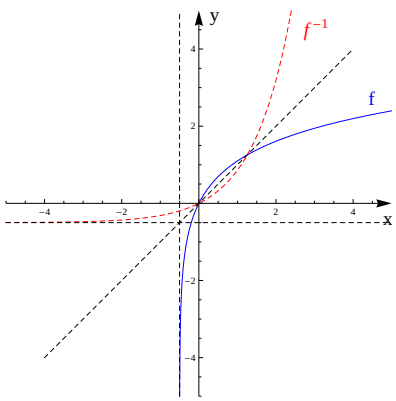
(b) Izračunaj definicijski območji in predpisa za inverzni funkciji.

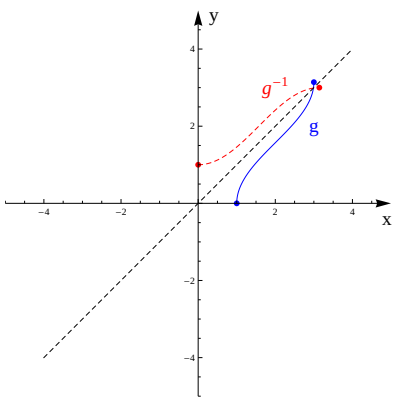
(c) Skiciraj grafa funkcij in inverznih funkcij.

Rešitev:

(a) $D_f = \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, $Z_f = \mathbb{R}$, $D_g = [1, 3]$, $Z_g = [0, \pi]$,

(b) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - 1\right)$, $D_{g^{-1}} = [0, \pi]$, $g^{-1}(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2 = 2 - \cos x$.





(4) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{5+x}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Rešitev:

(a) $L = \dfrac{1}{3}$,

(b) $L = -3$,

(c) $L = -\dfrac{5}{2}$,

(d) $L = -1$,

(e) $L = 2$,

(f) $L = \dfrac{1}{4}$.

(5) Naj bo $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

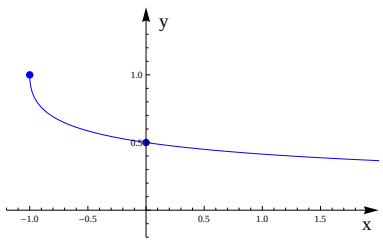
(a) Določi definicijsko območje in območje zveznosti funkcije f.

(b) Ali je mogoče funkcijo f zvezno razširiti čez točko $x = 0$?

Rešitev:

(a) $D_f = [-1, \infty) \setminus \{0\}$, f je zvezna povsod na D_f.

(b) Da, če definiramo $f(0) = \dfrac{1}{2}$.



(6) S pomočjo metode bisekcije poišči na dve decimalki natančno:

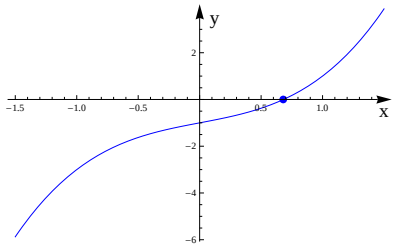
(a) rešitev enačbe $x^3 + x - 1 = 0$,

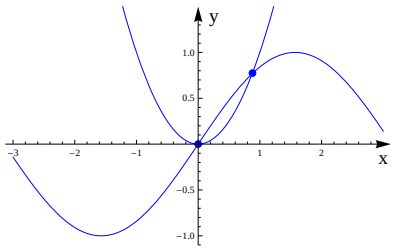
(b) rešitev enačbe $\sin x = x^2$.

Rešitev:

(a) $x = 0.68$,

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.88$.





(7) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = e^x \cos x$,

(b) $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x+2}$,

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$,

(d) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

(e) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x}{1-x}$,

(f) $h(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

(g) $h(x) = x^x$,

(h) $h(x) = \ln(\ln x)$,

(i) $h(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$.

Rešitev:

(a) $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

(b) $h'(x) = -\dfrac{2x(1+x)}{(x^2+4x+2)^2}$,

(c) $h'(x) = 0$,

(d) $h'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

(e) $h'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$,

(f) $h'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$,

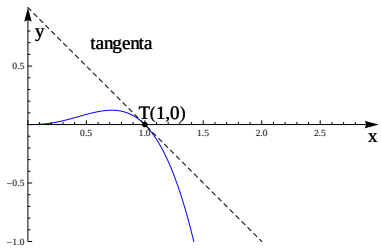
(g) $h'(x) = x^x(1+\ln x)$,

(h) $h'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$,

(i) $h'(x) = (2x^2+4x+3)e^{2x}$.

(8) Zapiši enačbo tangente na krivuljo $y = x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ v točki z absciso $x = 1$.

Rešitev: $y = -x + 1$.



(9) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$.

Rešitev:

(a) $L = \dfrac{1}{2}$,

(b) $L = \dfrac{1}{2}$,

(c) $L = 1$,

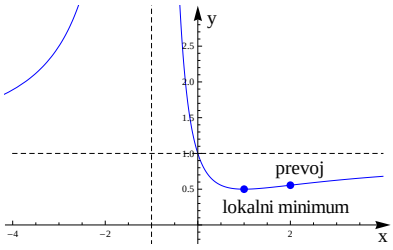
(d) $L = \dfrac{1}{2}$,

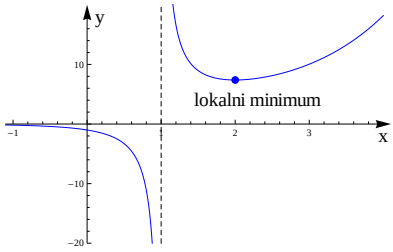
(e) $L = 6$.

(10) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$,

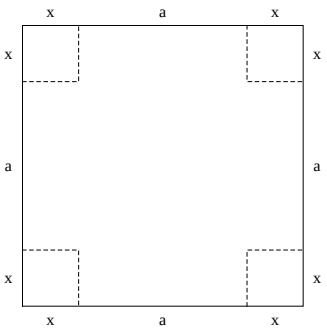
(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

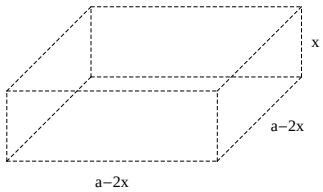




(11) Iz kvadratnega kartona s stranico dolžine a naredimo škatlo, tako da pri ogliščih kvadrata izrežemo štiri male kvadratke. Kakšna mora biti stranica teh kvadratkov, da bo prostornina škatle največja?

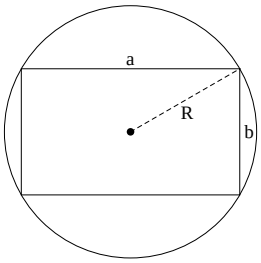
Rešitev: $x = \frac{a}{6}$.





(12) V krog s polmerom R včrtamo pravokotnik s stranicama a in b. Kakšni morata biti dolžini stranic a in b, da bo ploščina tega pravokotnika največja?

Rešitev: $a = b = \sqrt{2}\,R$.



(13) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 1$ na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(-2,0)$ in $C(0,-3)$,

(b) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - 5y^2 + 4x$ na pravokotniku $A(-2,-1)$, $B(0,-1)$, $C(0,0)$ in $D(-2,0)$,

(c) $f(x,y) = x + y + 2$ na liku, ki je omejen z abscisno osjo in parabolo $y = 1 - x^2$.

Rešitev:

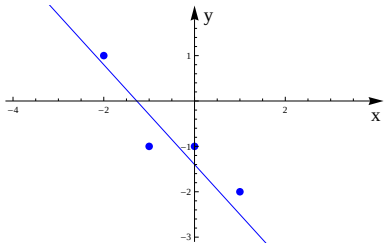
(a) max $= 22$ v točki $C\,(0,-3)$, min $= \dfrac{2}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

(b) max $= \dfrac{24}{5}$ v točki $T\left(-2, -\dfrac{2}{5}\right)$, min $= -\dfrac{16}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3}, -1\right)$.

(c) max $= \dfrac{13}{4}$ v točki $T\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, min $= 1$ v točki $T\,(-1,0)$.

(14) Dane so točke $(-2,1)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(1,-2)$ in $(2,-4)$. Poišči funkcijsko zvezo $y = A + Bx$, ki se po kriteriju najmanjših kvadratov najbolje ujema s temi podatki.

Rešitev: $y = -\frac{7}{5} - \frac{11}{10}x$.



(15) Dane so točke $(1, 0.4)$, $(2, 0.1)$, $(3, -1)$ in $(4, -4)$. Poišči kvadratno funkcijo $y = Ax + Bx^2$, ki se najbolje ujema z danimi podatki.

Rešitev: $y = 0.93x - 0.46x^2$.