2. sklop dodatnih vaj iz Matematike s statistiko

(1) Izračunaj nedoločene integrale:

(a) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$,

(b) $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,tg} x)(1+x^2)}$,

(c) $\int 2x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$,

(d) $\int 2x^3 \cos(x^2) \, dx$,

(e) $\int (x^2+1) \cos x \, dx$,

(f) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x+2)} \, dx$,

(g) $\int \frac{20x}{(x+1)(x^2+9)} \, dx$.

Rešitev:

(a) $I = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$,

(b) $I = \ln|\operatorname{arc\,tg} x| + C$,

(c) $I = -x + (x^2+1) \operatorname{arc\,tg} x + C$,

(d) $I = \cos(x^2) + x^2 \sin(x^2) + C$,

(e) $I = 2x \cos x + (x^2-1) \sin x + C$,

(f) $I = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \ln|x+2| + C$,

(g) $I = -2\ln|x+1| + \ln|x^2+9| + 6 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$.

(2) Izračunaj ploščine naslednjih likov:

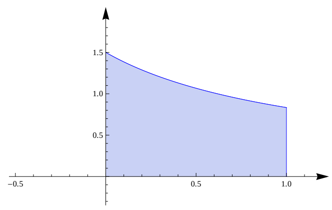
(a) lika med grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x}$ in abscisno osjo na $[0,1]$,

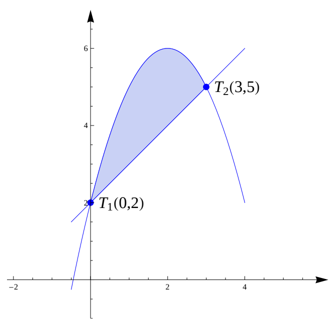
(b) lika med grafoma funkcij $f(x) = x+2$ in $g(x) = -x^2+4x+2$.

Rešitev:

(a) $S = \ln 3$,

(b) $S = \frac{9}{2}$.





(3) Izračunaj volumen:

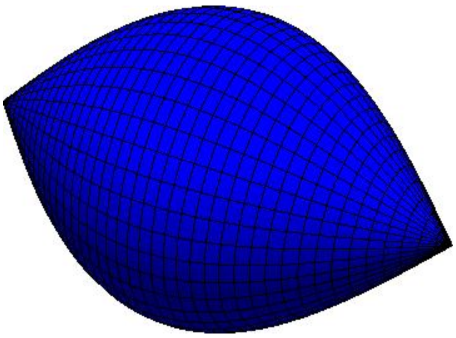
(a) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli abscisne osi na $[0, \pi]$ graf funkcije $g(x) = \sin x$,

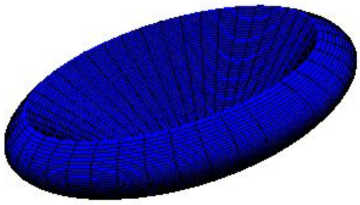
(b) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli osi $y = 1$ lik med grafoma funkcij $f(x) = x + 2$ in $g(x) = -x^2 + 4x + 2$.

Rešitev:

(a) $V = \dfrac{\pi^2}{2}$,

(b) $V = \dfrac{153\pi}{5}$.

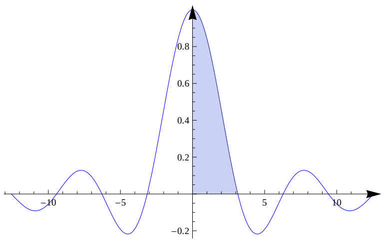




(4) Dan je integral $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

(a) Približno izračunaj dani integral s pomočjo trapezne metode za $n = 5$.

(b) Približno izračunaj dani integral s pomočjo Simpsonove metode za $n = 2$.



Rešitev:

(a) $I_T \approx 1.84144$,
(b) $I_S \approx 1.85221$,
Zaokrožena natančna vrednost je 1.85194.

(5) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami pri danih začetnih pogojih:

(a) $x^2 y' + 3xy = 0$, $y(1) = 1$,

(b) $y' + \dfrac{y}{x^2} = 0$, $y(1) = 2e$,

(c) $x^3 y' = y^2$, $y(1) = 1$.

Rešitev:

(a) $y(x) = \dfrac{1}{x^3}$,

(b) $y(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$,

(c) $y(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

(6) Radioaktivni material razpada s hitrostjo, ki je sorazmerna trenutni količini materiala. Na začetku imamo 100g materiala, po štirih dneh pa 90g.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira količino materiala.

(b) Kdaj bo razpadlo pol materiala.

Rešitev:

(a) $y' = ky$,

(b) $y(t) = 100e^{kt}$, $k = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{9}{10}$, $t_0 = 26,3$dni.

(7) Petkrat zapored vržemo kovanec.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je na prvem kovancu cifra, na petem pa grb?

(b) Kolikšna je verjetnost, da grb pade natanko dvakrat?

(c) Kolikšna je verjetnost, da pade enako cifer kot grbov?

Rešitev:

(a) $P = \dfrac{1}{4}$,

(b) $P = \dfrac{5}{16}$,

(c) $P = 0$.

(8) V prvi posodi imamo 5 belih in 5 črnih kroglic, v drugi pa 4 bele in 5 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo eno kroglico in jo prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo eno kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica bela?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je bila kroglica, ki smo jo prenesli iz prve v drugo posodo bela, če smo izvlekli črno kroglico?

Rešitev:

(a) $P = \dfrac{9}{20}$,

(b) $P = \dfrac{5}{11}$.

(9) Na izpit je prišlo 100 študentov. 30 izmed njih je učenju posvetilo precej časa, 40 nekaj časa, 30 pa se jih sploh ni učilo. Študent, ki se je precej učil, opravi izpit z 90-odstotno verjetnostjo, študent, ki se je malo učil, s 50-odstotno verjetnostjo, študent, ki se ni učil, pa z 10-odstotno verjetnostjo.

(a) Kakšna je verjetnost, da bo naključno izbrani študent opravil izpit?

(b) Kakšna je verjetnost, da se študent, ki je opravil izpit, ni učil?

Rešitev:

(a) $P = \dfrac{1}{2}$,

(b) $P = \dfrac{6}{100}$.

(10) Kovanec vržemo devetkrat.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bosta padla vsaj dva grba?

(b) Katera vrednost števila grbov je najverjetnejša?

Rešitev:

(a) $P(X \geq 2) = \dfrac{502}{512} \approx 0.98$,

(b) $P(X = 4) = P(X = 5) = \dfrac{63}{256} \approx 0.25$.

(11) V seriji 100 izdelkov je 10 pokvarjenih. Iz serije enega za drugim izberemo 3 izdelke brez vračanja. Naj slučajna spremenljivka X označuje število pokvarjenih izdelkov v tem vzorcu treh izdelkov. Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.727 & 0.248 & 0.025 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

(12) V prvi posodi imamo 5 belih in 5 črnih kroglic, v drugi pa 4 bele in 5 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo eno kroglico in jo prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo tri kroglice. Naj slučajna spremenljivka X označuje število belih kroglic med temi tremi kroglicami. Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke X.

Rešitev:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{43}{120} & \frac{7}{120} \end{pmatrix}.$$

(13) Igralec igra naslednjo igro. Pri metu kocke dobi pri sodem število pik 1 evro, pri lihem številu pik pa plača 1 evro. Na začetku ima 10 evrov, nato pa odigra tri igre. Stanje na njegovem računu po treh igrah označimo z X.

(a) Izračunaj porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.

(b) Izračunaj povprečno vrednost in standardni odklon X.

Rešitev:

(a) $X : \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$,

(b) $E(X) = 10,\ \sigma(X) = \sqrt{3}$.

(14) V posodi imamo en listek s številko 1, štiri listke s številko 2, devet listkov s številko 3 in šestnajst listkov s številko 4. Iz posode naključno izberemo en listek in z X označimo številko, ki je zapisana na njem. Izračunaj povprečno vrednost in standardni odklon X.

Rešitev: $E(X) = \frac{10}{3}$, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{31}{45}}$.

(15) S pomočjo Laplaceove aproksimacije približno izračunaj verjetnosti:

(a) V 400 metih kovanca pade grb med 180 in 190-krat.

(b) V 18000 metih kocke pade šestica med 2950 in 3050-krat.

Rešitev:

(a) $P(180 \leq X \leq 190) \approx 0.1359$,

(b) $P(2950 \leq Y \leq 3050) \approx 0.6826$.