Matematika s statistiko
Integral

Določeni integral

(1) Izračunaj ploščini likov, ki jih omejujejo dane krivulje:

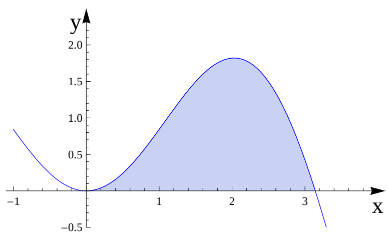
(a) $y = x \sin x$ in $y = 0$ na intervalu $[0, \pi]$,

(b) $y = x^2 + 2x$ in $y = x + 2$.

Rešitev: Ploščina lika, ki leži med grafoma funkcij f in g na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

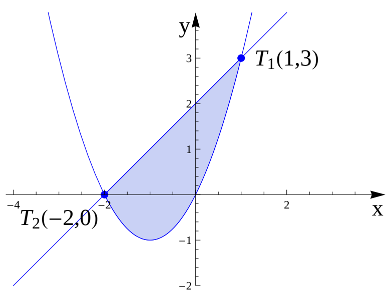
Pri tem vzamemo za g funkcijo, katere graf omejuje lik od zgoraj, za f pa funkcijo, katere graf omejuje lik od spodaj. V nasprotnem primeru bi dobili negativno vrednost ploščine.
(a) Najprej si poglejmo lik pod grafom funkcije $g(x) = x \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.



Za izračun njegove ploščine bomo funkcijo g integrirali po delih. Označimo $u = x$ in $\sin x\, dx = dv$. Potem je $du = dx$ in $v = -\cos x$, kar nam da

$$S = \int_0^\pi x \sin x\, dx = -x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

(b) Sedaj iščemo ploščino lika med parabolo $f(x) = x^2 + 2x$ in premico $g(x) = x + 2$.



Najprej izračunajmo presečišči grafov danih funkcij:

$$x^2 + 2x = x + 2,$$
$$x^2 + x - 2 = 0,$$
$$(x-1)(x+2) = 0.$$

Presečišči sta torej v točkah $T_1(1,3)$ in $T_2(-2,0)$. Da bi dobili ploščino iskanega lika, moramo torej integrirati funcijo $g-f$ na intervalu $[-2,1]$:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{1} \big((x+2)-(x^2+2x)\big)\, dx,\\
&= \int_{-2}^{1} \big(-x^2-x+2\big)\, dx,\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1},\\
&= \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)\right),\\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

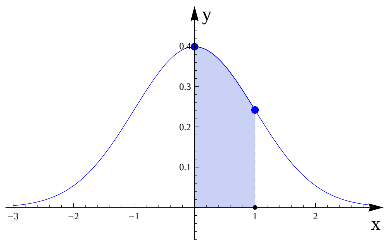
□

(2) S pomočjo trapezne metode izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ na intervalu $[0,1]$, tako da bo napaka manjša od 0.01.

Rešitev: Izračunali bomo določeni integral Gaussove funkcije

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Ta funkcija predstavlja gostoto standardne normalne porazdelitve in igra ključno vlogo v statistiki in verjetnosti. Vrednost tega konkretnega integrala je enaka verjetnosti, da standardno normalno porazdeljena spremenljivka zavzame vrednost na intervalu $[0,1]$.



Gaussova funkcija sicer ima primitivno funkcijo, ki pa ni elementarna funkcija, zato moramo ta določeni integral izračunati s pomočjo kakšne numerične metode. Pokazali bomo, kako lahko s pomočjo trapezne metode izračunamo ta integral na dve decimalki natančno.

Pri trapezni metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo trapezov. Pri tem uporabljamo naslednji algoritem:

· Razdeli $[a,b]$ s točkami $x_k = a + k\cdot\dfrac{b-a}{n}$, za $0\le k\le n$, na n delov in piši $y_k=f(x_k)$.

· $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\right)+R_n.$

Izraz R_n je napaka aproksimacije, ki jo lahko ocenimo navzgor s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Želimo najti tak n, da bo napaka manjša od 0.01, oziroma da bo

$$\frac{(1-0)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq 0.01.$$

Od tod sledi, da mora veljati

$$\frac{1}{12\cdot 0.01} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq n^2.$$

Maksimum funkcije f'' sicer lahko poiščemo natančno, a je s tem lahko kar nekaj dela, zato je dovolj, če ga navzgor ocenimo. V našem primeru je $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$, od koder dobimo za $x \in [0,1]$ oceno

$$|f''(x)| = \frac{|x^2-1|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1.$$

Ker je $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, je dovolj najti n, ki zadošča

$$\frac{1}{0.12\sqrt{2\pi}} \leq n^2.$$

Hitro se lahko prepričamo, da so dobri $n \geq 2$.

Ploščino lika bomo približno izračunali s trapezno metodo pri $n = 4$. To pomeni, da bomo lik, ki leži pod grafom funkcije f na intervalu $[0,1]$, aproksimirali s štirimi trapezi. Najprej napišimo tabelo vrednosti:

x_k	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000
y_k	0.399	0.387	0.352	0.301	0.242

Od tod dobimo aproksimacijo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx \frac{1}{8}\left(0.399 + 2\cdot(0.387+0.352+0.301) + 0.242\right) = 0.340.$$

Dejanska vrednost integrala, zaokroženega na štiri decimalke, je 0.3413, kar pomeni, da smo dobili dokaj dobro aproksimacijo že z zelo malim številom računskih operacij. Za boljšo aproksimacijo bi morali vzeti večji n, ali pa uporabiti Simpsonovo metodo. □

(3) S Simpsonovo metodo pri $n = 3$ oceni dolžino loka sinusoide na intervalu $[0,\pi]$.

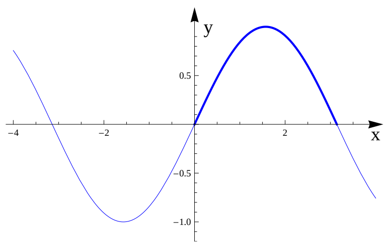
Rešitev: Pri Simpsonovi metodi uporabljamo naslednji algoritem za izračun integrala funkcije f na intervalu $[a,b]$:

- Razdeli $[a,b]$ s točkami $x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{2n}$ (za $0 \leq k \leq 2n$) in piši $y_k = f(x_k)$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right) + R_n.$

Napako aproksimacije lahko pri Simpsonovi metodi ocenimo s formulo

$$R_n \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Praviloma je Simpsonova metoda bolj natančna od trapezne metode.
V našem primeru računamo dolžino loka sinusoide na intervalu $[0,\pi]$.



Ker je $(\sin x)' = \cos x$, nas torej zanima določeni integral

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Integrirali bomo funkcijo $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ na intervalu $[0,\pi]$ s šestimi delilnimi točkami.

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y_k	1.414	1.323	1.118	1	1.118	1.323	1.414

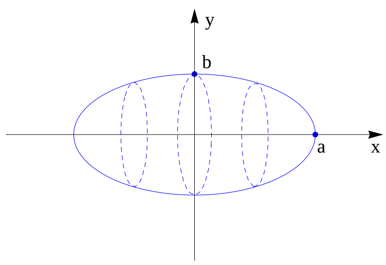
Sledi

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \approx \frac{\pi}{18}\left(2\cdot 1.414 + 4\cdot(1.323+1+1.323) + 2\cdot(1.118+1.118)\right) = 3.819.$$

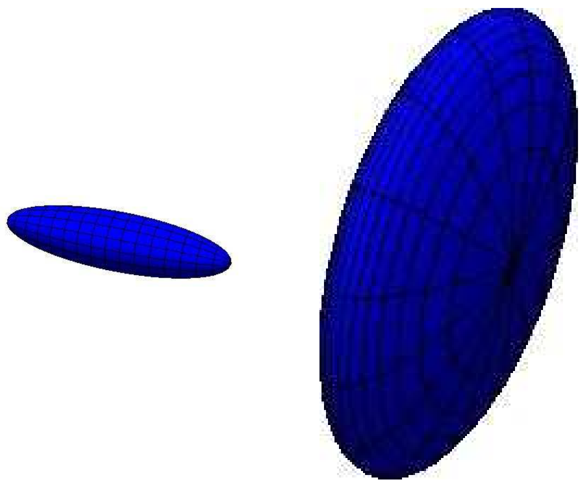
Dejanska dolžina tega loka sinusoide je približno 3.820198. □

(4) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če okoli abscisne osi zavrtimo elipso $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rešitev: Poglejmo si elipso s polosema a in b.



Pri vrtenju elipse okoli abscisne osi dobimo telo ene izmed naslednjih oblik (odvisno od tega ali vrtimo okoli večje ali manjše polosi).



Volumen vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

V našem primeru lahko vzamemo funkcijo $f(x) = \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}$. Od tod dobimo

$$V = \pi \int_{-a}^{a} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \right) \, dx = \pi \left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

V posebnem primeru, ko je $a = b = R$, dobimo kroglo s polmerom R. Njen volumen je $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. $\square$